VII

<u>VARIETÀ</u>

**41.-** DEFINIZIONE (Calcolo equazionale)

Sia $\mathcal{E} \subseteq \Sigma^V\text{-eq}$ diciamo <u>chiusura deduttiva</u> (equazionale) di $\mathcal{E}$ il seguente insieme

$$\mathcal{E}^* \subseteq \Sigma^V\text{-eq}$$

definito induttivamente

o) $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}^*$, $v=v \in \mathcal{E}^*$ $\forall\ v \in V$

1) $t_1 = t_2 \in \mathcal{E}^* \implies t_2 = t_1 \in \mathcal{E}^*$

2) $t_1 = t_2$ , $t_2 = t_3 \in \mathcal{E}^* \implies t_1 = t_3 \in \mathcal{E}^*$

3) $$\left\{ \begin{array}{c} (t_1 \ldots t_k), (t'_1 \ldots t'_k) \in (T_\Sigma(V))_u \ , \ \sigma \in \Sigma_{u,s}, \ t_1 = t'_1 \ldots t_k = t'_k \in \mathcal{E} \\ \Downarrow \\ \sigma(t_1 \ldots t_k) = \sigma(t'_1 \ldots t'_k) \in \mathcal{E}^* \end{array} \right.$$

4) $$\left\{ \begin{array}{c} \tau \in \mathrm{Ass}\ (V, T_\Sigma(V)) \ , \ t_1 = t_2 \in \mathcal{E}^* \\ \\ [\![ t_1 ]\!]_\tau = [\![ t_2 ]\!]_\tau \in \mathcal{E}^* \end{array} \right.$$

La definizione precedente può essere data in modo equivalente ponendo una relazione $\vdash$ di deducibilità tale che

$$e \in \mathcal{E}^* \iff \mathcal{E} \vdash e$$

la cui descrizione in forma $\dfrac{\text{premesse}}{\text{conclusioni}}$ è la seguente

0) $\mathcal{E} \vdash e \quad \forall e \in \mathcal{E}$. $\forall e \in \mathcal{E},\ \mathcal{E} \vdash v=v \quad \forall v \in V$

1) $$\frac{\mathcal{E} \vdash t_1 = t_2}{\mathcal{E} \vdash t_2 = t_1}$$ (simmetria)

2) $$\frac{\mathcal{E} \vdash t_1 = t_2 \qquad \mathcal{E} \vdash t_2 = t_3}{\mathcal{E} \vdash t_1 = t_3}$$ (transitività)

3) $$\frac{\mathcal{E} \vdash t = t'}{\mathcal{E} \vdash \sigma t = \sigma t'} \qquad \forall t \in (T_\Sigma)_u\ ,\ \sigma \in \Sigma_{u,s}$$ (congruità)

4) $$\frac{\mathcal{E} \vdash t = t'}{\mathcal{E} \vdash [\![t]\!]_\tau = [\![t']\!]_\tau} \qquad \forall \tau \in \mathrm{Ass}\ (V, T_\Sigma(V)\ )$$ (sostitutività)

42.- TEOREMA

$\mathcal{E}^*$ è la minima congruenza che include $\mathcal{E}$ e chiusa per endomorfismi di $\underline{\underline{T}}_\Sigma(V)$. (un endomorfismo di $\underline{\underline{A}} \in \Sigma$-alg è un morfismo di $\underline{\underline{A}}$ in $\underline{\underline{A}}$ e una congruenza $\theta$ è chiusa per endomorfismo $f$ se $x\ \theta\ y \Leftrightarrow fx\ \theta\ fy$ ) $(R \leq T \Leftrightarrow (xRy \Rightarrow xTy))$

Prova

Per definizione $\mathcal{E}^*$ è una congruenza (cfr. def. 41) ed è inoltre chiusa per endomorfismi di $\underline{\underline{T}}_\Sigma(V)$ per la regola 4) della def. 41 essendo un endomorfismo di $\underline{\underline{T}}_\Sigma(V)$ completa= mente individuato da un $\tau \in \mathrm{Ass}\ (V, T_\Sigma(V)\ )$ cfr. teor.33).

