Abstract. - *This is a non-formal introduction to Lorentz transformations. The Einstein postulates are so formulated that the treatment achives the proof that the velocity of light is independent of the (inertial) frame of reference and that the absolute values of the relative velocities of two inertial frames of reference are equal.*

Questo quaderno raccoglie il testo di un ciclo di seminari sulla teoria della Relatività ristretta, tenuti nell'A.A. 1981-82 presso l'Istituto Matematico dell'Università di Lecce a richiesta di alcuni studenti del II anno del Corso di laurea in Matematica.

Tenuto conto del tempo limitato e della preparazione dei giovani ascoltatori, la cosa migliore è sembrata limitare l'esposizione a pochi aspetti strettamente concettuali dell'argomento. Si è preferito perciò cercare di familiarizzare l'uditorio, nel modo più concreto e meno formale possibile, con quelle conseguenze dei postulati di Einstein che più cozzano con l'abitudine: relatività della contemporaneità, delle lunghezze, delle durate. Queste conseguenze sono tratte unicamente dall'esempio del "treno di Einstein" per via cinematica, senza uso di formule. Uno studio sistematico della Relatività sarà senza dubbio più proficuo dopo una salda assimilazione di questi concetti nuovi.

Lo scopo della esposizione è duplice.

Il primo scopo, didattico, è quello di mostrare che è possibile padroneggiare questi concetti pur con un bagaglio di conoscenze molto limitato: sostanzialmente non occorre andare oltre il moto rettilineo uniforme.

Il secondo scopo non è didattico: si vuole mostrare come si possa pervenire alle trasformazioni di Lorentz postulando soltanto che
1) i riferimenti inerziali sono fra loro tutti equivalenti; 2) ogni riferimento inerziale è otticamente isotropo. In altri termini l'uni

ca relazione che si pone fra i riferimenti inerziali è la loro equivalenza; con l'altro postulato "non si esce da un singolo riferimento inerziale". In particolare non si pone, fra i riferimenti inerziali nemmeno il legame dato dal valore,unico in tutti, della velocità della luce. L'indipendenza di tale valore dal riferimento segue automaticamente dalla trattazione solo come conseguenza di opportune convenzioni.

Questa presentazione non è solo un modo di soddisfare il gusto matematico della postulazione minima, ma corrisponde alla situazione fisica effettiva; due osservatori in moto relativo, una volta stabilita l'equivalenza dei loro riferimenti,possono porre in relazioni quantitative le loro misure soltanto mediante definizioni coerenti o, se si vuole, mediante convenzioni.

1. RICHIAMO DEI FONDAMENTI DELLA MECCANICA CLASSICA.

Per una comprensione profonda dei concetti fondamentali della Teoria della Relatività Ristretta (TR) è necessario avere ben chiari i principi della meccanica newtoniana.

I concetti da tenere presenti non sono molti: essi si riducono sostanzialmente a due complessi di nozioni. Il primo è costituito da:

I tre principi fondamentali, che conviene qui ricordare nella seguente forma sintetica:

a) Prima legge o principio d'inerzia, che postula l'esistenza delle terne inerziali, cioé delle terne in cui un elemento materiale isolato si muove di moto rettilineo uniforme.

b) Seconda legge, in base alla quale le forze scambiate fra due elementi che costituiscono un sistema isolato, formano in ogni istante una coppia di braccio nullo.

c) Terza legge o principio di sovrapposizione delle forze.

E' opportuno spendere qualche parola a proposito delle forze scambiate fra due elementi. La seconda legge è tradotta parzialmente (1) in formule dalle "equazioni del moto" dei due elementi:

$$m_1\vec{a}_1 = \vec{f}\,(OP_1;OP_2,\ \vec{v}_1;\vec{v}_2) \qquad (\text{vers}\ \vec{f} = \pm\ \text{vers}\ P_1P_2\ )$$
$$m_2\vec{a}_2 = -\ \vec{f}(OP_1;OP_2;\vec{v}_1;\vec{v}_2)$$

dove $OP_i, \vec{v}_i, \vec{a}_i, m_i$ $(i=1,2)$ sono rispettivamente il vettore di posizione, la velocità, l'accelerazione, la massa dell'i^{mo} elemento ed $\vec{f}$ è la forza che l'elemento 2 esercita sull'elemento I.

---

(1) Dalle equazioni non risulta che vers $\vec{f} = \pm$ vers P_1P_2

In termini espliciti, la forza agente sull'elemento 1 all'istante t è

$$\vec{f}[OP_1(t),\ OP_2(t),\ \vec{v}_1(t),\ \vec{v}_2(t)].$$

Questo equivale a dire che la forza che l'elemento 1 risente all'istante t da parte dell'elemento 2 dipende dalla posizione e dalla velocità che l'elemento 2 possiede in quello stesso istante.

In altri termini l'azione esercitata dall'elemento 2 sull'elemento 1 si propaga istantaneamente, ossia ha velocità infinita.

Ora nessuna grandezza fisica ha valore infinito: d'altra parte la meccanica classica, che poggia sulle equazioni citate e sulle loro conseguenze, è ben verificata sperimentalmente, almeno nei fenomeni di moto ordinari. Bisogna dunque conciliare due fatti antitetici: la velocità di propagazione delle interazioni deve essere finita e contemporaneamente sembrano essere valide leggi di forza che implicano invece un valore infinito per tale velocità.

La soluzione di questa apparente contraddizione sta nel fatto che la velocità di propagazione delle interazioni è molto maggiore delle velocità con le quali si muovono i corpi nei fenomeni ordinari di moto.

Si consideri per esempio un sistema isolato costituito da due elementi. Si indichino con r(t) la distanza fra gli elementi e con c la velocità di propagazione della interazione. Se c è molto maggiore delle velocità massime degli elementi, nell'intervallo di tempo, presumibilmente dell'ordine di $\frac{r(t)}{c}$, impiegato dall'interazione per "passare" da un elemento all'altro, i due elementi si spostano di tanto poco, che la differenza dei valori che la forza assume all'istante t_1 di partenza dell'interazione o all'istante t_2 di arrivo di questa, rientra largamente nelle approssimazioni consentite o negli errori sperimentali. Per es. se $|\vec{v}_i|/c \ll 1$ si ha

$$OP_i(t_2) \simeq OP_i(t_1) + \vec{v}_i \Delta t \equiv OP_i(t_1) + \frac{r}{c} \vec{v}$$

e, per valori non troppo grandi di r, può accadere che la differenza fra $OP_i(t_2)$ e $OP_i(t_1)$ sia trascurabile.

In questo caso introdurre nelle equazioni del moto la quantità

$$\vec{f}[OP_1(t_2)\ OP_2(t_1)\ \vec{v}_1(t_2)\ \vec{v}_2(t_1)] \quad \text{o} \quad \vec{f}[OP_1(t_1) OP_2(t_1) \vec{v}_1(t_1) \vec{v}_2(t_1)]$$

non porta differenze sostanziali.

Da quanto detto risulta chiaro anche che le interazioni sono istantanee in senso stretto se e solo se gli elementi sono a contatto ($OP_2-OP_1 = 0$).

Quando è lecito assumere un valore infinito per la velocità di propagazione delle interazioni, il tempo assume un carattere "assoluto" e cioé è lo stesso per tutti gli osservatori (vedere n.4).

Il secondo complesso di nozioni è connesso con

2) L'invarianza in forma delle equazioni di moto rispetto a trasformazioni che facciano passare da un riferimento inerziale ad un altro. Nei riferimenti inerziali lo spazio e il tempo sono omogenei e isotropi in relazione ai moti dei sistemi isolati.Queste proprietà sono equivalenti a certe forme di dipendenza delle forze (effettive) dalle variabili di posizione e di velocità degli elementi del sistema materiale isolato e dal tempo (da questo ultimo le forze non dipendono esplicitamente, mentre dai vettori di posizione dipendono soltanto per il tramite di tutte le possibili differenze OP_i-OP_k, e analogamente per le velocità).

Va infine tenuto presente che tutte le proprietà ricordate sono proprietà di tutti i riferimenti inerziali e quindi questi, dal punto di vista meccanico, non sono distinguibili mediante esperienze mec caniche effettuate nel loro interno. Perciò nella meccanica classica non esiste uno spazio privilegiato, o "assoluto": gli spazi di tutti i riferimenti inerziali sono "assoluti".

L'espressione matematica della indistinguibilità dei riferimenti inerziali sta nel fatto che una trasformazione di coordinate che faccia passare da un riferimento inerziale ad un altro, lascia invariate le equazioni del moto. Se la velocità relativa di due riferimenti inerziali è parallela alla comune direzione degli assi x e x' le coordinate x y z, x' y' z' sono legate alle relazioni:

(1) $$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z .$$

Come si vede si è tacitamente assunto che il tempo sia "universale". Questo è conseguenza del fatto che le interazioni si propagano con velocità infinita (vedere n.4).

