1. MASSE CONTINUE E TEOREMA DI DECOMPOSIZIONE

Sia $\mathscr{A}$ un'algebra di parti di X.
Tra le masse che hanno codominio chiuso, ci sono innanzitutto le masse continue, cioé quelle masse $\mu : \mathscr{A} \to \mathbb{R}$ tali che $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists \{A_1, \ldots, A_n\} \subset \mathscr{A}$ partizione di X tale che $|\mu|(A_i) < \varepsilon$ $\forall i \in \{1, \ldots n\}$, avendo definito, per ogni $A \in \mathscr{A}$:

$$|\mu|(A) = \operatorname{Sup} \{\sum_{j=1}^{m} |\mu(A_j)| ; \quad \{A_1, \ldots A_m\} \subset \mathscr{A} \text{ partizione di } A\}.$$

($|\mu|$ è una massa su $\mathscr{A}$ positiva e coincide con μ se $\mu \geq 0$).
Per tali masse si ha precisamente, il seguente risultato.

TEOREMA (1.1)

Se $\mu : \mathscr{A} \to [0, +\infty)$ è una massa sull'algebra $\mathscr{A}$ di parti di X, allora:

$$\mu \text{ è continua} \iff \forall\, \beta \text{ ultrafiltro in } \mathscr{A} : a_\beta := \inf \{\mu(B); B \in \beta\} = 0$$
$$\iff \forall A \in \mathscr{A} : \overline{\mu(\mathscr{A}_A)} = [0, \mu(A)] \quad \text{dove} \quad \mathscr{A}_A = \mathscr{A} \cap \mathscr{P}(A)$$

Se poi $\mathscr{A}$ è una σ-algebra oppure μ è completa, cioé $\mathscr{A} = \mathscr{A}^*$ con

$\mathscr{A}^* = \{A \subset X : \forall \varepsilon > 0\ \exists A_1, A_2 \in \mathscr{A}$ tale che $A_1 \subset A \subset A_2$ e $\mu(A_2 - A_1) < \varepsilon\}$,

allora si può asserire che:

$$\mu \text{ è continua} \iff \forall A \in \mathscr{A} : \mu(\mathscr{A}_A) = [0, \mu(A)].$$

Quest'ultima proprietà è nota come **proprietà di Darboux** per funzioni d'insieme (cfr. Dinculeanu: Vector Measures, Pegamon Press (1967)).

Il teorema precedente è dovuto a vari Autori, anche se con diverse sfumature (cfr. ad esempio [5], [6] e [7]).

Le ipotesi $\mu \geq 0$ ed $\mathscr{A}$ σ-algebra sono indispensabili per la chiusura del codominio. Infatti se non è $\mu \geq 0$, anche se $\mathscr{A}$ è una σ-algebra, allora $\mu(\mathscr{A})$ può essere un intervallo aperto (cfr. [14]). Inoltre se si considera l'algebra $\mathscr{A}$

(ma non σ-algebra) dei plurintervalli semiaperti a destra su $[0,1)$ con estremi razionali e si definisce $\mu([a,b))=b-a$, risulta μ σ-additiva, limitata e continua ma $\mu(\mathscr{A}) = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ e quindi non è chiuso.

Se la massa $\mu : \mathscr{A} \to [0,+\infty)$ sull'algebra $\mathscr{A}$ non è continua, allora, posto, per ogni ultrafiltro β in $\mathscr{A}$

$$a_\beta = \inf \{\mu(B) : B \in \beta\},$$

l'insieme degli ultrafiltri β per i quali è $a_\beta > 0$ è al più numerabile, per la limitatezza di μ. Posto quindi $a_n = a_{\beta_n}$ ed identificato l'ultrafiltro β_n con la massa su $\mathscr{A}$ a valori $\{0,1\}$, il cui supporto (1) coincide con β_n, si verifica che la massa

$$\gamma = \mu - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \beta_n$$

è continua.

