I

ALGEBRE ETEROGENEE E SEGNATURE

0.- DEFINIZIONE

Dicesi algebra (eterogenea) una coppia $(\mathfrak{J}, O)$ ove $\mathfrak{J}$ è una famiglia di insiemi e O una famiglia di operazioni (totali) i cui domini sono prodotti cartesiani tra insiemi di $\mathfrak{J}$, e i codomini sono insiemi di $\mathfrak{J}$.

Se A è un insieme di $\mathfrak{J}$, una costante di A è un elemento $a \in A$ che può essere completamente individuato con una operazione

$$f_a: \{\emptyset\} \longrightarrow A$$

(del tutto definita dal suo valore in $\emptyset$) ponendo $f_a(\emptyset) = a$.

Poichè $\{\emptyset\} = \{f \mid f: \emptyset \longrightarrow A\} = A^0$ si può concludere che in un'algebra le costanti sono identificabili con operazioni nullarie.

Gli insiemi della famiglia $\mathfrak{J}$ diconsi domini o sostegni dell'algebra.

1.- ESEMPIO

$$\underline{\underline{L}} = (L, N, B, \vee, |\,|, +, =, \lambda, 0, 1, T, F)$$

$L \equiv \{a,b\}^*$ i,e l'insieme di stringhe su a,b
$N \equiv$ l'insieme dei naturali $0,1,2,\ldots$
$B \equiv$ l'insieme dei valori di verità T,F

$\vee : L \times L \longrightarrow L$	ove	$\alpha \vee \beta$ è la concatenazione delle stringhe α e β
$|\,| : L \longrightarrow N$	ove	$|\alpha|$ è la lunghezza di α
$+ : N \times N \longrightarrow N$	"	$x+y$ è la somma di x e y
$= : L \times L \longrightarrow B$	"	$(\alpha = \beta) = T \iff \alpha$ è uguale a β

(segue)

$\lambda \in L$ (stringa vuota) i.e. $\lambda : L^0 \longrightarrow L$

$0,1 \in N$ i.e. $0,1 : N^0 \longrightarrow N$

$T,F \in B$ i.e. $T,F : B^0 \longrightarrow B$

2.- DEFINIZIONE

Una algebra $\underline{\underline{L}}'$ dicesi simile ad $\underline{\underline{L}}$ se i suoi domini sono degli insiemi L', N', B', in corrispondenza a L, N, B, rispettivamente e le sue operazioni $\vee'$, $||'$, $+'$, $='$, λ', $0'$, $1'$, T', F', in corrispondenza a quelle di $\underline{\underline{L}}$ sono tali che operazioni corrispondenti agiscono tra domini corrispondenti, cioè