L'equivalenza dei riferimenti inerziali o, se si vuole, l'invarianza delle equazioni del moto, rispetto alle trasformazioni (1), prende il nome di "principio di relatività galileiana" (v. per es.[1] n°7).

2. DIFFICOLTA' DELLA FISICA CLASSICA.

Come si è accennato al n. 1 il principio di relatività galileiana è perfettamente soddisfacente nel campo della meccanica dei corpi macroscopici. Naturalmente soddisfacenti sono anche le sue premesse e cioé l'esistenza di un tempo unico per tutti gli osservatori (tempo assoluto) o, in modo equivalente, l'ipotesi di velocità infinita di propagazione delle interazioni. Si è pure detto che questo stato di cose è conseguenza del fatto che rispetto alla velocità di spostamento dei corpi macroscopici con i quali si ha a che fare nei moti ordinari, la velocità di propagazione delle interazioni è così grande che assumerla infinitamente grande non porta ad errori sperimentali rilevabili con gli strumenti che si usano, appunto, per le misure nel campo macroscopico.

In passato si tentava di riportare tutti i fenomeni fisici a fenomeni meccanici e poiché nell'ambito della meccanica tutte le ipotesi accennate sono in accordo con l'esperienza, sembrava che la relatività galileiana potesse essere accettata come un fatto fondamentale e incrollabile da porsi alla base di tutti i fenomeni fisici.

Nella seconda metà del secolo scorso, però, si comprese appieno che i fenomeni fisici non possono essere ridotti tutti a fatti meccanici, ma è necessario formulare a parte teorie termodinamiche ed elettrodinamiche e, in più, che ogni fenomeno non ha un solo aspetto (per es. solo meccanico o solo elettrodinamico ecc.), ma è invece un complesso di fatti meccanici, elettrodinamici, termodinamici. Da ciò segue che modifiche nei principi base di una di queste discipline debbono coinvolgere modifiche anche per le altre discipline.

Poiché nell'ambito della meccanica la relatività galileiana è soddisfacente, è evidente che la teoria della relatività (TR) non è sorta in conseguenza di difficoltà presentatesi nello sviluppo della meccanica stessa. Al contrario la TR è sorta in conseguenza degli sforzi fatti nel tentantivo di superare alcune difficoltà presentatesi nello sviluppo della elettrodinamica: infatti la TR è una teoria moderna della elettrodinamica.

Di conseguenza per comprendere le motivazioni della nascita della TR è indispensabile conoscere l'elettrodinamica nella sua evoluzione dalle sue origini classiche fino agli sviluppi che portarono alle difficoltà accennate. Tuttavia non è impossibile comprendere i fondamenti della relatività anche ignorando del tutto l'elettrodinamica.

Nel seguito, introdotti i postulati base e utilizzando nozioni assolutamente elementari si tenterà di illustrare le idee nuove che seguono dai postulati della TR.

L'elettrodinamica classica si compendia nelle quattro equazioni di Maxwell

$$\mathrm{div}\ \vec{D} = \rho \qquad\qquad \mathrm{rot}\ \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\mathrm{div}\ \vec{B} = 0 \qquad\qquad \mathrm{rot}\ \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

(la notazione è quella usuale).

Queste equazioni riassumono in forma estremamente sintetica ed elegante tutta l'elettrodinamica classica, così come essa appare rispetto al riferimento terrestre, sintesi di una miriade di esperienze tutte coerenti fra loro. Sarebbe difficile per un fisico rinunziare ad una teoria così affascinante ed elegante. Eppure le equazioni di Maxwell non sono invarianti per trasformazioni di Galileo. In altri termini se si passa da un riferimento inerziale ad un altro, le equazioni di Maxwell assumono una nuova forma.

E' necessario allora scegliere una delle seguenti possibilità:

1) Il principio di relatività sussiste in meccanica ma non in elettrodinamica: in elettrodinamica esiste un riferimento privilegiato.

Questa possibilità è però poco convincente perché come si è detto uno stesso fenomeno ha sempre aspetti meccanici ed elettrodinamici. Sarebbe strano per es. che due forze, una di origine meccanica, l'altra di origine elettrica, si trasformassero in modo diverso nel passaggio da un riferimento ad un altro. Sarebbe poi strano che il riferimento privilegiato fosse quello terrestre.

2) Esiste un principio di relatività valido tanto in meccanica quanto in elettrodinamica, ma la formulazione delle equazioni di Maxwell non è corretta. Questa seconda possibilità cozza con la validità delle equazioni di Maxwell nel riferimento terrestre. Al contrario vi sono esperienze che mostrano che le equazioni newtoniane non

sono sempre valide (esperienza di Fizeau, esperienze di Kaufmann).

3) Un principio di relatività è valido in meccanica e in elettrodinamica, le equazioni di Maxwell sono corrette, ma non è corretta la trasformazione di Galileo. Di conseguenza le leggi della meccanica newtoniana vanno modificate.

E' quest'ultima la posizione della TR. E' opportuno aggiungere che, fino alla fine del secolo scorso, si riteneva che per la trasmissione di onde di qualunque genere (in particolare di onde elettromagnetiche) fosse necessario un mezzo nel quale le onde si propagassero mediante deformazione del mezzo stesso. Anteriormente all'avvento della TR i fisici erano convinti che tutto lo spazio fosse pieno di una sostanza dotata di proprietà molto particolari detta "etere" (luminifero).

Il riferimento nel quale l'etere era in quiete era il riferimento assoluto. Entro certi limiti l'esistenza dell'etere è compatibile con le equazioni di Maxwell ed è addirittura possibile costruire una teoria coerente nella quale si possono calcolare deformazioni e sforzi causati nell'etere dalle onde elettromagnetiche (OEM) che si transitano ([2] 9.b).

Secondo le vedute moderne invece, la luce (OEM) non ha bisogno di alcun mezzo per propagarsi. Ora, mentre un riferimento solidale ad un mezzo può, almeno nei riguardi di certi fenomeni, essere un riferimento privilegiato, un riferimento nel vuoto non può essere distinto fisicamente da alcun altro riferimento, fisso o mobile, anch'esso nel vuoto. Questo è un altro motivo per il quale viene esteso il principio di relatività ai fenomeni elettrodinamici.

4. SINCRONIZZAZIONE DEGLI OROLOGI MEDIANTE SEGNALI DI VELOCITA' FINITA.

Nella meccanica classica in virtù del carattere istantaneo della propagazione delle interazioni, con un unico orologio si può indicare il tempo relativo ad ogni punto di un qualunque riferimento inerziale.

In altri termini se due osservatori solidali fra loro e posti in punti diversi di uno stesso riferimento inerziale vogliono accordarsi sul modo di misurare i tempi, basta che uno dei due invii all'altro un segnale che possegga velocità infinita. Allora il segnale giunge al secondo osservatore nello stesso istante in cui ha lasciato il primo sicché i due osservatori possono misurare i tempi utilizzando un unico orologio. Le cose non cambiano se i due osservatori si trovano in riferimenti in moto relativo con velocità $\vec{v}$ (finita). Infatti $\vec{v}$ è finita mentre il segnale ha velocità infinita e quindi raggiunge il secondo osservatore in un tempo nullo. Poiché il tempo di partenza e quello di arrivo coincidono, i due osservatori si intendono perfettamente qualunque sia l'istante al quale essi si riferiscono.

In altri termini il tempo è lo stesso per tutti gli osservatori, o, come anche si dice, ha carattere assoluto.

Diversamente vanno le cose se il segnale ha velocità finita. Infatti due osservatori, anche se sono solidali, quando siano posti in punti diversi dallo spazio, non si possono intendere sulla definizione del tempo se non stabiliscono una convenzione. Se ognuno degli osservatori dispone di un orologio, i due orologi possono essere sincronizzati per es. portando uno dei due sul luogo dell'altro, regolandolo sul tempo di questo e poi riportandolo al posto iniziale. Ma niente assicura che il trasporto lasci inalterata la marcia dell'orologio, tanto più che in un viaggio di andata e ritorno è inevitabile che, almeno in qualche istante, l'orologio possegga accelerazione non nulla.

Per potersi accordare sulla definizione del tempo gli osservatori debbono quindi disporre ognuno di un orologio e regolare gli orologi "a distanza". In più gli orologi dei due osservatori debbono essere identici (la fisica quantistica fornisce orologi identici e questi sono costituiti dagli atomi con le loro frequenze caratteristiche. Anche le lunghezze trovano unità di misura "universali" nelle lunghezze d'onda delle radiazioni atomiche (Vedere però n.7)).

I due osservatori (che saranno indicati con A e B) dispongano dunque di orologi identici. Sia r la distanza che li separa. L'osservatore A invii un segnale luminoso all'osservatore B, all'istante t_1 (misurato dall'orologio di A). Poiché la luce viaggia con velocità c l'osservatore B segnerà, come istante di arrivo del segnale, l'istante $t_2 = t_1 + \frac{r}{c}$.