In altre parole vale il seguente fondamentale

TEOREMA (1.2) DI DECOMPOSIZIONE

Ogni massa $\mu : \mathscr{A} \to [0,+\infty)$ sull'algebra $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ può sempre decomporsi, in modo unico, come:

$$\mu = \gamma + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \beta_n \tag{1.1}$$

con γ continua, $a_n \geq 0$, $a_n \downarrow 0$ (2) e β_n masse ultrafiltro (a valori $\{0,1\}$) distinte (e quindi finitamente disgiunte, cioé $\forall n \geq 1$ $\exists$ una partizione $\{B_1,\dots,B_n\} \subset \mathscr{A}$ di X tale che $\beta_i(B_i) = 1$ $\forall i=1,2,\dots,n$).

---

(1) Se μ è una massa sull'algebra $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$, si chiama supporto di μ:

$$\operatorname{supp} \mu = \{A \in \mathscr{A} : |\mu|(A) = |\mu|(X)\}$$

(2) $a_n \downarrow 0$ è una successione decrescente ed infinitesima.

Questa decomposizione vale anche se non è $\mu \geq 0$ (in quanto vale per μ^+ e μ^-) (cfr. [9] pag. 148).

Il teorema precedente è dovuto ad **A.Sobczyk - P.C.Hammer** (cfr. [4]) ed a **B.De Finetti** (cfr. [8]) (cfr. anche [9] pag.144).

Come abbiamo visto le a_n della (1.1) sono date da

$$(1.2) \qquad a_n = \inf \{\mu(A);\ A \in \beta_n\} ,$$

ma non è affatto detto che esista $A_n \in \beta_n$ tale che $\mu(A_n)=a_n$. Quando questo accade, β_n dà origine al μ-atomo A_n [1] (ovviamente se $a_n > 0$) e risulta

$$(1.3) \qquad \beta_n = \{ A \in \mathscr{A} : \mu(A \cap A_n) = a_n \}.$$

Ciò accade, ad esempio, nel caso in cui μ è una misura sulla σ- algebra $\mathscr{A}$. In tal caso si ha il seguente risultato

TEOREMA (1.3). Se $\mathscr{A}$ è una σ-algebra di parti di X e μ è una misura limitata su $\mathscr{A}$, allora, con le notazioni della decomposizione (1.1), si può trovare una partizione $\{A_n;\ n=0,1,2,\dots\}$ di X in $\mathscr{A}$, tale che $\gamma(A) = \mu(A \cap A_0)$ per ogni $A \in \mathscr{A}$ e per ogni $n=1,2,3,\dots$ A_n è un μ-atomo tale che $\beta_n(A_n) = 1$ (e quindi $\gamma(A_n)=0$ e $\beta_m(A_n)=0$ per $m \neq n$).

DIM. Infatti in questo caso sia γ che le β_n sono delle misure e dalla continuità di γ segue che

---

(1) $A \in \mathscr{A}$ è detto **μ-atomo** se $\mu(A) \neq 0$ e $\forall B \in \mathscr{A}_A$: $(\mu(B)=0) \vee (\mu(A-B)=0)$. In tal caso la restrizione di μ ad $\mathscr{A}_A$ è una mssa a due valori $\{0, \mu(A)\}$.

$\forall k \in \mathbb{N}$ $\exists$ una partizione $\{A_{k1}, A_{k2}, \dots, A_{kp_k}\}$ di X in $\mathscr{A}$

tale che $\gamma(A_{ki}) < \frac{1}{k}$ per ogni i. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ fissato, uno solo di questi insiemi, diciamolo B_k, è tale che $\beta_n(B_k)=$ Posto $C_n = \bigcap_{k \geq 1} B_k$, risulta $\gamma(C_n) = 0$ e $\beta_n(C_n) = 1$.

Se ora definiamo $C = \bigcup_{n \geq 1} C_n$, risulta $\gamma(c) = 0$ e posto $A_o = C^c$, si ha $\beta_n(A_o) = 0$ per ogni n. Conseguentemente $\gamma(A) =$ $\mu = (A \cap A_o)$ per ogni $A \in \mathscr{A}$. Inoltre possiamo trovare una partizione $\{A_1, A_2, \dots\}$ di C in $\mathscr{A}$ tale che $\beta_n(A_n) = 1$ e ovviamente A_n è un μ-atomo per ogni $n \in \mathbb{N}$.

c.v.d.

2.IL CODOMINIO DI UNA MISURA.

