II

SOTTOALGEBRE E ALGEBRE PRODOTTO

Sia $\underline{\underline{L}}$ l'algebra dell'Es.1 privata della costante 1, siano

$$L' \subset L \quad e \quad N' \subset N$$

ove $\quad N' = \{x \mid x \in N \quad e \quad x \text{ pari}\}$

$\qquad L' = \{\alpha \mid \alpha \in L \quad e \quad |\alpha| \in N'\}$

è evidente che

$$\alpha, \beta \in L' \Rightarrow \alpha \vee \beta \in L'$$
$$\alpha \in L' \Rightarrow |\alpha| \in N'$$
$$x, y \in N' \Rightarrow x + y \in N'$$

cioè L', N' sono chiusi rispetto a $\vee, |\ |, +$.

In tal caso possiamo definire una algebra $\underline{\underline{L}}'$

$$\underline{\underline{L}}' = (L', N', B, \vee', |\ |', +', =', \lambda, 0, 1, T, F)$$

ove $\vee', |\ |', +', ='$ sono le restrizioni di $\vee, |\ |, +, =,$ ai relativi insiemi con apice.

$\underline{\underline{L}}'$ dicesi quindi sottoalgebra di $\underline{\underline{L}}$. In generale si ha la seguente

11.- DEFINIZIONE

Sia A una Σ-algebra e sia $B = (B_s \mid s \in \mathcal{S})$

Su B è definibile una Σ-algebra $\underline{\underline{B}}$ che dicesi <u>Σ-sottoalgebra</u> di $\underline{\underline{A}}$ scrivendo $\underline{\underline{B}} \subseteq \underline{\underline{A}}$ se valgono le seguenti condizioni:

$$\begin{array}{ll} \text{i)} \quad B_s \subseteq A_s \quad \forall\, s \in \mathcal{S} & \\ \text{ii)} \quad x \in B_u \;\Longrightarrow\; \sigma^{A} x \in B_s & \left[\begin{array}{l} \forall\, u,s \in \mathcal{S}^* \\ \forall\, x \in B_u \\ \forall\, \sigma \in \Sigma_{u,s} \end{array}\right. \\ \text{iii)} \quad \sigma^{B} = \sigma^{A}\Big|_{B_u} & \end{array}$$

($\sigma^{A}\Big|_{B_u}$ è la restrizione di σ^{A} a B_u)

Dalla condizione ii) segue $\Sigma_s \subseteq B_s \quad \forall\, s \in \mathcal{S}$.

12.- DEFINIZIONE

Siano $\underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{B}}$ due Σ-algebre, dicesi <u>Σ-algebra prodotto</u> di $\underline{\underline{A}}$ e $\underline{\underline{B}}$ la seguente algebra $\underline{\underline{A}} \times \underline{\underline{B}}$

$$\underline{\underline{A}} \times \underline{\underline{B}} = \Big((A_s \times B_s \mid s \in \mathcal{S}) \;,\; (\sigma^{A} \times \sigma^{B} \mid \sigma \in \Sigma) \Big)$$

avente come domini i prodotti dei domini di $\underline{\underline{A}}$ con i corri= spondenti di $\underline{\underline{B}}$ e come operazioni i prodotti tra operazioni corrispondenti di $\underline{\underline{A}}$ e $\underline{\underline{B}}$

Tale definizione si generalizza in modo del tutto ovvio a prodotti qualsiasi di famiglie di algebre.