Se in B è posto uno specchio che rifletta istantaneamente la luce partita da A, l'osservatore A ricevendo di ritorno il segnale all'istante t_3, sa che l'osservatore B ha ricevuto il segnale all'istante

$$t_2 = t_1 + \frac{t_1+t_3}{2}$$

Naturalmente in quest'ultimo caso si fa uso diretto della proprietà della luce di avere velocità c in tutte le direzioni (come è attestato da varie esperienze, per es. la notissima esperienza di Michelson e Morley).

Ripetendo più volte queste operazioni si possono in più confrontare gli andamenti dei due orologi.

Questo modo di sincronizzare gli orologi è, come è chiaro, indipendente dal valore di c e, più in generale, dà lo stesso risultato qualunque sia il fenomeno di propagazione usato, purché lo spazio sia isotropo rispetto ad esso.

Nella TR non esistono velocità infinitamente grandi: la velocità della luce è la massima velocità raggiungibile (2) in ogni

(2) Come velocità di propagazione dell'energia ([3] cap. 8)

riferimento [3].

Per questo motivo gli orologi vengono sincronizzati utilizzando come segnali i segnali luminosi. Il riferimento relativistico è costituito da una terna di riferimento nella quale in ogni punto è posto un orologio: gli orologi sono tutti identici e sono sincronizzati, nel modo sopra descritto, mediante segnali luminosi.

5. MISURA DI SEGMENTI IN MOTO.

Nel seguito si dovranno confrontare le misure di lunghezze di segmenti effettuate da osservatori in moto relativo. In questo numero si vuole mettere in evidenza che la misura di un segmento in moto va effettuata con certe cautele.

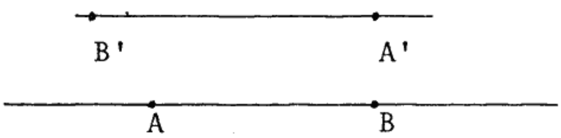
Si supponga che un segmento A'B' sia in moto traslatorio con velocità $\vec{v}$ rispetto a un riferimento K e sia vers A'B' = - vers $\vec{v}$.

L'osservatore K misura la lunghezza di A'B' segnando dei traguardi sulla retta del suo riferimento sulla quale scorre il segmento A'B' e prendendo nota di due punti sui quali passano gli estremi A' e B' del segmento in moto. Per ottenere una misura non ambigua l'osservatore K deve prendere nota di due punti A e B sui quali gli elementi A',B' del segmento da misurare passano *simultaneamente*. La distanza $|AB|$ fra i punti A e B va assunta come lunghezza $|A'B'|$ del segmento A'B'. E' evidente che se i traguardi sui quali passano A' e

(3) Per stabilire una misura degli intervalli temporali ossia per definire una unità di misura dei tempi ci si serve abitualmente di certi fenomeni ripetitivi che si usa chiamare fenomeni periodici. Un fenomeno periodico è costituito da una successione di fasi che appaiono identiche all'osservatore; questi è indotto allora a prendere come unità di misura dei tempi la durata di una delle fasi. E' evidente quindi che, nella scelta delle unità di misura dei tempi, almeno inizialmente, l'osservatore deve affidarsi alla "sensazione" che due o più durate siano uguali.

e B' non vengono osservati simultaneamente, al segmento A'B' può essere attribuita una lunghezza qualunque, che può risultare anche negativa.

Per es. se si osserva la posizione del punto B' ad un certo istante t_1 e la posizione del punto A' ad un istante successivo t_2, al segmento andrà attribuita una lunghezza pari ad $|A'B'|$ aumentata [4] del cammino $v(t_2-t_1)$ percorso da A' del tempo t_2-t_1. Analogamente se si osserva la posizione di A' ad un istante t_1 e quella di B' ad un istante t_2 successivo a t_1 al segmento A'B' va attribuita una lunghezza pari ad $|A'B'|$ diminuita della quantità $v(t_2-t_1)$. Se $v(t_2-t_1) > |A'B'|$ (cioé se si lascia al punto B' il tempo di oltrepassare il traguardo che si è utilizzato per localizzare il punto A' all'istante t_1) al segmento A'B' andrà attribuita una lunghezza negativa



In conclusione: K assume come lunghezza del segmento A'B' la distanza tra due traguardi sui quali A' e B' passino simultaneamente.

Si considerino ora due punti A, B fissi in K e sia vers AB = - vers A'B'.

E' spontaneo assumere la seguente convenzione.

Se il punto A' passa su B prima che B' passi su A, la lunghezza del segmento A'B' è maggiore di quella del segmento AB e viceversa, se A'B' è più lungo di AB, A' passa su B prima che B' passi su A.

Se A' e B' passano simultaneamente su B e rispett. su A, i segmenti A'B' e AB hanno la medesima lunghezza e viceversa, se A'B' è uguale ad AB, A' e B' passano simultaneamente su B e rispett. su A.

(4) Si ricordi che è vers A'B' = vers $\vec{v}$

Se B' passa su A prima che A' passi su B, la lunghezza del segmento A'B' è minore di quella del segmento AB e viceversa, se A'B' è minore di AB, B' passa su A prima che A' passi su B.

Si vede quindi che il confronto fra segmenti in moto relativo non può essere dissociato dal confronto fra intervalli temporali.

Le convenzioni precedenti si possono esprimere in forma sintetica introducendo il concetto di evento, concetto che sarà d'altra parte usato estesamente nel seguito. Un evento è un fenomeno fisico che avviene in un punto determinato dello spazio, ad un istante determinato. Per es. la sovrapposizione di due punti, l'arrivo di un segnale in un punto, l'accensione di una sorgente luminosa puntiforme, sono eventi.

Due eventi che avvengono in uno stesso punto dello spazio per un osservatore non avvengono in generale nello stesso punto dello spazio per un osservatore in moto rispetto al primo (5).

Al contrario due eventi che avvengono in uno stesso istante per un osservatore, avvengono in uno stesso istante per tutti gli osservatori: ciò è conseguenza del fatto che nella meccanica classica il tempo è universale (n.4).

Due eventi che avvengono nello stesso punto dello spazio allo stesso istante sono detti coincidenti: ovviamente due eventi coincidenti per un osservatore sono tali per tutti gli osservatori.

Si torni ora a considerare il segmento A'B' in moto rispetto all'osservatore K e si introducano i seguenti eventi:

E_1: sovrapposizione di A e A'

E_2: sovrapposizione di A e B'

---

(5) Per esempio l'accensione e lo spegnimento di una lampada posta in un punto fisso su un treno in moto sono eventi che per un osservatore terrestre avvengono in punti distinti del suo spazio.

E_3: sovrapposizione di A' e B .

Si indichino con t (E_1), t (E_2), t (E_3) gli istanti in cui questi eventi hanno luogo. Allora le convenzioni precedenti si possono esprimere nel modo seguente:

$|A'B| > |AB| \longleftrightarrow t(E_3)$ precede $t(E_2)$

$|A'B'| = |AB| \longleftrightarrow t(E_3)$ coincide con $t(E_2)$

$|A'B'| < |AB| \longleftrightarrow t(E_3)$ segue $t(E_2)$

6. POSTULATI DELLA TEORIA DELLA RELATIVITA'.

1) I riferimenti inerziali sono tutti fra loro equivalenti dal punto di vista fisico, nel senso che qualunque esperienza fisica può essere realizzata in modo identico in ognuno di tali riferimenti.

2) Ogni riferimento inerziale è otticamente isotropo, cioé la luce nel vuoto ha la stessa velocità in tutte le direzioni.

Il primo postulato coincide nella forma col postulato di relatività galileiana e, a parte l'inclusione di tutti i fenomeni fisici, in luogo dei soli fenomeni meccanici, non fa prevedere innovazioni clamorose.

Al contrario, il secondo postulato attribuisce al moto della luce proprietà ben diverse da quelle del moto di un qualunque sistema classico. Per riconoscerlo sarà opportuno confrontare i moti di un sistema classico costituito, per es. da due elementi, rispetto a due terne inerziali, col moto di un raggio luminoso, sempre rispetto a due terne inerziali, otticamente isotrope.

Siano A e B due punti di una terna inerziale K, M il punto di mezzo del segmento AB. Dai punti A e B partano simultaneamente due elementi P_A, P_B con velocità rispettive $\vec{u}$ e $-\vec{u}$ e sia vers $\vec{u}$ = vers AB.

Naturalmente i due elementi arrivano contemporaneamente in M.