Sia $\mathscr{A}$ una σ-algebra di parti di X, μ una misura limitata su $\mathscr{A}$ e sia (1.1) la sua decomposizione nella misura continua γ e nelle misure ultrafiltro β_n.

Proviamo innanzitutto la

PROPOSIZIONE (2.1)

$$\mu(\mathscr{A}) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} [\lambda, \lambda + \gamma(X)] \text{ con}$$

$$\Lambda = \{\textstyle\sum_{m \in M} a_m, \ M \subset \mathbb{N}\}$$

DIM. Se $A \in \mathscr{A}$, si ha $\mu(A) = \gamma(A) + \sum_{n \geq 1} a_n \beta_n(A)$ e detto $M_A = \{n \in \mathbb{N};\ \beta_n(A) = 1\}$, risulta $\mu(A) = \gamma(A) + \sum_{m \in M_A} a_m$, cioé

$\mu(A) = \lambda+\gamma(A) \in [\lambda, \lambda+\gamma(X)]$ con $\lambda = \sum_{m \in M_A} a_m$

Viceversa se $x \in [\lambda, \lambda+\gamma(X)]$, posto $a=x-\lambda$, essendo $a \in [0, \gamma(X)]$, esiste, per il teorema (1.3), $A \subset \mathscr{A}_{A_0}$ tale che $\gamma(A) = \mu(A) = a$ e se $\lambda = \sum_{m \in M} a_m$ $(M \subset \mathbb{N})$, posto $B = \bigcup_{m \in M} A_m$, risulta $\mu(B) = \lambda$ e $B \cap A = \emptyset$. Infine $\mu(A \cup B) = a+\lambda = x$.

c.v.d.

Si ha quindi l'importante

TEOREMA (2.2) Se $\mathscr{A}$ è una σ-algebra di parti di X e μ è una misura limitata su $\mathscr{A}$, allora $\mu(\mathscr{A})$ è chiuso.

DIM. Per quanto visto nella proposizione precedente, se $\gamma(X) > 0$ (cioé se non è nulla la componente continua della μ), $\mu(\mathscr{A})$ altro non è che un'unione finita d'intervalli chiusi e quindi un chiuso.
Se invece $\gamma \equiv 0$, risulta, con le notazioni introdotte, $\mu(\mathscr{A}) = \Lambda$.

Per provare che Λ è un chiuso, basterà limitarsi al caso $\sum_{n \geq 1} a_n = 1$.

Sia C l'insieme di Cantor ed $I = [0,1]$. Il generico elemento $c \in C$, può essere rappresentato come $c = \sum_{n \geq 1} \frac{c_n}{3^n}$, essendo $c_n \in \{0,2\}$. Definiamo ora $f : C \to I$, mediante:

$f(c) = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} c_n a_n$. Si vede facilmente che $\Lambda = f(C)$ e che f è continua. Pertanto essendo C compatto, anche Λ è compatto.

c.v.d.

Dalle dimostrazioni precedenti segue immediatamente:

COROLLARIO (2.3) Se $\mathscr{A}$ è una σ-algebra di parti di X e μ è una misura limitata su $\mathscr{A}$, allora $\mu(\mathscr{A})$ è finito o perfetto.

Uno studio dettagliato del codominio della misura

$$m(M) = \sum_{n \in M} a_n \quad \text{con} \quad M \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$$

porta che $m(\mathscr{P}(\mathbb{N}))$ è finito oppure un intervallo chiuso, oppure un plurintervallo chiuso o infine un insieme tipo Cantor. Precisamente, detto $r_n = \sum_{k>n} a_k$, se si verifica la condizione $a_n \leq r_n$ per ogni n, allora $m(\mathscr{P}(\mathbb{N})) = [0, m(\mathbb{N})]$; se si verifica la condizione $a_n > r_n$ per un numero finito d'indici, allora $m(\mathscr{P}(\mathbb{N}))$ è un plurintervallo chiuso; se infine, si ha $a_n > r_n$ per infiniti indici, $m(\mathscr{P}(\mathbb{N}))$ è un insieme tipo Cantor (l'insieme di Cantor, di misura nulla o di misura positiva, si ottiene quando $a_n > r_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$). Per tali risultati cfr. [10].

