III

MORFISMI E CONGRUENZE

Consideriamo le due algebre simili

$$\underline{\underline{A}} = (N^*, \cup)$$

$$\underline{\underline{B}} = (B^*, \vee)$$

ove $\cup$ indica la concatenazione tra stringhe di naturali e $\vee$ la concatenazione tra stringhe di booleani (T,F).

Sia $h: N \longrightarrow B^*$

e $h^*: N^* \longrightarrow B^*$

tale che

$$h^*(n_1 n_2 \dots n_k) = h(n_1) \vee h(n_2) \vee \dots h(n_k)$$

se $\alpha, \beta \in N^*$ h^* verifica la seguente uguaglianza

$$h^*(\alpha \cup \beta) = h^*(\alpha) \vee h^*(\beta)$$

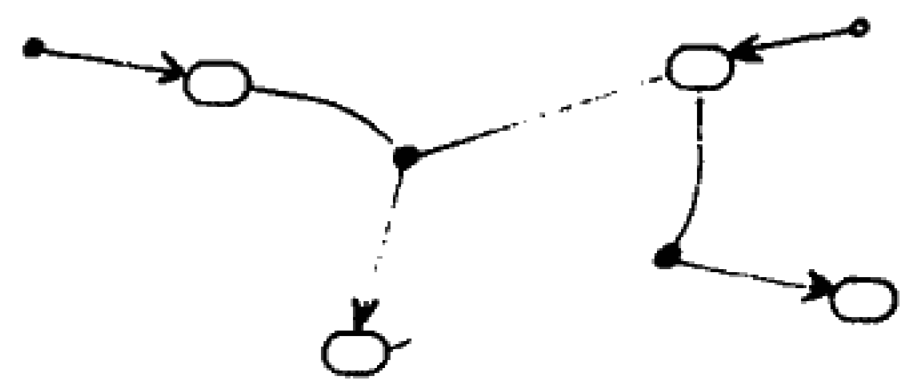
Possiamo esprimere tale proprietà tramite il diagramma:

$$\begin{tikzcd}
N^* \times N^* \arrow[r, "\cup"] \arrow[d, "h^* \times h^*"'] & N^* \arrow[d, "h^*"] \\
B^* \times B^* \arrow[r, "\vee"] & B^*
\end{tikzcd}$$

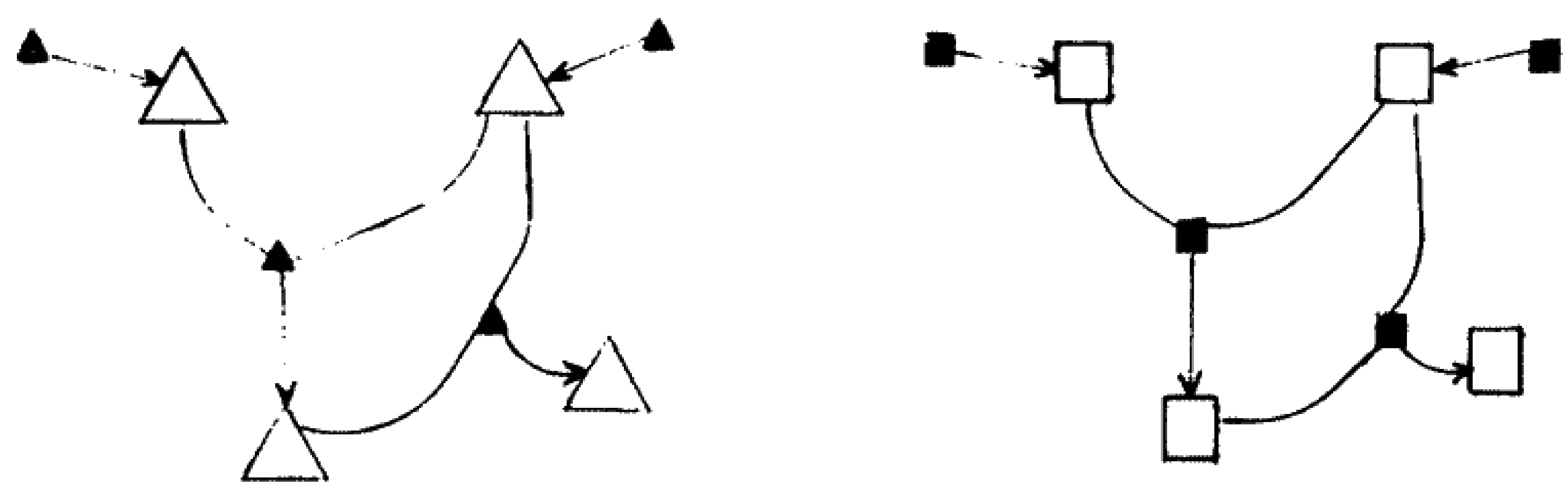
dicendo che esso è commutativo nel senso che partendo da un elemento $(\alpha, \beta) \in N^* \times N^*$ operando secondo il cammino $\cup, h$ si ottiene lo stesso risultato che si ottiene secondo il cammino $h^* \times h^*, \vee$