Inoltre ogni congruenza chiusa per endomorfismi deve verificare 0),1),2),3),4) della def. 41) quindi $\mathcal{E}^*$ è la minima tra tutte le congruenze siffatte.

43.- TEOREMA

Se $\underline{\underline{A}}$ è **minimale** allora $\underline{\underline{A}}$ è iniziale in $\Sigma$-alg( $\Sigma^V$-eq(A) )

(e quindi in ogni $\mathcal{C} \subseteq \Sigma$-alg( $\Sigma^V$-eq(A) )

<u>Prova</u>

Se $\underline{\underline{A}}$ è minimale $\underline{\underline{A}}$ è generata dalle costanti quindi (omettiamo gli indici)

$$*) \qquad A = \left\{ [\![t]\!]_{\rho_o} \mid t \in T_\Sigma \right\}$$

con $\rho_o$ prefissato , $\rho_o \in$ Ass(V,A)

Sia $\Psi_o$ prefissato , $\Psi_o \in$ Ass(V,B) con

$$\underline{\underline{B}} \in \Sigma\text{-alg}(\ \Sigma^V\text{-eq}(\underline{\underline{A}}))$$

e poniamo $\quad g(\ [\![t]\!]_{\rho_o}\ ) = [\![t]\!]_{\Psi_o} \quad \forall\ t \in T_\Sigma$

g verifica la condizione seguente $\forall\ t_1, t_2 \in T_\Sigma$

$$**) \quad [\![t_1]\!]_{\rho_o} = [\![t_2]\!]_{\rho_o} \Longrightarrow g(\ [\![t_1]\!]_{\rho_o}\ ) = g(\ [\![t_2]\!]_{\rho_o}\ )$$

ovvero $\quad [\![t_1]\!]_{\rho_o} = [\![t_2]\!]_{\rho_o} \Longrightarrow [\![t_1]\!]_{\Psi_o} = [\![t_2]\!]_{\Psi_o}$

Infatti poichè $t_1, t_2$ non hanno variabili

$$[\![t_1]\!]_{\rho_o} = [\![t_2]\!]_{\rho_o} \Rightarrow [\![t_1]\!]_{\rho} = [\![t_2]\!]_{\rho} \qquad \forall\ \rho \in \text{Ass}(V,A)$$

quindi $\quad \underline{\underline{A}} \models t_1 = t_2$

cioè essendo $\underline{\underline{B}} \in \Sigma$-alg( $\Sigma^V$-eq($\underline{\underline{A}}$) ) $\quad \underline{\underline{B}} \models t_1 = t_2$

quindi $\quad [\![t_1]\!]_{\Psi_o} = [\![t_2]\!]_{\Psi_o}$

vale in definitiva $**)$

Da $*$) e $**$) segue allora che $g$ è una funzione ben definita da $\underline{\underline{A}}$ in $\underline{\underline{B}}$. Si verifica facilmente che $g$ è un morfismo.

Inoltre $g$ è unico perchè se vi fossero due morfismi $g$, $g'$ da $\underline{\underline{A}}$ in $\underline{\underline{B}}$ essendo $\underline{\underline{A}}$ minimale $\underline{\underline{A}} \cong T_{\Sigma}/\theta$ per una $\theta$ opportuna allora $\lambda t.g([t]_{\theta})$ e $\lambda t.g'([t]_{\theta})$ sarebbero due morfismi da $\underline{\underline{T}}_{\Sigma}$ in $\underline{\underline{B}}$ contro l'inizialità di $\underline{\underline{T}}_{\Sigma}$ in $\Sigma$-alg.

44.- TEOREMA

Una varietà ammette sempre algebra iniziale (ed essa è anche minimale).