$$\vee' : L' \times L' \longrightarrow L'$$

$$||' : L' \longrightarrow N'$$

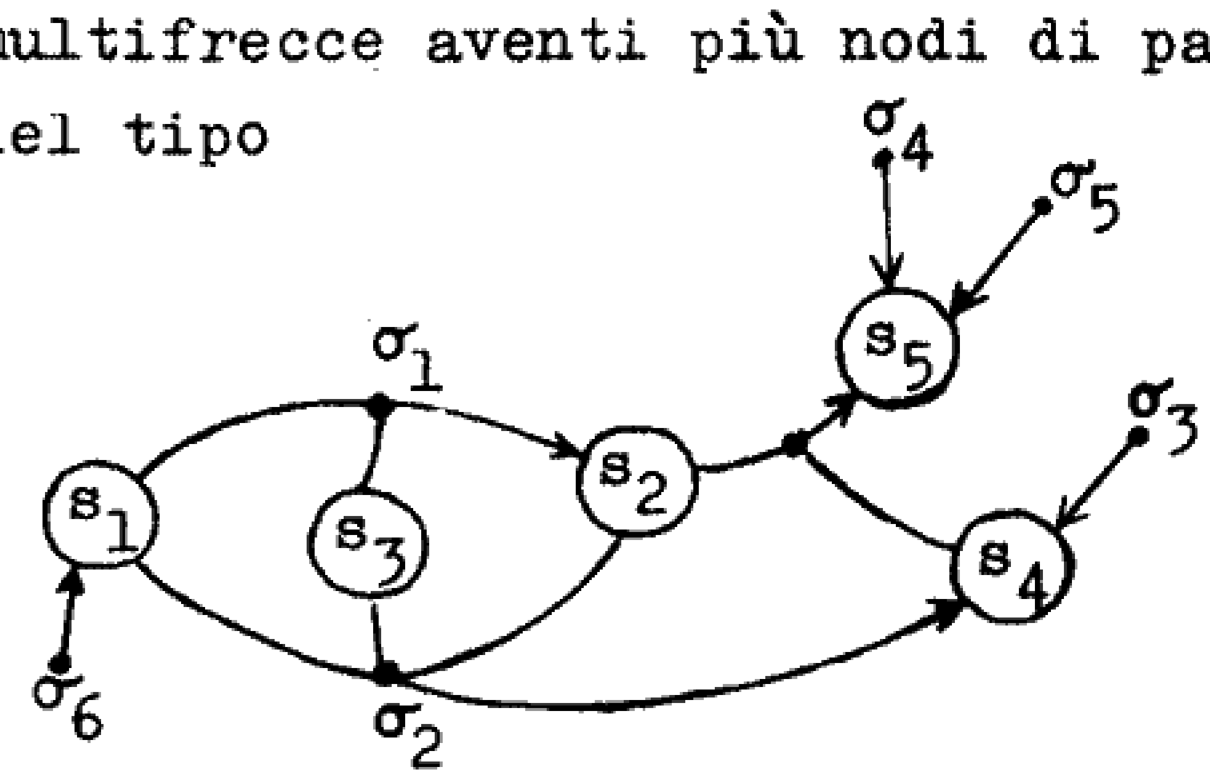
$$+' : N' \times N' \longrightarrow N'$$

$$=' : L' \times L' \longrightarrow B'$$

$$\lambda' \in L' \qquad 0',1' \in N' \qquad T',F' \in B'$$

3.- DEFINIZIONE

Un metodo per trattare comodamente la similarità tra algebre è quello di individuare tipi di similarità con multi= grafi dette <u>segnature</u> , ovvero insiemi di nodi collegati da multifrecce aventi più nodi di partenza e un nodo di arrivo, del tipo



s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, diconsi <u>sorte</u> o tipi

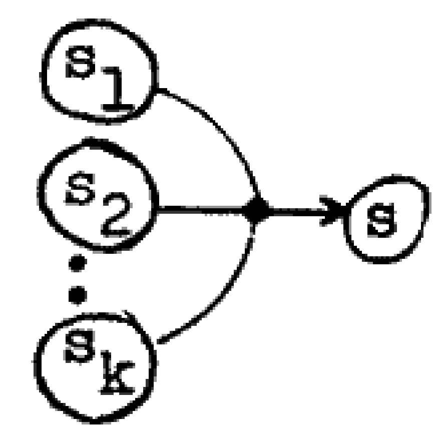
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6$, diconsi <u>operatori</u>

4. DEFINIZIONE

Una algebra $\underline{\underline{A}}$ dicesi di segnatura Σ , o Σ-algebra se in $\underline{\underline{A}}$ vi sono tanti domini $A_{s_1}, A_{s_2}, \dots$ quante sono le sorte $s_1, s_2, \dots$ della segnatura Σ e tante operazioni $\sigma_1^A, \sigma_2^A, \dots$ quante sono le multifrecce (operatori) di Σ in modo tale che se σ è una multifreccia di rango

$$s_1\ s_2\ \dots\ s_k \longrightarrow s$$

cioè



(ovvero arietà $s_1 s_2 \dots s_k$ e sorta s)