Delle funzioni, tra domini corrispondenti di Σ-algebre, che commutano per ogni operatore il relativo diagramma costituiscono un morfismo

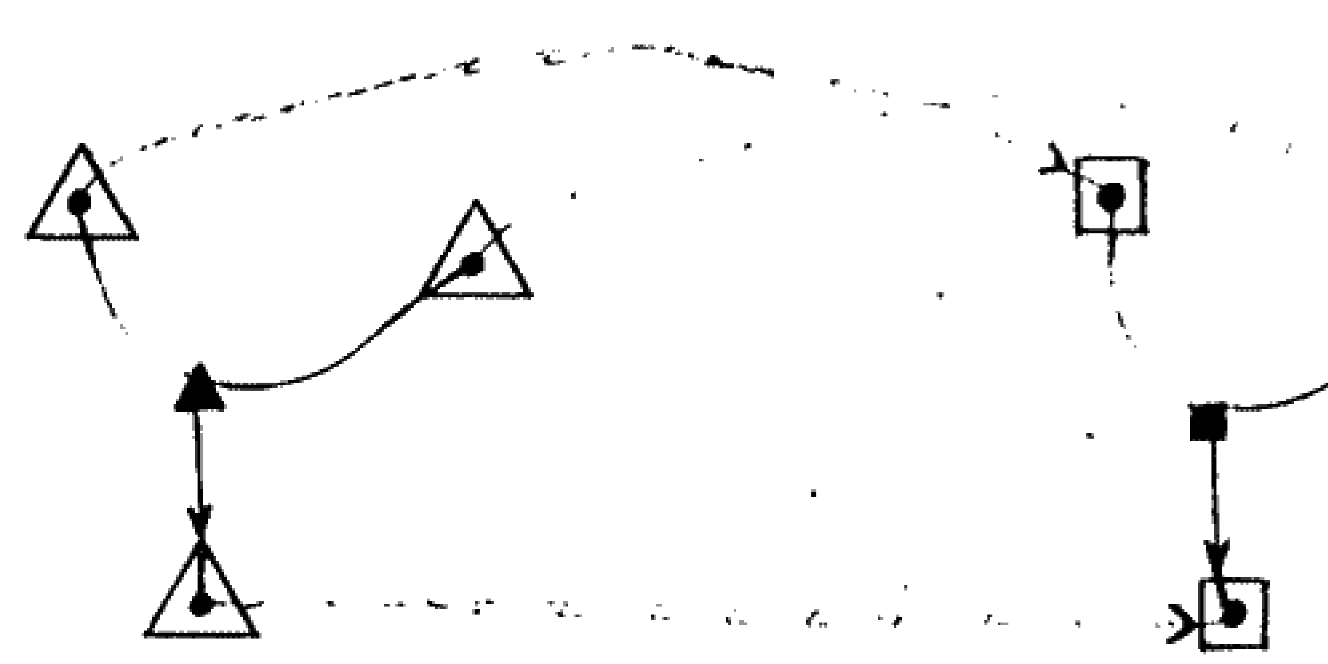
Esprimiamo tale nozione mediante grafi, sia data una segnatura quale



e due algebre di tale segnatura, una "triangolare" e l'altra "quadrata" :



un morfismo tra l'algebra triangolare e quella quadrata è una corrispondenza $\dashrightarrow$ che manda ogni triangolo nel corrispondente quadrato e che per esempio riferita allo operatore  verifica la seguente corrispondenza di evidente lettura