Conseguentemente:

COROLLARIO (2.4). Per una generica misura limitata sulla σ-algebra $\mathscr{A}$ di parti di X, $\mu(\mathscr{A})$ sarà finito oppure coincide con $[0, \mu(X)]$, o è un'unione finita d'intervalli chiusi, ed è un insieme tipo Cantor solo nel caso in cui $\gamma \equiv 0$.

3. IL CODOMINIO DI UNA MASSA

Un primo risultato sul codominio di una massa è il seguente:

TEOREMA (3.1) Se μ è una massa sull'algebra $\mathscr{A}$, allora la chiusura del suo codominio $\overline{\mu(\mathscr{A})}$ coincide col codominio di una misura su una σ-algebra e quindi è del tipo descritto dal corollario (2.4).

DIM. Sia $\tilde{X}$ lo spazio di Stone associato ad $\mathscr{A}$ (cioé $\tilde{X}$ è l'insieme degli ultrafiltri su $\mathscr{A}$), $\tilde{A} = \{\beta \in \tilde{X} : A \in \beta\}$,

$$\tilde{\mathscr{A}} = \{\tilde{A} : A \in \mathscr{A}\}, \quad \tilde{\mu}(\tilde{A}) = \mu(A) \quad \forall A \in \mathscr{A}.$$

$\tilde{\mathscr{A}}$ è base di una topologia su $\tilde{X}$, che rende $\tilde{X}$ spazio topologico compatto e totalmente sconnesso (tipo l'insieme di Cantor), inoltre $\tilde{\mathscr{A}}$ è l'algebra dei clopen di $\tilde{X}$.

Questo porta che $\tilde{\mu}$ è una misura sull'algebra $\tilde{\mathscr{A}}$. Infatti la proprietà (di σ-additività):

$$\{\tilde{A}_n ;\ n \in \mathbb{N}\} \subset \tilde{\mathscr{A}},\ \tilde{A}_n \cap \tilde{A}_m = \emptyset \text{ per } n \neq m, \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \tilde{A}_n \in \tilde{\mathscr{A}} \Longrightarrow \tilde{\mu}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \tilde{A}_n) = \sum_{n\geq 1} (\tilde{A}_n)$$

è vera, in quanto la premessa è sempre falsa. Se per assurdo esistesse una successione di insiemi non vuoti disgiunti di $\tilde{\mathscr{A}}$, tale che $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \tilde{A}_n = \tilde{A} \in \tilde{\mathscr{A}}$, sarebbe $\tilde{A}$ chiuso e quindi compatto ed esisterebbe allora un $I \subseteq \mathbb{N}$ finito tale che $\tilde{A} = \bigcup_{n\in I} \tilde{A}_n$, contro le ipotesi fatte.[1]

---

(1) Un'altra dimostrazione della σ-additività di μ, si ottiene dal

Teorema di Alexandroff:
Siano $\mu : \mathscr{A} \to \mathbb{R}$ massa sull'algebra $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ ed X spazio topologico compatto. Se μ è regolare (cioé $\forall A \in \mathscr{A}$ e $\forall \varepsilon > 0$ $\exists F, G \in \mathscr{A}$ $\ni'$ $\bar{F} \subset A \subset \mathring{G}$ e $|\mu|(G-F) < \varepsilon$), allora μ è σ-additiva.
Basta infatti osservare che nel caso in esame μ è regolare, in quanto $\forall A \in \mathscr{A}$ basta scegliere $\bar{F} = \mathring{G} = \tilde{A}$.

Consideriamo ora la σ-algebra generata da $\hat{\mathscr{A}}$ e denotiamo la con $\tilde{\mathscr{A}}_\sigma$ (si può provare che $\tilde{\mathscr{A}}_\sigma$ è la σ-algebra di Baire in $\check{X}$, cioé la più piccola σ-algebra su $\check{X}$, rispetto alla quale ogni funzione reale e continua su $\tilde{X}$ è misurabile).

Prolunghiamo ora $\breve{\mu}$ su $\tilde{\mathscr{A}}_\sigma$ ponendo $\forall A \in \tilde{\mathscr{A}}_\sigma$:

$$\breve{\mu}(A) = \inf \{ \sum_{i \geq 1} \mu(A_i);\ A_i \in \mathscr{A} \text{ e } A \subset \bigcup_{i \geq 1} \tilde{A}_i \}.$$

Orbene tale prolungamento è una misura su una σ-algebra, con la proprietà:

$$\breve{\mu}(\tilde{\mathscr{A}}_\sigma) = \overline{\breve{\mu}(\tilde{\mathscr{A}})} = \overline{\mu(\mathscr{A})}.$$

c.v.d.