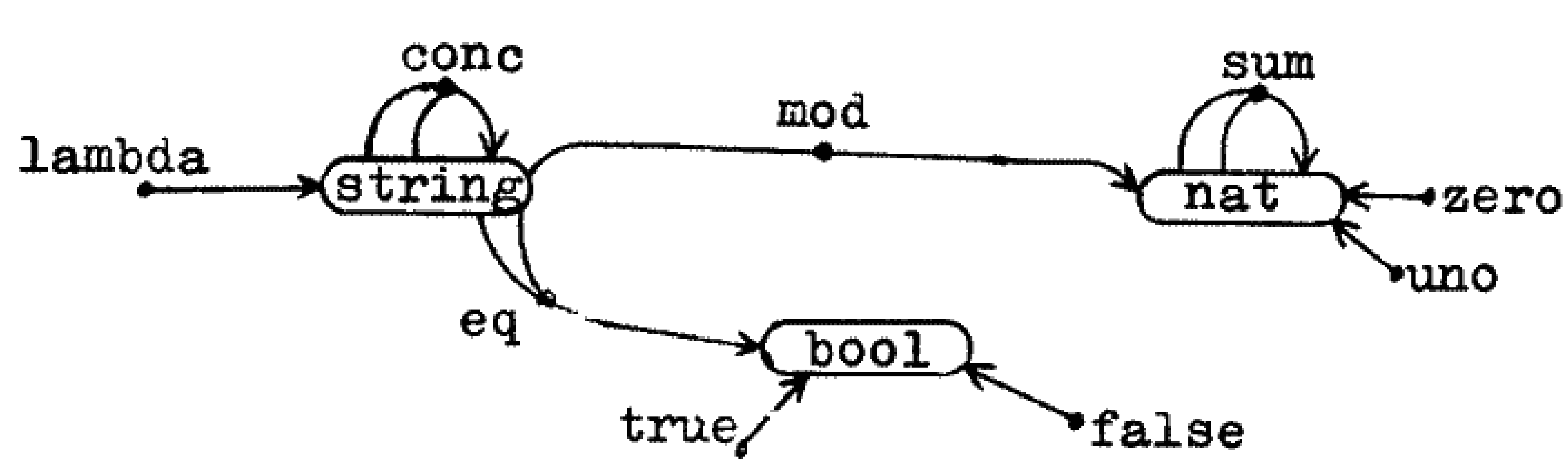
allora in $\underline{\underline{A}}$ si avrà

$$\sigma^A : A_{s_1} \times A_{s_2} \times \dots \times A_{s_k} \longrightarrow A_s$$

(Le multifrecce senza sorte di partenza individuano operazioni nullarie, cioè costanti)

5. ESEMPIO

L'algebra $\underline{\underline{L}}$ dell'esempio 1 è una Σ-algebra per la seguente segnatura Σ



ove :