(i punti interni alle figure rappresentano elementi)

13.- DEFINIZIONE

Sia Σ una segnatura di sorte $\mathcal{S}$ e $\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{B}}$ due Σ-algebre, dicesi <u>Σ-morfismo</u> da $\underline{\underline{A}}$ in $\underline{\underline{B}}$

$$h: \underline{\underline{A}} \longrightarrow \underline{\underline{B}}$$

una famiglia di funzioni

$$h = (h_s \mid s \in \mathcal{S})$$

tale che

i) $h_s : A_s \longrightarrow B_s$

ii) $h_s(\sigma^A x) = \sigma^B(h_u x) \qquad \forall\, \sigma \in \Sigma_{u,s}\,,\ x \in A_u$

ovvero $\forall\, \sigma \in \Sigma$ h commuta il diagramma

$$\begin{tikzcd} A_u \arrow[r, "\sigma^A"] \arrow[d, "h_u"'] & A_s \arrow[d, "h_s"] \\ B_u \arrow[r, "\sigma^B"] & B_s \end{tikzcd}$$

Osserviamo che la condizione ii) impone in particolare che $h_s(\sigma^A) = \sigma^B \quad \forall\, \sigma \in \Sigma_s$

Se $\forall\, s$ h_s è

1)	iniettiva	h	dicesi	monomorfismo
2)	surgettiva	h	"	epimorfismo
3)	biunivoca	h	"	isomorfismo

(Omomorfismo è una variante terminologica di morfismo)

14.- ESERCIZIO

Verificare che la composizione di Σ-morfismi è un Σ-morfismo.