Sia K' un riferimento inerziale in moto rispetto a K con velocità $\vec{v}$ e sia vers $\vec{v}$ = vers AB. Poiché K ha velocità $-\vec{v}$ rispetto a K', in K' l'elemento P_A ha velocità $\vec{u}'_{P_A} = \vec{u} - \vec{v}$, mentre l'elemento P_B ha velocità $\vec{u}'_{P_B} = -\vec{u} - \vec{v}$. Nel tempo Δt_A impiegato dall'elemento P_A ad andare da A ad M il punto M si sposta, rispetto a K', di un tratto $-\vec{v}\Delta t_A$. L'elemento P_A percorre quindi una strada che è data, sia dall'espressione $(\vec{u}-\vec{v})\Delta t_A$, sia dall'espressione AM $- \vec{v}\,\Delta t_A$.

Dall'uguaglianza

$$(\vec{u} - \vec{v})\Delta t_A = AM - \vec{v}\,\Delta t_A$$

si ricava

$$\vec{u}\,\Delta t_A = AM\ .$$

Analogamente l'elemento P_B per andare da B ad M percorre in K' una strada che è data sia dall'espressione $(-\vec{u} - \vec{v})\Delta t_B$ sia dall' espressione BM $- v\Delta t_B$.

Dall'uguaglianza:

$$(-\vec{u} - \vec{v})\Delta t_B = BM - \vec{v}\Delta t_B$$

poiché è BM = - AM si ricava, confrontando con la relazione contenente Δt_A

$$\Delta t_A = \Delta t_B\ .$$

Ora i due elementi giungono in M contemporaneamente per l'osservatore K e quindi giungono contemporaneamente in M per ogni osservatore: l'uguaglianza di Δt_A e Δt_B mostra allora che essi anche per l'osservatore K' partono simultaneamente da A e da B. Questa affermazione è tautologica; nella definizione delle velocità (assoluta, relativa, di trascinamento) gli osservatori K e K' si servono dello stesso tempo.

Si passi ora all'esame del moto di raggi luminosi nell'ipotesi che sia vero il postulato 2).

Le quantità geometriche e fisiche saranno espresse nei due riferimenti in unità differenti. Questa scelta, che per ora può sembrare una inutile complicazione, si rivelerà poi concettualmente necessaria alla luce dei risultati che si trarranno dall'esempio trattato.

Si supponga che in A e in B siano poste due sorgenti luminose e si assuma la validità del postulato 2); in altri termini K e K' siano entrambi otticamente isotropi.

Nel riferimento K le due sorgenti vengano accese simultaneamente. I raggi luminosi procedendo in K entrambi con velocità c (postulato 2)) giungono contemporaneamente nel punto di mezzo M di AB. Poiché gli eventi di arrivo in M dei due raggi luminosi sono coincidenti per K (arrivo simultaneo nello stesso punto) essi sono coincidenti per ogni osservatore: anche per K', quindi, i due raggi giungono simultaneamente in M.

Si indichino ora con ℓ' la lunghezza di AB misurata nelle unità di K' e con $\Delta t'_A$ e $\Delta t'_B$ i tempi, sempre misurati nelle unità di K', impiegati dai raggi AM e BM per percorrere i rispettivi cammini. Poiché K' è inerziale e quindi otticamente isotropo, entrambi i raggi si muovono con la stessa velocità c': le strade che essi percorrono fra le rispettive sorgenti e il punto M sono $c'\Delta t'_A$ e $c'\Delta t'_B$.

In K' il punto M si muove con una velocità $\vec{v}'$ che ha verso opposto a quello di $\vec{v}$ (ricordare anche che è vers AB = vers $\vec{v}$) e quindi va incontro al raggio uscente da A, mentre si muove nello stesso verso uscente da B, Nel riferimento K' quindi per ottenere la strada $c'\Delta t'_A$ percorsa dal raggio AM bisogna sottrarre da $\ell'/2$ la strada $v'\Delta t'_A$ percorsa dal punto M nel tempo $\Delta t'_A$. Dall'uguaglianza:

$$c'\Delta t'_A = \ell'/2 - v'\Delta t'_A$$

si ha:

$$\Delta t'_A = \frac{\ell'}{2(c'+v')}$$

Per ottenere la strada $c'\Delta t'_B$, percorsa in K' dal raggio BM, occorre invece sommare ad $\ell'/2$ la strada $v'\Delta t'_B$ percorsa da M nel tempo $\Delta t'_B$.

Dall'uguaglianza

$$c'\Delta t'_B = \frac{\ell'}{2} + v'\Delta t'_B$$

si ha:

$$\Delta t'_B = \frac{\ell'}{2(c' - v')}$$

Si conclude che in K' i raggi giungono contemporaneamente in M ma impiegando tempi diversi. Poiché $\Delta t'_B > \Delta t'_A$, in K' il raggio che lascia B parte prima di quello che lascia A, a differenza di quanto accade in K. Si ha così la prima conseguenza del postulato 2): la relatività della contemporaneità.

Sicché, se si vuole che i riferimento K e K' siano entrambi otticamente isotropi, si deve abbandonare il carattere assoluto del tempo.

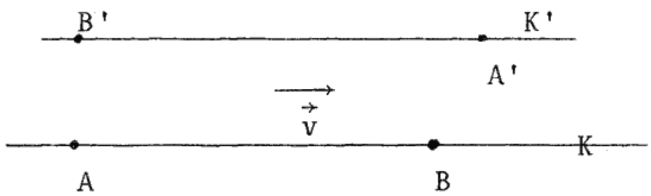
Va osservato che questa discrepanza non dipende dalle unità di misura usate dai due osservatori.

b) Relatività della uguaglianza di intervalli spaziali e di intervalli temporali.

Si considerino ora due punti in K' tali che l'osservatore K veda passare simultaneamente A' su B e B' su A (l'ordine dei punti A,B e A',B' è quello convenuto al n.5).

Per l'osservatore K i segmenti AB e A'B' in base alle convenzioni stipulate al n.5 hanno la stessa lunghezza.

Si supponga che le sorgenti luminose in A e in B vengano accese per l'osservatore K, nell'istante in cui i due segmenti risultano sovrapposti



Si considerino ora i seguenti eventi: 1) partenza del raggio da B, 2) sovrapposizione di A' e B. Questi due eventi avvengono simultaneamente e nello stesso punto per K. Essi sono quindi coincidenti per tutti gli osservatori.

Analogamente sono eventi coincidenti la partenza del raggio da A e la sovrapposizione di A e B'.

D'altra parte nel riferimento K' il raggio uscente da B parte prima di quello uscente da A. Di conseguenza in K' il punto A' passa su B prima che il punto B' passi su A. Nella convenzione fatta al n.5, in K' il segmento A'B' è quindi più lungo del segmento AB, a differenza di quanto avviene per l'osservatore K, per il quale i due segmenti sono uguali. Si ha dunque la seconda conseguenza del postulato di isotropia ottica: la relatività dell'uguaglianza di segmenti in moto relativo.

Poiché in K è $|AB| = |A'B'|$, i tempi di scorrimento di A' su AB e di A su A'B' sono uguali, cioé:

$$(t(E_1), t(E_3)) = (t(E_1), t(E_2)).$$

In K', essendo $|A'B'| > |AB|$ il tempo di scorrimento di A' su AB è minore del tempo di scorrimento di A su A'B', cioé

$$(t'(E_1),\ t'(E_3)) < (t'(E_1),\ t'(E_2)).$$

Si ha così la terza conseguenza del postulato di isotropia ottica: la relatività dell'uguaglianza di due intervalli temporali fra due coppie di eventi.

Va sottolineato che i risultati illustrati sono conseguenze solamente del postulato che afferma che tutti i riferimenti inerziali sono otticamente isotropi.

Classicamente ~~esiste~~ un solo riferimento otticamente isotropo e quindi le divergenze sopra viste fra le misure effettuate da osservatori in moto relativo non sussistono.

7. Difficoltà poste dall'esempio precedente.

Le differenze trovate dai due osservatori K e K' pongono un nuovo problema. I due osservatori trovano differenze qualitative nelle loro misure, ma non sono in grado di tradurre queste differenze in termini quantitativi. Essi vivono per così dire in due mondi differenti e se ognuno di loro costruisce una teoria fisica nel proprio riferimento, le due teorie non possono essere messe a confronto, perché per i due osservatori già i concetti di estensione spaziale e di durata sono diversi: fintanto che la situazione è questa, i due osservatori non possono fare confronti fra i risultati delle loro misure. Per es. fintanto che l'osservatore K non sa "di quanto" il suo segmento AB è visto da K' più corto del segmento A'B' o "di quanto" sono diversi per K' due intervalli temporali che nel suo riferimento appaiono uguali, non è possibile porre in relazione misure di lunghezza, né misure di tempo. Di conseguenza non è possibile neanche mettere a confronto misure di velocità. In particolare non ha senso dire che la velocità della luce ha lo stesso valore per tutti gli osservatori, o che la velocità di K vista da K' è $-\vec{v}$ (6).