$L_{string} = L$

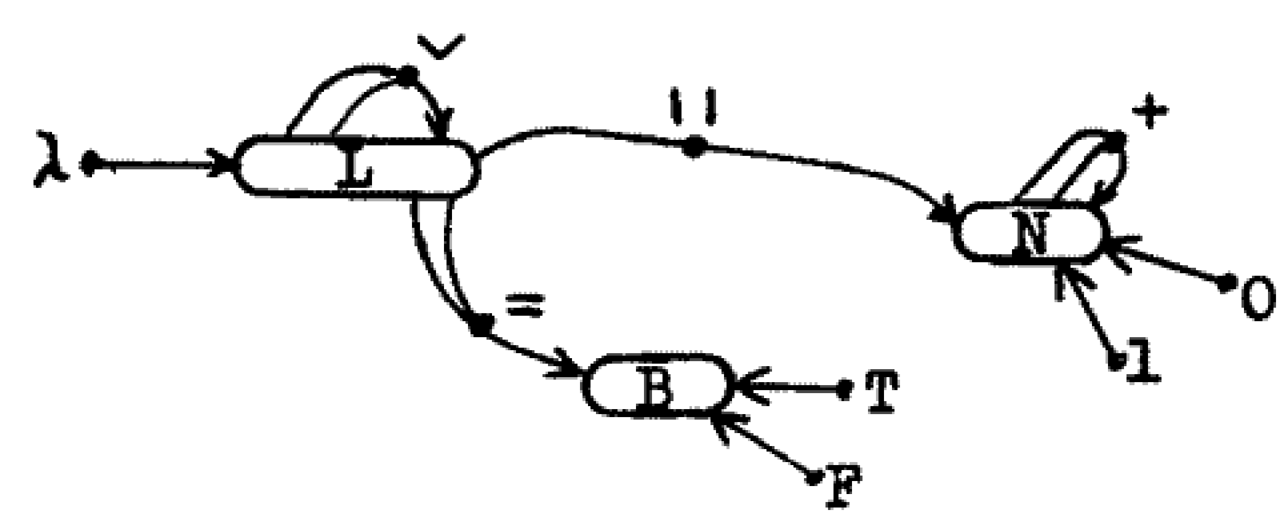
$L_{nat} = N$

$L_{bool} = B$

$$\begin{array}{lll} conc^{L} = \vee & eq^{L} = = & uno^{L} = 1 \\ mod^{L} = \mid\mid & lambda^{L} = \lambda & true^{L} = T \\ sum^{L} = + & zero^{L} = 0 & false^{L} = F \end{array}$$

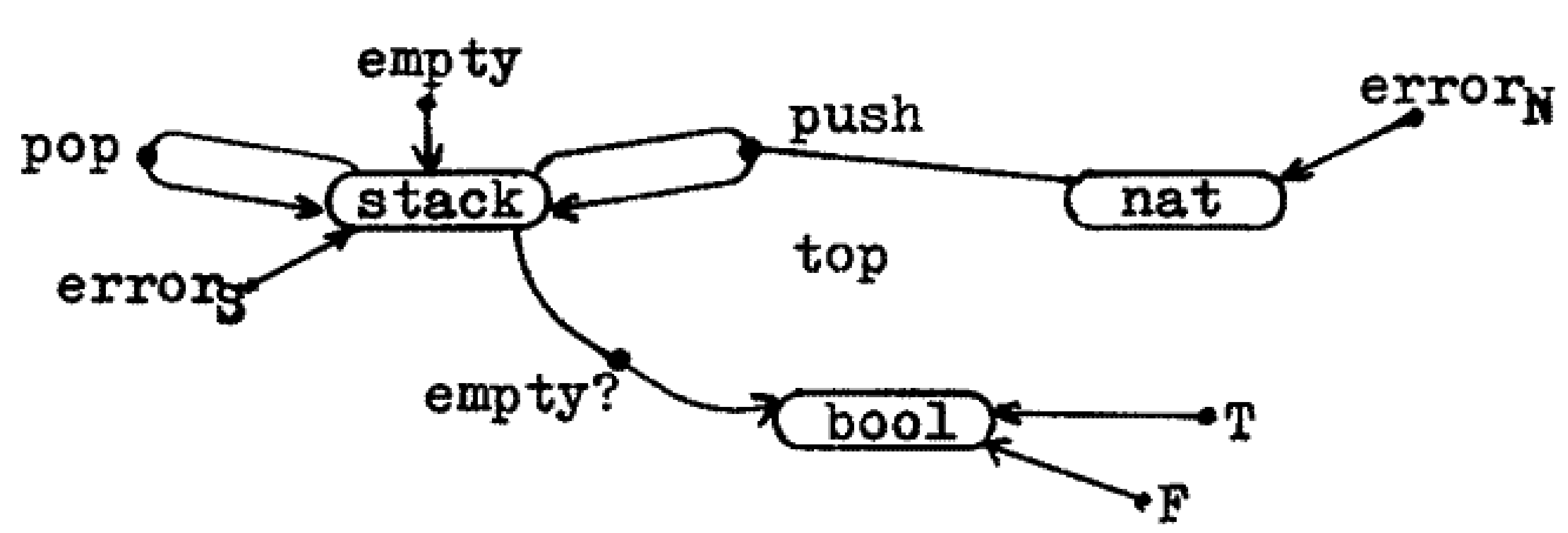
ovvero Σ fornisce un sistema di notazioni per domini e operazioni di $\underline{\underline{L}}$.