Sia $\underline{\underline{A}}$ una Σ-algebra (di sorta $\mathcal{S}$) ed

$$R = (R_s \mid s \in \mathcal{S})$$

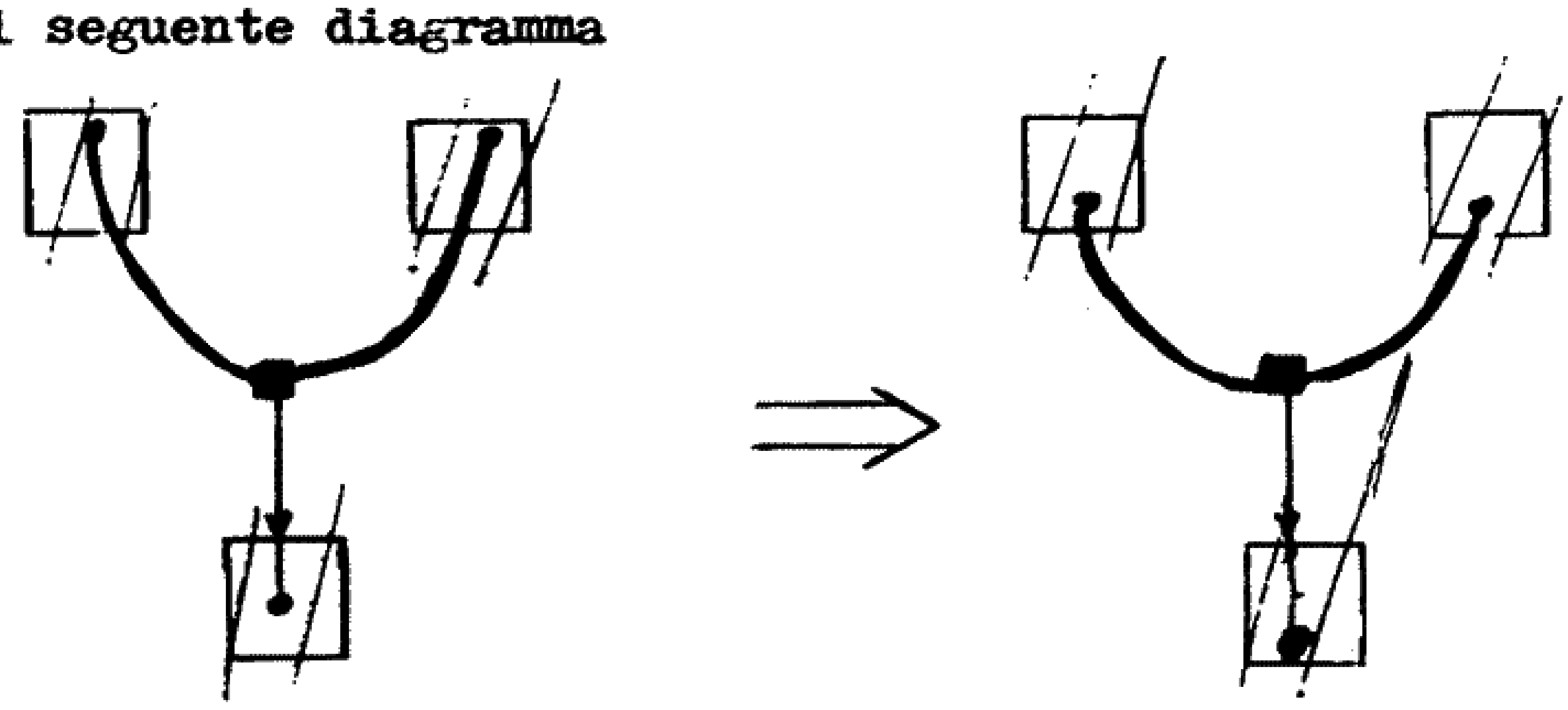
una famiglia di relazioni tali che R_s è una relazione di equivalenza su A_s per ogni $s \in \mathcal{S}$.

Se $x, y \in A_u$ intendiamo con

$$x\ R_u\ y$$

$$x_1 R_{s_1} y_1 \quad e \quad x_2 R_{s_2} y_2 \quad \cdots\cdots \quad x_k R_{s_k} y_k$$

Se tutte le operazioni di $\underline{\underline{A}}$ applicate ad elementi equivalenti producono elementi equivalenti, come esemplificato dal seguente diagramma



allora R dicesi una congruenza su $\underline{\underline{A}}$ come precisato dalla seguente

15.- DEFINIZIONE

$R = (R_s | s \in \mathcal{S})$ è una $\underline{\Sigma\text{-congruenza}}$ su A se

se $\forall\, \sigma \in \Sigma_{u,s}$

$$x\ R_u\ y \implies \sigma^A x\ R_s\ \sigma^A y$$

16.- ESEMPIO

Nell'algebra $\underline{\underline{L}}$ dell'esempio 1, la seguente relazione R è una congruenza

a) $\alpha\ R_{string}\ \beta \iff \alpha$ è permutazione di β

b) $x \; R_{nat} \; y \iff$ x e y dividono gli stessi nume= ri primi

c) $\forall p,q \; R_{bool} \iff p = q$

Dato un insieme e una relazione di equivalenza su di esso l'insieme quoziente modulo tale relazione è ottenuto considerando come elementi le classi di equivalenza della relazione.

Una congruenza permette di estendere la stessa costru= zione anche per le algebre come specificato dalla seguente

17.- DEFINIZIONE

Data una Σ-congruenza R su una Σ-algebra $\underline{\underline{A}}$ dicesi algebra quoziente di $\underline{\underline{A}}$ modulo R l'algebra seguente

$$\underline{\underline{A}}/R = \left((A_s/R_s \mid s \in \mathcal{S}), \; (\sigma^{A/R} \mid \sigma \in \Sigma) \right)$$

i cui domini sono gli insiemi quozienti A_s/R_s e indicando con $[x]_R$ la classe di equivalenza di x rispetto R

$$\sigma^{A/R}([x]_R) = [\sigma^A x]_R$$

Tale definizione è ben posta poichè essendo R una congruen= za su $\underline{\underline{A}}$

$$x,y \in A_u \Rightarrow x \; R_u \; y \Rightarrow \sigma^A x \; R_s \; \sigma^A y \Rightarrow [\sigma^A x]_R = [\sigma^A y]_R$$

cioè la definizione delle operazioni di $\underline{\underline{A}}/R$ non dipende dai particolari rappresentanti delle classi di equivalenza