L'uso di "orologi atomici" al quale si è accennato a pag. 13 va perciò limitato *in assensa di altre considerazioni*, ad un unico riferimento inerziale. Le considerazioni presenti indicano infatti che, per gli osservatori inerziali in effettivo moto relativo, le unità di misura "universali" di tempi e di lunghezze, desunte dalle frequenze e dalle lunghezze d'onda delle radiazioni atomiche possono essere accettare come universali soltanto se (a differenza di quanto si fa di solito) la loro universalità viene *postulata*.

Queste semplici considerazioni sono sufficienti per far capire come, pregiudiziale per il confronto fra le teorie fisiche costruite da K e K', sia lo stabilire una relazione, eventualmente puramente convenzionale, fra le misure di lunghezze e di tempi nei due riferimenti.

E' ovvio che per stabilire una relazione fra le misure è sufficiente stabilire una relazione fra le unità di misura.

Per concludere questo numero è conveniente introdurre ancora una definizione.

Per misurare un segmento, un osservatore determina le posizioni *simultanee* degli estremi.

---

(6) Naturalmente nessuno vieta ai due osservatori di scegliere unità di misura tali che la velocità della luce sia numericamente la stessa, ma in mancanza di un confronto fra le unità di misura delle lunghezze e dei tempi la coincidenza dei valori numerici non ha alcun valore in relazione al confronto delle misure.

Nel piano xt, scelto un istante t, la lunghezza del segmento coincide con la differenza fra le ascisse degli estremi (figura 3).

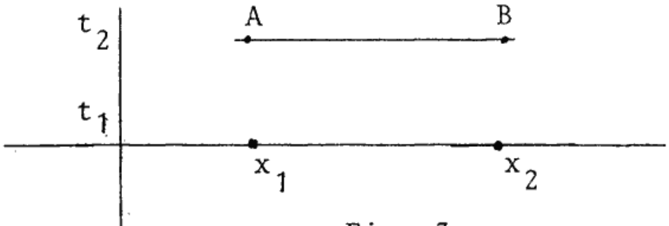


Fig. 3

La misura di un intervallo temporale è la differenza fra le ascisse temporali di due eventi che avvengono *nello stesso punto* dello spazio. Un intervallo temporale fra due eventi che avvengono nello stesso punto viene detto *intervallo di tempo proprio o di riposo.*

Così l'intervallo temporale che intercorre fra la sovrapposizione di A' e A e di B' e A è un intervallo di tempo proprio per l'osservatore K (entrambi gli eventi avvengono nel punto A e K [7]. Analogamente l'intervallo temporaleche intercorre fra la sovrapposizione di A' ed A e di A' e B, è proprio in K'.

Conviene usare la stessa terminologia anche per i segmenti. La lunghezza propria o di riposo (o di quiete) di un segmento è la lunghezza vista dall'osservatore per il quale il segmento è in quiete.

8. UNITA' DI MISURA DELLE LUNGHEZZE.

Siano ancora K e K' due riferimenti inerziali e si scelgano, come nei numeri precedenti,[7] AB $\in$ K, A'B' $\in$ K' con vers AB = - vers A'B' (fig.2).

<u>Definizione</u>. I segmenti AB$\in$K e A'B'$\in$K' hanno lunghezze di riposo uguali se (indicando con $AB_{|K}$ la misura di AB fatta dall'osservatore K ecc.) risulta

$$\frac{AB_{|K}}{A'B'_{|K}} = \frac{A'B'_{|K'}}{AB_{|K'}}$$

(7) Nel seguito per indicare che un punto A, un segmento AB,ecc. sono in quiete rispetto a un riferimento K, si useranno talora le notazioni: A$\in$K, AB$\in$K ecc. .

In altri termini i due segmenti hanno la stessa lunghezza di riposo se il rapporto fra la misura del segmento visto in quiete e la misura del segmento visto in moto, è la stessa per entrambi gli osservatori.

E' evidente che in questa definizione i due riferimenti sono trattati in modo simmetrico.

L'esistenza di segmenti aventi uguali lunghezze di riposo è basata su *due sole premesse*.

1) La stessa relazione di uguaglianza o di disuguaglianza intercorre per tutti gli osservatori fra due segmenti in quiete *nello stesso riferimento*.

Per es. se $A'B' \in K'$, $C'D' \in K'$ e $\frac{A'B'_{|K'}}{C'D'_{|K'}} \gtreqless 1$, è anche rispettiv.

$$\frac{A'B'_{|K}}{C'D'_{|K}} \gtreqless 1 \ .$$

Questa proprietà è conseguenza dell'omogeneità spazio-temporale dei riferimenti inerziali.

2) In tutti i riferimenti inerziali si accetta il postulato (di Dedekind) della continuità della retta.

Per riconoscere che esistono segmenti aventi lunghezze di riposo uguali, si considerino i due segmenti $AB \in K$, $A'B' \in K'$ tali che:

$$\frac{A'B'_{|K}}{A\,B_{|K}} = 1 \ .$$

Come si è visto al n.6 si ha allora:

$$\frac{A\,B_{|K'}}{A'B'_{|K'}} < 1 \ .$$

Lasciando AB fisso si considerino segmenti A'B' di lunghezza decrescente (per entrambi gli osservatori: premessa 1)). La frazione:

$$\frac{A'B'_{|K}}{A\ B_{|K}}$$

decresce allora da 1 verso 0, mentre la frazione:

$$\frac{A\ B_{|K'}}{A'B'_{|K'}}$$

cresce verso 1. In base alla premessa 2) esiste un segmento A'B' tale che:

$$\frac{A'B'|K}{A\ B|K} = \frac{A\ B|K'}{A'\ B'|K'}$$

Naturalmente questo risultato è indipendente dalle unità di misura usate dai due osservatori.

Il procedimento illustrato mostra pure che ogni segmento AB $\in$ K ammette un segmento A'B' $\in$ K' avente la stessa lunghezza di riposo e viceversa. Si torni al caso in cui AB e A'B' abbiano la stessa lunghezza per l'osservatore K.

(3) $$\frac{A'B'|K}{A\ B|K} = 1$$

Risulta allora:

(4) $$\frac{A'\ B'|K'}{A\ B|K'} = \gamma^2 > 1$$

La quantità γ non dipende né dalla direzione del moto relativo di K e K' (per l'isotropia degli spazi inerziali), né dalla posizione di AB, A'B' nei rispettivi spazi (per l'omogeneità e l'isotropia degli spazi inerziali), né dai tempi (in K e K') in cui i segmenti transitano uno su l'altro (per l'omogenità dei tempi dei riferimenti iner ziali). Si assumerà che γ sia funzione solo del modulo della velocità $\vec{v}$.

Se l'osservatore K vede invece i due segmenti disuguali:

$$\frac{A'B'|_K}{A\,B|_K} = \alpha \neq 1 \tag{5}$$

l'osservatore K' vede i due segmenti nel rapporto:

$$\frac{A'\ B'|_{K'}}{A\ B|_{K'}} = \alpha\gamma^2 \ . \tag{6}$$

Per es. se $\alpha = 2$, basta prendere i due segmenti AM e MB, dove M è il punto di mezzo del segmento AB e applicare le relazioni (3),(4) ai segmenti AM,A'B' e MB, A'B'.

Si supponga ora che AB e A'B' abbiano lunghezze di riposo uguali. Allora essi certamente non sono uguali né per l'osservatore K (nel qual caso sarebbe vera la(4) e quindi non potrebbe essere vera la (2) né per l'osservatore K' (per motivo analogo).

Il valore di α per segmenti aventi la stessa lunghezza di riposo si desume dalle (2),(5),(6):

$$\alpha = \frac{1}{\alpha\gamma^2}$$

cioé

$$\alpha = \frac{1}{\gamma}$$

Le (5) e (6) si scrivono allora:

$$AB|_K = \gamma\, A'B'|_K$$

$$A'B'|_{K'} = \gamma\, AB|_{K'}$$

Poiché $\gamma > 1$, ognuno dei due osservatori vede il segmento in moto più corto del segmento in quiete di un fattore γ .

Più esplicitamente, per ognuno dei due osservatori, di due segmenti aventi lunghezze di riposo uguali, quello in moto è più corto di un fattore γ .

Va notata la perfetta simmetria con la quale sono trattati K e K'. La convenzione adottata permette di pervenire ad un confronto fra le misure di uno stesso segmento effettuate dai due osservatori. Infatti se AB e A'B' sono due segmenti aventi lunghezze di riposo uguali e se K e K' li adottano come rispettive unità di misura delle lunghezze i due osservatori servendosi del risultato precedente, hanno a disposizione una effettiva convenzione per il confronto quantitativo delle medesime (il valore numerico di γ sarà determinato al n.10).

Una volta stabilita la relazione fra le unità di misura, la stessa relazione sussiste fra le misure di uno stesso segmento effettuate dai due osservatori. Così ogni segmento appartenente a K avrà in K' lunghezza γ volte più piccola di quella vista da K e viceversa.