OSSERVAZIONE (3.1) Il teorema precedente è una conseguenza del teorema di rappresentazione di Stone (cfr. [9] pag. 20) e ci dice che una massa definita su un'algebra $\mathscr{A}$, può sempre essere riguardata come una misura definita su un'algebra $\tilde{\mathscr{A}}$ isomorfa ad $\mathscr{A}$.

OSSERVAZIONE (3.2) Dalla decomposizione (1.1) e da quanto stabilito per le misure, si può congetturare che le masse più vicine alle misure, almeno per le proprietà del codominio, siano quelle dove gli ultrafiltri β_n generano μ-atomi.

In [5] si prova che se μ è una massa sull'algebra $\mathscr{A}$ e se $\mu(\mathscr{A}_A)$ è chiuso per ogni $A \in \mathscr{A}$, allora per ogni β ultrafiltro di $\mathscr{A}$, detto $a_\beta = \inf \{ \mu(A);\ A \in \beta \}$, se è $a_\beta > 0$, allora esiste $A_\beta \in \beta$, μ-atomo, tale che $\mu(A_\beta) = a_\beta$.

Chiamiamo **proprietà di chiusura forte** (p.c.f.) la proprietà: $\mu(\mathscr{A}_A)$ è chiuso per ogni $A\in\mathscr{A}$, e chiamiamo **masse fortemente atomiche** (cfr. [5]) le masse atomiche $\mu \geq 0$ per le quali:

$\forall\beta$ massa a due valori con $0 \leq \beta \leq \mu$, $\exists A_\beta$ μ-atomo tale che $\beta(A_\beta)>0$. Con tali definizioni, la proprietà provata in [5] si può così enunciare:

TEOREMA (3.2) Se μ è una massa non continua sull'algebra $\mathscr{A}$, allora:

(μ ha la p.c.f.) $\Longrightarrow$ (μ è fortemente atomica).

Si provano facilmente le seguenti caratterizzazioni (cfr. [11]).

PROPOSIZIONE (3.3). Se $\mu: \mathscr{A} \to [0,+\infty)$ è una massa sull'algebra $\mathscr{A}$, con decomposizione (1.1) $\mu=\gamma+\alpha$ con $\alpha=\sum_{n\geq 1} a_n\beta_n$, allora:

(μ fortemente atomica) $\Longleftrightarrow$ ($\forall n\in\mathbb{N}$ $\exists A_n\in\mathscr{A}$ tale che $\gamma(A_n)=0$, $\beta_n(A_n)=1$ e $\beta_m(A_n)=0$ per $m\neq n$) $\Longleftrightarrow$ (α è fortemente atomica e γ si annulla sugli atomi di α) $\Longleftrightarrow$ (gli ultrafiltri $\{\beta_n; n\in\mathbb{N}$ considerati come punti dello spazio di Stone $\check{X}$, formano un insieme discreto e γ si annulla sugli atomi di α).

Inoltre se $\mathscr{A}$ è una σ-algebra:

(μ fortemente atomica) $\Longleftrightarrow$ ($\exists$ $\{A_n;\ n=0,1,2,\dots\}$ partizione di X in $\mathscr{A}$ tale che $\gamma(A_n)=0$, $\beta_n(A_n)=1$, $\beta_m(A_n)=0$ per $m\neq n$ ed $n>0$ ed α è σ-additiva su $\{A_n,\ n=0,1,2,\dots\}$).

Un classico esempio di massa fortemente atomica è dato da $\mu=\gamma+\sum_{n\geq 1} a_n\beta_n$ definita su $\mathscr{A}=\mathscr{P}(\mathbb{N})$ con γ continua e limitata,

$\beta_n = \{A \subseteq \mathbb{N};\ n\in A\}$ e $\sum_{n\geq 1} a_n = a\in\mathbb{R}$.