<u>Prova</u>

Siano $\mathcal{E}$ le equazioni che definiscono la data varietà e sia $\underline{\underline{I}} = \underline{\underline{T}}_{\Sigma} / \overline{\mathcal{E}^*}$ ove $\forall\, t_1, t_2 \in T_{\Sigma}$ si ponga

$$t_1 \overline{\mathcal{E}^*} t_2 \Leftrightarrow \mathcal{E} \vdash t_1 = t_2 \qquad \text{(cfr. def. 41)}$$

i) Mostriamo prima che $\underline{\underline{I}} \in \Sigma\text{-alg}(\mathcal{E})$, cioè

$$t_1 = t_2 \in \mathcal{E} \implies T_{\Sigma}/\overline{\mathcal{E}^*} \models t_1 = t_2$$

Infatti per definizione di $\overline{\mathcal{E}^*}$ si ha

$$[\![t_1]\!]_{\tau} = [\![t_2]\!]_{\tau} \in \mathcal{E}^* \qquad \forall\, \tau \in \mathrm{Ass}(V, T_{\Sigma})$$

cioè $$\left[\,[\![t_1]\!]_{\tau}\right]_{\overline{\mathcal{E}^*}} = \left[\,[\![t_2]\!]_{\tau}\right]_{\overline{\mathcal{E}^*}}$$

ma questo implica (per induzione sui termini)

$$[\![t_1]\!]_{\tau'} = [\![t_2]\!]_{\tau'} \qquad \forall\ \tau' \in Ass(V, T_{\Sigma}/_{\overline{\varepsilon^*}})$$

Ovvero $\qquad \underline{\underline{T}}_{\Sigma}/_{\overline{\varepsilon^*}} \models t_1 = t_2$

ii) Mostriamo ora che esiste un morfismo $g: \underline{\underline{I}} \to \underline{\underline{A}}$ $\forall$ A $\in \Sigma$-alg( $\varepsilon$ ) .

Poniamo $g\,[t]_{\varepsilon^*} = [\![t]\!]_{\rho_o}$ ove $\rho_o$ è un qualsiasi, ma fissato $\rho_o \in$ Ass(V,A), g è ben definita poichè

$$[t]_{\varepsilon} = [t']_{\varepsilon} \Rightarrow \varepsilon \vdash t = t' \Rightarrow \underline{\underline{A}} \models t = t' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [\![t]\!]_{\rho_o} = [\![t']\!]_{\rho_o} \qquad \text{(cfr. più avanti Lemma 46)}$$

E' semplice verificare che g è un morfismo infatti:

$$g\sigma^T = g[\sigma]_{\varepsilon^*} = [\![\sigma]\!]_{\rho_o} = \sigma^A$$

$$g(\sigma^T(t)) = g[\sigma\, t]_{\varepsilon^*} = [\![\sigma\, t]\!]_{\rho_o} = \sigma^A[\![t]\!]_{\rho_o} = \sigma^A(gt)$$

iii) Mostriamo infine che da $\underline{\underline{I}}$ vi è al più un unico morfismo in ogni altra algebra $\underline{\underline{A}}$ di $\Sigma$-alg( $\varepsilon$ )

Infatti $\underline{\underline{T}}_{\Sigma}$ è iniziale in $\Sigma$-alg, quindi data $\underline{\underline{A}} \in \Sigma$-alg( $\varepsilon$ ) esiste un unico morfismo f da $\underline{\underline{T}}_{\Sigma}$ in $\underline{\underline{A}}$ , allora non possono esistere due morfismi diversi h e h' da $\underline{\underline{I}}$ in $\underline{\underline{A}}$ poichè altrimenti vi sarebbero due diversi morfismi $h \circ \Pi$ e $h' \circ \Pi$ da $\underline{\underline{T}}_{\Sigma}$ in $\underline{\underline{A}}$ contro l'unicità di f .

Diamo ora un teorema che stabilisce la completezza del calcolo $\vdash$ . Premettiamo alcuni lemmi.