A titolo di esempio si consideri ancora il caso (3). Per K i due segmenti A'B' e AB sono uguali. Per K', i segmenti A'B' e AB sono rispettivamente γ volte più lungo e γ volte più corto e quindi è chiaro che il rapporto delle loro misure è γ^2.

Infine è opportuno mettere in evidenza che dire che due segmenti hanno lunghezze di riposo uguali equivale a dire che sussiste la relazione:

$$AB_{|K} = A'B'_{|K'} \quad (7)$$

In particolare se questi segmenti sono le rispettive unità di misura di K e K', ognuno di essi ha lunghezza unitaria nel proprio riferimento di quiete.

9. UNITA' DI MISURA DEGLI INTERVALLI TEMPORALI.

Si considerino i soliti segmenti $AB \in K$ e $A'B' \in K'$.
Il tempo di scorrimento di A' su AB è dato

nel riferimento K da: $t(E_1)\ t(E_3)$

nel riferimento K' da: $t'(E_1)\ t'(E_3)$.

Il tempo di scorrimento di A su A'B' è dato

nel riferimento K da: $t(E_1)\, t(E_2)$

nel riferimento K' da: $t'(E_1)\ t'(E_2)$.

Va notato che gli intervalli temporali $t(E_1)\ t(E_2)$ e $t'(E_1)\ t'(E_3)$ sono intervalli di tempo proprio rispettivamente in K e in K' (gli eventi E_1 ed E_2 avvengono entrambi in A e K, gli eventi E_1 ed E_3 avvengono entrambi in A' e K'). Come nel caso delle lunghezze si sono confrontati due segmenti spaziali in quiete, uno rispetto a K l'altro rispetto a K', così ora si confrontano "segmenti" temporali propri uno in K l'altro in K'.

Naturalmente se risulta ad es. $AB_{|K} = A'B'_{|K}$ si ha:

$$\frac{t(E_1)\ t(E_3)}{t(E_1)\ t(E_2)} = 1, \tag{8}$$

poiché il tempo impiegato da A' per scorrere su AB, per l'osservatore K è uguale al tempo impiegato da A per scorrere su A'B' (in altri termini

$$t(E_2) = t(E_3)).$$

In questo caso è per la (4): $A'B'_{|K'} > AB_{|K'}$ e quindi nel riferimento K' il tempo impiegato da A per scorrere su A'B' è maggiore del tempo impiegato da A' per scorrere su AB:

$$(9) \qquad \frac{t'(E_1)t'(E_2)}{t'(E_1)t'(E_3)} < 1$$

Si considerino ora tre eventi E_1, E_2, E_3 tali che il segmento temporale fra E_1 ed E_2 sia segmento proprio in K e quello fra E_1 e E_3 sia proprio K'.

In analogia a quanto si è fatto per i segmenti spaziali si dirà che hanno la stessa lunghezza propria i due segmenti temporali fra gli eventi E_1,E_2 ed E_1, E_3 se:

$$(10) \qquad \frac{t(E_1)\ t(E_3)}{t(E_1)\ t(E_2)} = \frac{t'(E_1)\ t'(E_2)}{t'(E_1)\ t'(E_3)}$$

cioé se ognuno dei due osservatori trova lo stesso rapporto fra il segmento temporale non proprio e il segmento temporale proprio.

E' evidente che anche in questa definizione i due riferimenti entrano simmetricamente.

E' ovvio che è sempre possibile scegliere due segmenti spaziali, AB $\in$ K, A'B' $\in$ K' tali che gli eventi E_1,E_2,E_3 consistano nelle sovrapposizioni di A e A', A e B', A' e B rispettivamente.

Allora la dimostrazione dell'esistenza di segmenti temporali aventi lunghezze proprie uguali è del tutto analoga a quella fatta per provare l'esistenza di segmenti spaziali aventi lunghezze di riposo uguali.

Si parta dal caso (8)-(9). Assunto A'B' di lunghezza fissa si prendano segmenti AB via via decrescenti: allora il rapporto (8) decresce da 1 verso 0, mentre il rapporto (9) cresce verso 1.

Per continuità si troveranno quindi istanti $t(E_2)$,$t(E_3)$,$t(E_2)$, $t'(E_3)$ per i quali sussiste la (10).

Come nel caso dei segmenti spaziali, ogni segmento temporale in K ammette un segmento temporale in K' avente la stessa lunghezza propria e viceversa.

Ancora in analogia col caso dei segmenti spaziali, se in K e in K' si assumono come rispettive unità di misura dei tempi due segmenti temporali propri aventi la stessa lunghezza propria, è possibile poi effettuare un confronto fra le misure di segmenti temporali che connettano coppie di eventi arbitrari.

Naturalmente fra le misure di due segmenti temporali uno appartenente a K l'altro appartenente a K' aventi la stessa lunghezza propria, sussiste la relazione (cfr. (7)):

$$t(E_1)\ t(E_2) = t'(E_1)\ t'(E_3) \ . \tag{11}$$

Per calcolare la relazione fra le misure degli intervalli di tempo proprio e non proprio, si osservi che la velocità v di K' rispetto a K è espressa, tanto dal rapporto:

$$\frac{AB|K}{t(E_1)\ t(E_3)} = v$$

(legge oraria di A' in K).

quanto dal rapporto:

$$\frac{A'B'|K}{t(E_1)\ t(E_2)} = v$$

(velocità di passaggio di A su A'B', sempre per l'osservatore K).

Analogamente, indicando con v' il modulo della velocità di K vista da K', si ha:

$$\frac{A'B'|K'}{t'(E_1)\ t'(E_2)} = v'$$

$$\frac{AB|K'}{t'(E_1)\ t'(E_3)} = v'$$

risulta perciò:

$$\frac{A\ B\ |K}{A'B'|K} = \frac{t(E_1)\ t(E_3)}{t(E_1)\ t(E_2)}$$

e

$$\frac{A'B'|K'}{AB|K'} = \frac{t'(E_1)\ t'(E_2)}{t'(E_1)\ t'(E_3)} .$$

Se i segmenti AB e A'B' hanno la stessa lunghezza di quiete, risulta:

$$\frac{AB|K}{A'B'|K} = \frac{A'B'|K'}{A\ B|K'} = \gamma$$

e quindi:

$$\frac{t(E_1)\ t(E_3)}{t(E_1)\ t(E_2)} = \frac{t'(E_1)\ t'(E_2)}{t'(E_1)\ t'(E_3)} = \gamma .$$

Si trova allora che due segmenti temporali con la stessa lunghezza propria sono i tempi di scorrimento relativi a segmenti spaziali aventi la stessa lunghezza propria.

Le precedenti relazioni si possono scrivere

$$t(E_1)\ t(E_3) = \gamma t(E_1)\ t(E_2)$$

$$t'(E_1)t'(E_2) = \gamma t'(E_1)t'(E_3).$$

In altri termini: per ognuno dei due osservatori, di due segmenti temporali aventi lunghezze proprie uguali, il segmento proprio è minore dell'altro di un fattore $1/\gamma$.

Se l'osservatore K assume come unità di misura dei tempi il segmento temporale (proprio) $t(E_1)\ t(E_2)$ e K' assume come unità di misura dei tempi il segmento temporale (proprio) $t'(E_1)\ t'(E_3)$, ogni intervallo temporale fra eventi che avvengono nello stesso luogo per l'osservatore K, apparirà dilatato di un fattore γ per l'osservatore K' e viceversa.

Come conseguenza dei risultati ottenuti si trova che $v = v'$. Infatti dalle relazioni:

$$v = \frac{AB|K}{t(E_1)\ t(E_3)} \ ; \ v' = \frac{A'B'|K'}{t'(E_1)\ t'(E_2)}$$

se A B e A'B' hanno la stessa lunghezza di quiete, poiché i segmenti temporali $t(E_1)\ t(E_3)$ e $t'(E_1)\ t'(E_2)$ hanno pure, come si è visto, la stessa lunghezza di quiete, in virtù delle (7) e (11) si ha appunto:

(12) $$v = v'.$$

Nel numero successivo si dimostrerà che, come consequenza della (11) e del postulato 2), la velocità della luce ha lo stesso valore in tutti i riferimenti inerziali. Si può dire fin d'ora che questo fatto è evidente per la (11) e per motivi di simmetria, stante il significato fisico della velocità della luce.

10. INDIPENDENZA DELLA VELOCITA' DELLA LUCE DAL RIFERIMENTO. CALCOLO DI γ.

Si consideri il segmento A'B' c K'. In A' sia collocata una sorgente luminosa; in B' sia collocato uno specchio che possa riflettere la luce verso A'.