La nozione di morfismo e congruenza sono intimamente connesse come specificato dal seguente

18.- TEOREMA (fondamentale del morfismo)

Sia $h: \underline{\underline{A}} \longrightarrow \underline{\underline{B}}$ un morfismo

i) Se $\hat{h}_s(A_s) = \{h_s x \in B_s \mid x \in A_s\}$

allora sulla famiglia

$$\hat{h}(A) = (\hat{h}_s(A_s) \mid s \in \mathcal{S})$$

è definibile una Σ-sottoalgebra di $\underline{\underline{B}}$

ii) Se $x \; \varepsilon_h \; y \iff h_s x = h_s y \quad \forall\, s \in \mathcal{S} \quad x,y \in A_s$

allora ε_h è una congruenza su $\underline{\underline{A}}$

iii) Se $\Pi_h : \underline{\underline{A}} \to \underline{\underline{A}}/\varepsilon_h$ e $\Pi_h x = [x]_{\varepsilon_h}$

allora esiste un unico monomorfismo g che rende commutativo il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd}
\underline{\underline{A}} \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\Pi_h"'] & \underline{\underline{B}} \\
\underline{\underline{A}}/\varepsilon_h \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

<u>Prova</u>

i) Bisogna provare che la famiglia $\hat{h}(A)$ è chiusa rispet= to alle operazioni di $\underline{\underline{B}}$. Osserviamo che

$$\hat{h}(A)_s = \hat{h}(A_s)$$

e che $\hat{h}(A)_u = \hat{h}_u(A_u) = \hat{h}_{s_1}(A_{s_1}) \times \ldots\ldots \hat{h}_{s_k}(A_{s_k})$

rimane quindi da provare che

$$y \in \hat{h}_u(A_u) \Rightarrow \sigma^B y \in \hat{h}_s(A_s) \quad \forall \sigma \in \Sigma_{u,s} \text{ , } y \in B_u$$

ma $\quad y \in \hat{h}_u(A_u) \Rightarrow \quad y = h_u x \quad$ e $\quad x \in A_u$

quindi $\quad \sigma^B y = \sigma^B(h_u x) = h_s(\sigma^A x)$

ovvero $\quad \sigma^B y \in \hat{h}_s(A_s)$

ii) $\quad x \; \varepsilon_h \; y \underset{\text{(per def.)}}{\Longrightarrow} hx = hy \Longrightarrow \sigma^B(hx) = \sigma^B(hy)$

$$\Downarrow \text{ (h morfismo)}$$

$$h(\sigma^A x) = h(\sigma^A y)$$

$$\Downarrow \text{ (per def.)}$$

$$\sigma^A x \; \varepsilon_h \; \sigma^A y$$

Per semplicità sono stati omessi indici ad h e ad ε_h

iii) Basta definire

$$\#) \qquad g \, [x]_{\varepsilon_h} = hx$$

g è un morfismo infatti:

$$g(\sigma^{A/\varepsilon_h} [x]_{\varepsilon_h}) = g[\sigma^A x]_{\varepsilon_h} = h(\sigma^A x) = \sigma^B(hx) =$$

$$= \sigma^B(g\,[x]_{\varepsilon_h})$$

g è unico poichè ogni altro morfismo che commuta il diagramma deve soddisfare #)

g è iniettivo poichè

$$g\,[x]_{\varepsilon_h} = g[y]_{\varepsilon_h} \Rightarrow hx = hy \Rightarrow x \; \varepsilon_h \; y \Rightarrow [x]_{\varepsilon_h} = [y]_{\varepsilon_h}$$