Siano : $\mathcal{E} \subseteq \Sigma^V\text{-eq}$ , $e \in \Sigma^V\text{-eq}$

45.- LEMMA

$$\underline{\underline{T}}_\Sigma(V)/_{\mathcal{E}^*} \models t_1 = t_2 \implies \mathcal{E} \vdash t_1 = t_2$$

<u>Prova</u>

$$\underline{\underline{T}}_\Sigma(V)/_{\mathcal{E}^*} \models t_1 = t_2$$

$$\Downarrow$$

$$[\![t_1]\!]_{\tau'} = [\![t_2]\!]_{\tau'} \quad \forall \ \tau' \in Ass(V, T_\Sigma(V)/_{\mathcal{E}^*})$$

$$\Downarrow$$

$$\left[[\![t_1]\!]_{\tau}\right]_{\mathcal{E}^*} = \left[[\![t_2]\!]_{\tau}\right]_{\mathcal{E}^*} \ \forall \ \tau \in Ass(V, T_\Sigma(V))$$

$$\Downarrow$$

$$\left[[\![t_1]\!]_j\right]_{\mathcal{E}} = \left[[\![t_2]\!]_j\right]_{\mathcal{E}^*} \text{ ove } jv = v \quad \forall \ v \in V$$

$$\Downarrow$$

$$[t_1]_{\mathcal{E}^*} = [t_2]_{\mathcal{E}^*} \implies \mathcal{E} \vdash t_1 = t_2$$

46.- LEMMA

Sia $A \in \Sigma\text{-alg}$ allora :

$$\underline{\underline{A}} \models \mathcal{E} \ , \ \mathcal{E} \vdash e \implies \underline{\underline{A}} \models e$$

<u>Prova</u>

Segue facilmente dalla definizione di $\vdash$

47.- LEMMA

$$\mathcal{E} \vdash t_1 = t_2 \implies T_\Sigma(V)/_{\mathcal{E}^*} \models t_1 = t_2$$

<u>Prova</u>

$$\begin{gathered}
\mathcal{E} \vdash t_1 = t_2 \\
\Downarrow \\
\mathcal{E} \vdash [\![ t_1 ]\!]_\tau = [\![ t_2 ]\!]_\tau \qquad \forall \tau \in \mathrm{Ass}(V, T_\Sigma(V)) \\
\Downarrow \\
[\, [\![ t_1 ]\!]_\tau \,]_{\mathcal{E}^*} = [\, [\![ t_2 ]\!]_\tau \,]_{\mathcal{E}^*} \\
\Downarrow \\
[\![ t_1 ]\!]_{\tau'} = [\![ t_2 ]\!]_{\tau'} \qquad \forall \tau' \in \mathrm{Ass}(V, T_\Sigma(V)/_{\mathcal{E}^*}) \\
\Downarrow \\
T_\Sigma(V)/_{\mathcal{E}^*} \models t_1 = t_2
\end{gathered}$$

48.- LEMMA

$$T_\Sigma(V)/_{\mathcal{E}^*} \models t_1 = t_2 \iff \Sigma\text{-alg}(\mathcal{E}) \models t_1 = t_2$$

<u>Prova</u>

$\Longleftarrow$ segue dal lemma precedente in base al quale

$$T_\Sigma(V)/_{\mathcal{E}^*} \in \Sigma\text{-alg}(\mathcal{E})$$

$\Longrightarrow$ segue dal fatto che per il lemma 45 se

$$T_\Sigma(V)/_{\mathcal{E}^*} \models t_1 = t_2 \quad \text{allora} \quad \mathcal{E} \vdash t_1 = t_2$$

e poichè per ogni $\underline{\underline{A}} \in \Sigma\text{-alg}(\mathcal{E})$ si ha $\underline{\underline{A}} \models \mathcal{E}$ dal lemma 46 si ottiene

$$A \models t_1 = t_2$$

49.- TEOREMA (BIRKHOFF / di completezza)

$$\Sigma\text{-alg}\,(\mathcal{E}) \models e \iff \mathcal{E} \vdash e$$

<u>Prova</u>

$\Longrightarrow$ dal 4º e 1º Lemma

$\Longleftarrow$ dal 3º e 4º Lemma

L'algebra $T_{\Sigma}(V)/_{\mathcal{E}^*}$ dicesi algebra libera di generatori V della varietà $\Sigma$-alg($\mathcal{E}$) nel senso della seguente defini= zione