Sia $\ell' = A'B'|_{K'}$. Il tempo $\Delta t'$ impiegato da un raggio luminoso per effetturare il percorso A'B'A' (nell'ipotesi che la riflessione sia istantanea) è:

$$\Delta t' = \frac{2\ell'}{c'}$$

I due eventi, di partenza e di arrivo del raggio, per l'osservatore K' avvengono nello stesso punto; in altri termini $\Delta t'$ è un intervallo di tempo proprio in K'. In K il segmento temporale fra i due eventi è:

$$\Delta t = \gamma \Delta t'$$

ossia

$$\Delta t = \frac{2\gamma \ell'}{c'}$$

Ma A'B' e in quiete in K' e quindi risulta:

$$\ell' = A'B'|K' = \gamma A'B'|K = \gamma \ell$$

$(\ell = A'B'|K)$.

e, in definitiva:

$$\Delta t = \gamma^2 \frac{2\ell}{c'} \quad . \tag{13}$$

D'altra parte il tempo Δt intercorso per l'osservatore K, fra la partenza e il ritorno del raggio si può calcolare in modo analogo a quanto si è fatto a pagg. 17-18.

Per andare da A' a B' il raggio deve percorrere il tratto ℓ, aumentato del tratto $v\Delta t_{B'}$, di cui si è spostato il punto B' rispetto a K. Si ha quindi:

$$c\, \Delta\, t_{B'} = \ell + v\Delta t_{B'}$$

ossia:

$$\Delta t_{B'} = \frac{\ell}{c-v} \quad .$$

Nel ritornare in A' il raggio percorre il tratto ℓ diminuito del tratto $v\Delta t_{A'}$ di cui si è spostato A' fra l'istante in cui il raggio ha lasciato B' e l'istante in cui esso ha raggiunto A'. Si ha così:

$$c\Delta t_{A'} = \ell - v\, \Delta\, t_{A'}$$

ossia:

$$\Delta t_{A'} = \frac{\ell}{c+v}$$

Infine

$$\Delta t = \frac{\ell}{c+v} + \frac{\ell}{c-v} = \frac{2\ell c}{c^2-v^2}$$

Confrontando con la (11) si ha:

$$\gamma^2 = \frac{c'c}{c^2-v^2} . \tag{14}$$

Si scambino ora i riferimenti: le sorgenti luminose e lo specchio siano collocati risp. in A e in B. Un calcolo analogo al precedente dà:

$$\gamma^2 = \frac{c'c}{c'^2-v'^2} \tag{15}$$

dove γ è la stessa che compare in (14) in forza delle definizioni date ai nn. 8 e 9.

Confrontando (14) e (15) si ottiene:

$$c^2 - v^2 = c'^2 - v'^2$$

e in virtù della (12):

$$c' = c. \tag{16}$$

cioé come conseguenza delle definizioni date ai nn. 8 e 9 la velocità della luce ha lo stesso valore in tutti i riferimenti inerziali.

Dalla (14) segue allora:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} . \tag{17}$$

11. PRIME FORMULE DI TRASFORMAZIONE.

Sulla retta del riferimento K alla quale appartengono i punti A e B si stabilisca un sistema di ascisse con origine in un punto 0, orientamento concorde con $\vec{v}$ (la velocità di K' rispetto a K) e unità di misura arbitraria.

Sulla retta di riferimento K' alla quale appartengono i punti A' e B' si stabilisca un sistema di ascisse con origine in un punto 0' orientamento concorde con $\vec{v}$ e unità di misura avente lunghezza di quiete uguale alla lunghezza di quiete della unità di misura scelta in K.

Tanto in K quanto in K' si assuma come origine dei tempi l'istante dell'evento di sovrapposizione di 0 e 0'.

Si ha in K per un punto P:

$$x = |0\,0'|_{/K} + |0'P|_{/K} = vt + \frac{x'}{\gamma}$$

dato che 0 0', con le scelte fatte, ha lunghezza v t e il segmento 0'P, che in K' ha lunghezza x', in K ha lunghezza x'/γ. Si ha così:

$$x' = \gamma(x-vt) \ .$$

Naturalmente per simmetria si ha:

$$x = \gamma(x'+vt').$$

Sostituendo qui l'espressione di x' si ha:

$$x = \gamma|\gamma(x-vt)+vt'|$$

ossia:

$$x = \gamma^2 x - \gamma^2 vt + \gamma vt' \ .$$

Da questa:

$$t' = \frac{x(1-\gamma^2)+\gamma^2 vt}{\gamma v} = \gamma t+\gamma \frac{x}{v} \quad \frac{1-\gamma^2}{\gamma^2} =$$

$$= \gamma t - \frac{\gamma x}{v}\left(\frac{1}{\gamma^2} - 1\right) = \gamma t - \frac{\gamma x}{v}\left(1 - \frac{v^2}{c^2} - 1\right) =$$

$$= \gamma t - \gamma x \frac{v}{c^2} \; .$$

Si hanno così le trasformazioni:

$$(18) \qquad \begin{cases} x' = \gamma(x' - vt) \\ \\ t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}\, x\right) \end{cases}$$

che sono dette trasformazioni di Lorentz. Per ottenere le trasformazioni inverse senza risolvere le precedenti rispetto a x e a t, basta scambiare le quantità accentate con quelle non accentate e mutare v in -v:

$$(18') \qquad \begin{cases} x = \gamma(x' + vt') \\ \\ t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}\, x'\right) \; . \end{cases}$$

Le trasformazioni di Lorentz si riducono alle trasformazioni di Galileo per $\frac{v}{c} << 1$ cioé per $\gamma \sim 1$: di conseguenza le trasformazioni di Galileo sono approssimazioni delle trasformazioni di Lorentz.

Le formule esprimenti le trasformazioni di Lorentz contengono naturalmente tutti i risultati che sono stati ricavati dall'esempio del N. 6.

E' utile ricavare esplicitamente le conseguenze dei postulati di Einstein anche per mettere in evidenza che le formule precedenti vanno usate con attenzione se si vogliono evitare risultati assurdi.

Va tenuto presente che le trasformazioni di Lorentz stabiliscono *relazioni fra le coordinate spazio - temporali che uno stesso even-*

to possiede rispetto ai due riferimenti K e K'.

Si abbia per es. un regolo in quiete in K' e siano x'_1 e x'_2 le coordinate degli estremi del regolo in tale riferimento: la lunghezza del regolo per l'osservatore K' è quindi $x'_2 - x'_1$. L'osservatore K per ottenere la lunghezza del regolo deve determinare le ascisse degli estremi in *uno stesso istante* del suo riferimento.

Dalle (18) per t qualunque si ha:

$$x'_1 = \gamma(x_1 - vt); \qquad x'_2 = \gamma(x_2 - vt)$$

e quindi per differenza:

$$x_2 - x_1 = \frac{1}{\gamma}(x'_2 - x'_1)$$

cioé si ritrova che la lunghezza propria del regolo è maggiore di quella non propria.

Va notato che la relazione precedente non può essere dedotta direttamente dalla prima delle (18') perché le formule:

$$x_2 = \gamma(x'_2 - vt'); \qquad x_1 = \gamma(x'_1 - vt')$$

forniscono le relazioni fra le coordinate spaziali di due eventi simultanei in K'; questi eventi, non essendo simultanei in K non possono essere utilizzati per il calcolo della lunghezza del regolo in questo riferimento. L'intervallo temporale in K fra i due eventi si ricava dalle (18') e vale:

$$t_2 - t_1 = \frac{v}{c^2}(x'_2 - x'_1) .$$

In modo analogo si può calcolare la relazione fra un intervallo di tempo proprio ad un intervallo di tempo non proprio.

Se $t'_2 - t'_1$ è un intervallo di tempo proprio fra due eventi in

K', i due eventi, in tale riferimento, avvengono nello stesso punto x'_0 e quindi si ha:

$$t_2 = \gamma(t'_2 - \frac{v}{c^2} x'_0), \quad t_1 = \gamma(t'_1 - \frac{v}{c^2} x'_0)$$

da cui:

$$t_2 - t_1 = \gamma(t'_2 - t'_1)$$

e si ritrova che l'intervallo di tempo proprio è minore dell'intervallo di tempo non proprio fra i due stessi eventi.

In K la distanza fra i due eventi è data da:

$$x_2 - x_1 = \gamma v(t'_2 - t'_1) \ .$$

Si suggerisce di interpretare con un esempio le relazioni trovate.

Come altra conseguenza delle (18), (18') conviene mettere in evidenza che gli orologi di ognuno dei due riferimenti, pur essendo sincronizzati nella maniera indicata al n. 4 non appaiono sincronizzati nell'altro riferimento. Infatti allo stesso valore di t corrispondono in K' valori diversi di t' in punti diversi dello spazio . Così se (x_1,t), (x_2,t) sono le coordinate di due eventi simultanei in K, si ha in K':

$$t'_2 - t'_1 = - \frac{v}{c^2}(x_2-x_1)$$

(si vede in particolare che i due eventi sono simultanei in K' se e solo se in K, oltre ad essere simultanei, avvengono anche nello stesso luogo. In questo caso anzi si vede che gli eventi, coincidenti in K, sono coincidenti anche in K', in accordo con quanto si è notato al n. 5.)