Mentre se a γ si sostituisce $\beta_0 = \{A \subseteq \mathbb{N};\ A^c$ finito$\}$, allora μ è atomica (ogni $\{n\}$ è un μ-atomo), ma non fortemente atomica (non esiste un μ-atomo A per il quale $\beta_0(A) = 1$).

E' naturale chiedersi se vale l'implicazione opposta del teorema (3.2), almeno nel caso in cui $\mathscr{A}$ sia una σ-algebra. La risposta è positiva e precisamente si prova (cfr. [11]):

TEOREMA (3.4). Se μ è una massa sulla σ-algebra $\mathscr{A}$, allora ($|\mu|$ verifica la p.c.f.) $\Longleftrightarrow$ (μ è continua oppure è fortemente atomica)

4. OSSERVAZIONI CONCLUSIVE

Dai risultati del paragrafo precedente si possono dedurre le seguenti osservazioni:

OSSERVAZIONE (4.1). Per le masse che non sono continue oppure non sono fortemente atomiche, sicuramente esiste $A\in\mathscr{A}$ tale che $\mu(\mathscr{A}_A)$ non è chiuso.

OSSERVAZIONE (4.2). $\mu(\mathscr{A}_A)$ quando è chiuso, è necessariamente di un certo tipo, cioé è finito o è un'intervallo chiuso o è un plurintervallo chiuso oppure un insieme tipo Cantor, esattamente come nel caso delle misure definite su σ-algebre, che tra l'altro, quando non sono continue, sono fortemente atomiche.

OSSERVAZIONE (4.3). Nel caso di masse a valori reali, il concetto di atomo secondo Constantinescu (cfr. [12])[(1)], coincide con l'ultrafiltro legato alla massa β_n, nella decomposizione (1.1).

In generale, come abbiamo visto, tale ultrafiltro non dà origine ad un atomo per μ, ma questo accade se μ è fortemente atomica. Pertanto per le masse fortemente atomiche, il concetto usuale di atomo coincide con quello introdotto da Constantinescu.

OSSERVAZIONE (4.4). G.H.Greco in [13] ha provato che una condizione necessaria per la completezza dello spazio $L^p(X,\mathscr{A},\mu)$ $(1 \leq p < +\infty)$, è che per la massa μ sia verificata la p.c.f. Quindi le masse candidate per la completezza di L^p, sembrerebbero essere le masse continue o quelle fortemente atomiche, almeno se $\mathscr{A}$ è una σ-algebra.

Da alcuni risultati di G.H.Greco, K.S.P.Bhaskara Rao e di G.Letta si deduce che se $\mu = \sum_{n\geq 1} a_n \beta_n$ con β_n a valori $\{0,1\}$:

$$L^p(X,\mathscr{A},\mu) \quad \text{completo} \Longrightarrow \text{fortemente atomica}$$

e se $\mathscr{A}$ è una σ-algebra, allora vale l'equivalenza.

---

(1) (nota di pag. 11)

Sia $\mathscr{A}$ un'algebra ed $\mathscr{I}$ un suo ideale (ideale di sottoinsiemi nulli). Denotiamo con

$\Lambda(\mathscr{I}) = \{\mathscr{B} \subset \mathscr{A} - \mathscr{I} : \mathscr{B} \neq \emptyset$ e $\mathscr{B}$ chiuso per l'intersezione finita $\}$

(quindi $\mathscr{B}$ è una base di filtro in $\mathscr{A} - \mathscr{I}$).

Constantinescu chiama **atomi** in $\mathscr{A}$ rispetto ad $\mathscr{I}$ gli elementi massimali di $\Lambda(\mathscr{I})$, mentre chiama **insiemi atomici**, gli insiemi $A \in \mathscr{A} - \mathscr{I}$ tali che

$$\forall B \in \mathscr{A}_A : B \in \mathscr{I} \vee A-B \in \mathscr{I}$$

Se μ è una massa sull'algebra $\mathscr{A}$ a valori in un gruppo commutativo topologico e di Hausdorff, l'insieme

$$\mathscr{M}(\mu) = \{A \in \mathscr{A} : \forall B \in \mathscr{A}_A : \mu(B) = 0\}$$

è un ideale di $\mathscr{A}$ e chiameremo **atomo** di μ, ogni atomo rispetto a $\mathscr{M}(\mu)$.