50.- DEFINIZIONE

Una $\Sigma$-algebra $\underline{\underline{L}}$ dicesi <u>libera di generatori</u> $G=(G_s \mid s \in \mathcal{S})$ nella classe $\mathcal{C} \subseteq \Sigma$-alg sse $\underline{\underline{L}} \in \mathcal{C}$ e $\forall\, \underline{\underline{A}} \in \mathcal{C}$ data una famiglia $f=(f_s \mid s \in \mathcal{S})$ tale che

$$f_s : G_s \longrightarrow A_s$$

esiste un unico morfismo $\bar{f} : \underline{\underline{L}} \longrightarrow \underline{\underline{A}}$ che estende f.
Tale definizione è una generalizzazione della proprietà prima stabilita per $\underline{\underline{T}}_{\Sigma}(V)$ cfr. Def. 25.

51.- ESERCIZIO

Siano $\underline{\underline{L}}$ ed $\underline{\underline{L}}'$ due algebre libere per $\mathcal{C}$ di geberatori G e G' ove $|G_s| = |G'_s| \quad \forall\, s \in \mathcal{S}$ allora $\underline{\underline{L}}$ ed L' sono isomorfe

52.- ESERCIZIO

Verificare che $T_{\Sigma}(V)/_{\mathcal{E}^*}$ soddisfa la defini= zione precedente

53.- OSSERVAZIONE

$T_\Sigma(V)/_{\mathcal{E}^*}$ è un'algebra generica nella classe $\Sigma$-alg($\mathcal{E}$) nel senso specificato dal 4º Lemma prima stabilito; cioè in essa valgono tutte le equazioni di $\Sigma^V$-eq($\Sigma$-alg($\mathcal{E}$)).

$T_\Sigma(V)/_{\mathcal{E}^*}$ è però intrinsecamente generica nel senso che le equazioni della varietà sono tutte e sole quelle valide sulla famiglia dei suoi generatori:

$$t_1 = t_2 \iff [\![t_1]\!]\, j' = [\![t_2]\!]\, j' \quad \text{con } j'v = [v]_{\mathcal{E}^*} \ \forall v \in V$$

Un verso dell'equivalenza è evidente , per l'altro si osservi che in base al teorema di completezza

$$\mathcal{E} \models t_1 = t_2 \iff \mathcal{E} \vdash t_1 = t_2$$

ma

$$\mathcal{E} \vdash t_1 = t_2 \iff [t_1]_{\mathcal{E}^*} = [t_2]_{\mathcal{E}^*}$$
$$\Updownarrow$$
$$\left[ [\![t_1]\!]_j \right]_{\mathcal{E}^*} = \left[ [\![t_2]\!]_j \right]_{\mathcal{E}^*}$$
$$\Updownarrow$$
$$[\![t_1]\!]_{j'} = [\![t_2]\!]_{j'}$$

ove $jv = v \quad \forall\, v \in V.$

54.- ESERCIZIO

Verificare che dalla def. di algebra libera segue che

$$\underline{\underline{L}} \text{ libera} \iff \theta_{\mathcal{Y}} = \theta_{\mathcal{C}}$$

( $\underline{\underline{L}}$ è un'algebra con $G$ famiglia di generatori e $\theta_\gamma$, $\theta_{\mathcal{C}}$ congruenze su $\underline{\underline{T}}_\Sigma(V)$ definite come segue:

$$t_1 \; \theta_\gamma \; t_2 \iff [\![t_1]\!]_\gamma = [\![t_2]\!]_\gamma \quad , \; \gamma \in \mathrm{Ass}(V,G)$$

$$t_1 \; \theta_{\mathcal{C}} \; t_2 \iff [\![t_1]\!]_\rho = [\![t_2]\!]_\rho \quad \forall \, \underline{\underline{A}} \in \mathcal{C} \; , \; \rho \in \mathrm{Ass}(V,A) \quad ) .$$