Allo stesso risultato si può pervenire in maniera meno formale. In corrispondenza all'evento di sovrapposizione delle origini 0,0' dei riferimenti K e K' i due osservatori azzerino i rispettivi orologi posti in tali punti. In tale istante t = t' = 0 venga inviato un segnale luminoso. Dopo un intervallo di tempo $t_2 - 0 = t_2$ tale segnale avrà raggiunto in K un punto P_2 di ascissa $x_2 = ct_2$. Per il secondo postulato di Einstein l'evento di arrivo del raggio luminoso in P_2 ha in K' coordinate x'_2, t'_2 legate dalla relazione $x'_2 = ct'_2$. In virtù delle (14') si ha:

$$t'_2 = \gamma(t_2 - \frac{v}{c^2} x_2) = \gamma t_2 (1 - \frac{v}{c}).$$

Nell'intervallo di tempo $t_2 - 0 = t_2$ l'origine 0' si sarà spostata rispetto a K, al punto P_1 di ascissa $x_1 = vt_2$. Ma in K' l'intervallo fra i due eventi

$E_{00'}$ sovrapposizione di 0 e 0'

$E_{0'P_1}$ sovrapposizione di P_1 e 0'

è un intervallo di tempo proprio e quindi:

$$t'_1 = \frac{t_2}{\gamma}$$

cioé nel riferimento K' gli istanti corrispondenti a t_2 nei punti P_1 e P_2 sono diversi.

12. RELAZIONI FRA LE MISURE DI SEGMENTI IN MOTO RELATIVO, ORTOGONALI ALLA VELOCITA' RELATIVA. TRASFORMAZIONI DI LORENTZ.

Siano AB, A'B' due segmenti ortogonali alla velocità relativa $\vec{v}$ di K' rispetto a K. Sia inoltre vers AB = vers A'B'. E' facile riconoscere che, se i due segmenti AB, A'B' hanno la stessa lunghezza di riposo, essi sono (esattamente) sovrapponibili per entrambi gli osservatori.

Si adottino in K e K' terne di assi con gli assi x e x' paralleli e concordi a $\vec{v}$, e scorrenti l'uno su l'altro e gli assi y e z rispettivamente paralleli e concordi con gli assi y' e z'. Si dispongano i segmenti AB e A'B' lungo gli assi y e y' risp. e i punti A,A' nelle rispettive origini. In un istante generico quindi la situazione sarà quella indicata in fig. 4.

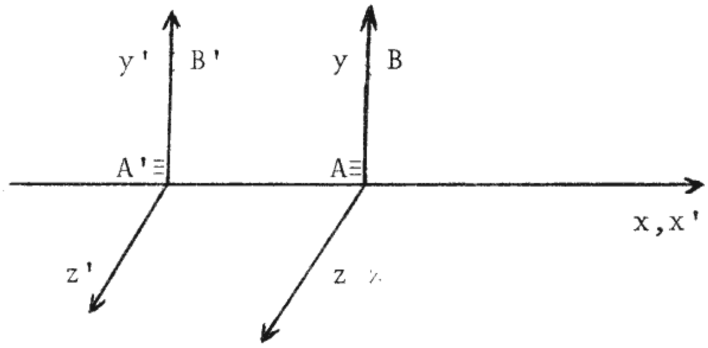


fig. 4

Si consideri l'evento di sovrapposizione delle origini 0 e 0' (ossia A e A').

Questo evento è simultaneo in entrambi i riferimenti (per motivi di simmetria) alla sovrapposizione degli interi assi y e y'. Ciò si può esprimere anche dicendo che i quattro punti ABA'B' appartengono agli assi y e y', simultaneamente tanto in K quanto in K'. Allora la simmetria fra i due riferimenti impone, come conseguenza della uguaglianza delle lunghezze di riposo dei due segmenti, che per i due osservatori, all'istante in cui 0 e 0' coincidono, coincidano non solo A e A' ma anche B e B'. Infatti se all'istante di allineamento in K dei quattro punti ABA'B' fosse ad es. A' interno a AB, la stessa configurazione dei quattro punti si avrebbe in K' all'istante di allineamento in tale riferimento. Di conseguenza sarebbe distrutta la simmetria fra i due riferimenti, dato che i segmenti AB e A'B' hanno la stessa lunghezza di riposo.

In conclusione segmenti aventi la stessa lunghezza propria e ortogonali alla velocità relativa di K e K' hanno la stessa lunghezza in entrambi i riferimenti. Dette quindi y e y' le coordinate di B e B' risp. si ha:

$$y = y' .$$

In modo analogo, se i segmenti sono disposti lungo gli assi z e z' si ha

$$z = z' .$$

Ricordando le (18), le trasformazioni di Lorentz relative a tutte e quattro le coordinate spazio-temporali sono:

$$(19) \qquad \begin{cases} x' = \gamma(x-vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x) . \end{cases}$$

13. NON OSSERVABILITA' DELLA CONTRAZIONE DI LORENTZ CON MEZZI OTTICI.

Nel concludere questa breve trattazione delle trasformazioni di Lorentz non si può fare a meno di accennare, sia pure fugacemente, all'aspetto sperimentale: è osservabile la contrazione di Lorentz.

A prima vista sembrerebbe non esservi alcuna difficoltà e si potrebbe pensare che, pur di prendere velocità relative sufficientemente elevate e cioé valori di γ sufficientemente elevati, si potesse osservare in modo diretto la contrazione delle lunghezze. Per più di cinquant'anni si è infatti ritenuto così ed è frequente nella letteratura l'esempio della sfera in moto, la quale è vista come un ellissoide, perché il diametro parallelo alla velocità appare contratto, mentre i diametri perpendicolari alla velocità appaiono nella loro lunghezza di riposo.

In realtà la contrazione di Lorentz non è in generale osservabile con mezzi ottici: vi sono, è vero, casi in cui tale contrazione è osservabile, ma lo sperimentatore non può essere sicuro di osservarla se non è preliminarmente in possesso di certe informazioni.

Un attimo di riflessione mostra che effettivamente la contrazione di Lorentz, almeno con esperienze di ottica, non può essere in generale osservata [4]. Naturalmente la determinazione quantitativa di "quello che si osserva" è tutt'altra cosa, e in effetti richiede calcoli complicati.

Si consideri un oggetto in moto traslatorio rettilineo uniforme rispetto al solito riferimento inerziale K e si supponga che un osservatore in K voglia fissarne la forma ad un certo istante. Invece di limitarsi a cogliere l'immagine dell'oggetto sulla retina del proprio occhio, l'osservatore può fissare l'oggetto fotografandolo. Ora è chiaro che saranno fissati nella fotografia quei raggi luminosi provenienti dall'oggetto i quali raggiungono la pellicola tutti nell'istante in cui la fotografia viene scattata. Ma questi raggi non hanno lasciato i vari punti dell'oggetto tutti nello stesso istante perché l'oggetto è esteso e in un generico istante i suoi punti hanno distanze diverse dalla pellicola (supposta sufficientemente "piccola"). Perciò sulla pellicola vengono fissati i raggi provenienti da posizioni non simultanee dei vari punti dell'oggetto fotografato. E' chiaro quindi che se la velocità dell'oggetto è confrontabile con la velocità della luce, si avrà dell'oggetto un'immagine alterata. I calcoli dimostrano (e ci si deve limitare a riferirlo) che all'osservatore K gli oggetti in moto appaiono in generale rotati: di conseguenza una sfera continua ad apparire una sfera. Se si ha un cubo con uno degli spigoli, AB parallelo alla velocità relativa, la fotografia riporterà su un unico segmento $\bar{D}\,\bar{B}$, l'immagine degli spigoli D'A, AB (fig. 5).

E' per questo che l'osservatore K, per essere sicuro di osservare la contrazione di Lorentz senza alterazioni causate da apparenti rotazioni, deve limitarsi a fotografare segmenti

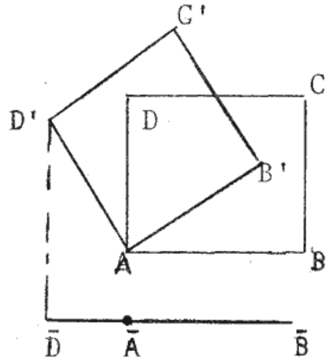


fig. 5

paralleli alla velocità relativa, ma deve anche sapere *in precedenza* che gli oggetti che egli fotografa sono effettivamente segmenti.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. ANDREASSI: "*Prime idee di dinamica classica*" Milella Lecce 1983.

[2] A. STRATTON: "*Teoria dell'elettromagnetismo*" Einaudi 1952.

[3] V. GINZBURG: "*Physique theorique et astrophysique*" Ed.Mir. 1978.

[4] J. TERRELL: "*Invisibility of the Lorentz contraction* Phys." Rev. Vol. 116 N° 4 pp. 1041-1045 (1959).