Possiamo a questo punto indicare la Σ-algebra $\underline{\underline{L}}$ con un grafo analogo a quello di sopra ove ai nodi sono associati insiemi e alle multifrecce sono associate ope= razioni:



6. ESEMPIO

Sia Σ la seguente segnatura



$\underline{\underline{P}}$ è una Σ-algebra, ove

$$\begin{cases} P_{stack} = N^{*} \cup \{error_S\} \\ P_{nat} = N \cup \{error_N\} \\ P_{bool} = B = \{T,F\} \end{cases}$$

$push^P : P_{nat} \times P_{stack} \rightarrow P_{stack}$

$pop^P : P_{stack} \longrightarrow P_{stack}$

$top^P : P_{stack} \longrightarrow P_{nat}$

$empty?^P : P_{stack} \longrightarrow P_{bool}$

$error_S^P = error_S \quad ; \quad error_N^P = error_N$

$empty^P = \lambda$ (stringa nulla)

$T^P = T \quad ; \quad F^P = F$

$push^P(n, n_1 n_2 \ldots n_k) = (n n_1 n_2 \ldots n_k)$

$pop^P(n n_1 n_2 \ldots n_k) = (n_1 n_2 \ldots n_k)$

$top^P(n n_1 n_2 \ldots n_k) = n$

$push^P(error_N, n_1 n_2 \ldots n_k) = push^P(n, error_S) = error_S$

$pop^P(error_S) = pop^P(empty) = error_S$

$top^P(error_S) = top^P(empty) = error_N$

$empty?^P(S) = T \iff S = empty^P$

7.- CONVENZIONI NOTAZIONALI

1) Nel seguito Σ indica una generica segnatura di sorte $\mathcal{S}$, inoltre u indicherà un generico elemento di $\mathcal{S}^*$, ovvero

$$u = s_1 s_2 \dots s_k \qquad (k=0 \Rightarrow u=\lambda)$$

con $s_1, s_2, \dots s_k \in \mathcal{S}$ (insieme di sorte)

2) Sia $(A_s \mid s \in \mathcal{S})$ una famiglia di insiemi $\mathcal{S}$-indicizzata e $(f_s \mid s \in \mathcal{S})$ una famiglia di funzioni $\mathcal{S}$-indicizzata

A_u sta per $A_{s_1} \times A_{s_2} \times \dots A_{s_k} \qquad (A_\lambda = \{\emptyset\})$

f_u " " $f_{s_1} \times f_{s_2} \times \dots f_{s_k} \qquad (f_\lambda : A_\lambda \rightarrow \quad)$

ove

$$x \in A_u \Leftrightarrow x = (x_1, x_2, \dots x_k) \text{ e } x_1 \in A_{s_1} \dots x_k \in A_{s_k}$$

$$f_u x = (f_{s_1} x_1, f_{s_2} x_2, \dots f_{s_k} x_k)$$

3) Si abbrevia con $\sigma \in \Sigma$ la scrittura più precisa

$$\sigma \in \bigcup_{\substack{s \in \mathcal{S} \\ u \in \mathcal{S}^*}} \Sigma_{u,s}$$

spesso generalizzaremo tale abbreviazione ad una famiglia qualsiasi $\mathcal{F} \doteq (\mathcal{F}_i \mid i \in I)$, scrivendo $f \in \mathcal{F}$ per $f \in \bigcup_{i \in I} \mathcal{F}_i$

8.- OSSERVAZIONE

Una segnatura può essere equivalentemente definita come una famiglia di insiemi disgiunti

$$\Sigma = (\Sigma_{u,s} \mid u \in \mathcal{S}^* \ , \ s \in \mathcal{S})$$

($\mathcal{S}$ insieme delle sorte e $\Sigma_{u,v}$ degli operatori di rango $u \to s$).

In tal modo una Σ-algebra è individuata da una coppia

$$(A, \alpha)$$

ove

$$A = (A_s \mid s \in \mathcal{S}) \qquad \text{e} \qquad \alpha = (\sigma^A \mid \sigma \in \Sigma)$$

($\Sigma_{\lambda,s}$ o più semplicemente Σ_s indica l'insieme degli operatori nullari di Σ).

È evidente che algebre di uguale segnatura sono simili e che viceversa date delle algebre simili può trovarsi una segnatura Σ per cui tutte risultino Σ-algebre.

9.- ESERCIZIO

Definire delle segnature e algebre di quelle segna= ture.

10.- CONVENZIONE

Data una segnatura Σ , Σ-alg indica la classe di tutte le Σ-algebre.