VIII. Piani di traslazione di ordine q^2, q pari, che hanno 2-sottogruppi di Baer di ordine maggiore di $q^{1/2}$.

Sia π un piano di traslazione di ordine $p^{2r} = q^2$, $q = p^r$, p un primo. Supponiamo che π abbia collineazioni di Baer di ordine p (nel complemento di traslazione).

Foulser [12] ha studiato questa situazione quando $p > 2$.

(8.1) Teorema (Foulser).

Sia B il gruppo che è generato dai p-elementi di Baer nel complemento di traslazione di un piano finito di traslazione π. Allora, per B si hanno le seguenti possibilita:

(1) B *é abeliano elementare,*

(2) B è *isomorfo a* $SL(2,p^r)$ *dove l'ordine di* π è p^s *e* $r|s$,

3) B è *isomorfo a* $SL(2,5)$ *e* $p = 3$.

Inoltre, se $p > 3$, *tutti i sottopiani di Baer (corrispondenti) sono sulla stessa rete* $\mathfrak{D}$ *di ordine* $p^{s/2}+1$ *e non si incrociano. Se* $p = 3$ *e se c'è un p-gruppo di Baer di ordine* ≥ 9 *i sottopiani di Baer sono sulla stessa rete* $\mathfrak{D}$ *di ordine* $p^{r/2}+1$ *e non si incrociano.*

Se $p = 2$, la situazione è differente. Per esempio, ci sono due piani di traslazione di ordine 16 che ammettono $PSL(2,7)$ dove le involuzioni sono di Baer (i piani di Lorimer-

Rahilly e Johnson-Walker (si vedi [43])). Inoltre, il piano di ordine 16 di Dempwolff (si veda anche [43]) ammette SL(2,4) e i sottopiani di Baer che sono fissati da involuzioni non sono sulla stessa rete di ordine 4+1.

Eppure, per dimensione 2,

<u>(8.2) Teorema</u> (Johnson, Ostrom [48]).

Sia π *un piano di traslazione di ordine* $q^2 = 2^{2r}$ *con nucleo* $K \cong GF(q)$. *Sia* $\mathcal{G}$ *un gruppo di collineazioni nel complemento lineare e supponiamo che tutte le involuzioni siano di Baer. Se* $\mathcal{G}$ *non è risolubile allora c'è un sottogruppo di* $\mathcal{G}$ *che è isomorfo a* $SL(2,2^s)$, $s|r$. *Inoltre, se* $\mathcal{G}$ *è riducible allora ogni 2-sottogruppo di Sylow fissa un sottopiano di Baer (cioè, fissa ogni punto) e tutti i sottopiani di Baer sono sulla stessa rete* $\mathcal{D}$ *di ordine* 2^r+1 *e inoltre* $\mathcal{D}$ *è derivabile.*

Recentemente, Dempwolff [9], 1982, ha studiato il problema di determinare i gruppi che sono generati da grandi 2-gruppi di Baer.

Cioè, sia $\mathcal{G}$ un sottogruppo nel complemento di traslazione di un piano di traslazione π di ordine pari $q^2 = 2^n$. Diciamo che un <u>B-gruppo</u> in $\mathcal{G}$ è un qualunque 2-gruppo E dove $|E| > \sqrt{q}$ e Fix(E) è un sottopiano di Baer. Allore, sia Σ il sistema dei B-gruppi in $\mathcal{G}$ con ordine massimo. Sia $\mathcal{G}^* = \langle\Sigma\rangle$.

Dempwolff [9] ha provato il seguente teorema:

<u>(8.3) Teorema</u> (Dempwolff).

Assumiamo che $\mathcal{G}^* \neq \langle 1 \rangle$. *Sia* N *il sottogruppo generato dalle elazioni. Allora, abbiamo l'uno o l'altro, se* $n \geq 4$.

(i) $n = 4$, $\mathcal{G}^* \cong SL(3,2)$ *e* π *deve essere uno dei piani di Lorimer-Rahilly o Johnson-Walker di ordine* 16.

(ii) $N \subseteq Z(\mathcal{G}^*)$ *e quindi* N *deve essere un gruppo di elazioni con asse singolo* $\mathcal{L}$. *Inoltre, sia* $\overline{\mathcal{G}^*} = \mathcal{G}^*/N$. *Allora, per* $\overline{\mathcal{G}^*}$ *abbiamo una delle seguenti possibilità:*

(a) $\overline{\mathcal{G}^*} \cong SL(2,2^s)$ *per* $2^s \geq |E|$ (E *è un* 2-*gruppo di Baer di ordine massimo).*

(b) $\overline{\mathcal{G}^*}$ *è un gruppo abeliano elementare.*

(c) $\overline{\mathcal{G}^*} \geq \overline{M}$ *dove* $\overline{M}$ *è un sottogruppo normale e abeliano elementare di ordine* q *e* $\overline{\mathcal{G}^*}/\overline{M} \cong D_{2r}$ *per* r *dispari. Se* $N = \langle 1 \rangle$ *allora* $\mathcal{G}^*$ *centralizza un sottopiano di ordine* $\sqrt{q}$ *e se* $N \neq \langle 1 \rangle$ *allora* $\mathcal{G}^*$ *centralizza una sottoretta di* $\sqrt{q}$ *punti.*

<u>(8.4) Definizione</u>.

Sia π un piano di traslazione di ordine pari. Se π ammette un gruppo $\mathcal{G}^*$ come in (8.3), diciamo che $\mathcal{G}^*$ un gruppo di <u>Dempwolff</u>.

Possiamo provare:

<u>(8.5) Teorema</u> (Jha, Johnson [28]).

Sia π *un piano di traslazione di ordine pari che ammetta un gruppo* $\mathcal{G}^*$ *di Dempwolff.* (a) *Se* $\mathcal{G}^*$ *non è risolubile allora* π *è un piano di Hall o un piano di ordine* 16 *(Lorimer- Rahilly, Johnson-Walker o Dempwolff).* (b) *Se* $\mathcal{G}^*$ *è risolubile e contiene un* B-*gruppo di ordine* $\neq \sqrt{2q}$ *allora* $\mathcal{G}^*$ *è un* B-*gruppo abeliano elementare.*

<u>Dimostrazione</u>. Per questo teorema, si usa (4.3)(1). Se c'è un 2-gruppo $\mathcal{B}$ di Baer tale che $|\mathcal{B}| \geq 2\sqrt{q}$ allora ogni gruppo di elazioni $\mathcal{E}$ ha ordine minore o eguale a 2.

Qui, daremo solo una traccia e solo per il caso (a) e per l'ordine > 16. Allora, per (8.3)(ii) si deve avere $N \subseteq Z(\mathcal{G}^*)$ e $\mathcal{G}^*/N \cong SL(2,2^s)$ per $2^s \geq |E|$ dove E è un 2-gruppo di Baer di ordine massimo e $|E| > \sqrt{q}$.

<u>(8.6) Lemma</u>.

$\mathcal{G}^* = N \cdot J$ *ove* $J \cong SL(2,2^s)$ *e* $2^s \geq |E| > \sqrt{q}$.

<u>Dimostrazione</u>. Si usa la teoria dei moltiplicatori di Schur (si veda [28] sezione 4 (result 1)) perché $N \subseteq Z(\mathcal{G}^*)$ e N è abeliano. Sia $(\mathcal{G}^*)'$ il sottogruppo derivato di $\mathcal{G}^*$. Allora, $(\mathcal{G}^*) \cap N = \langle 1 \rangle$. Allora, $\mathcal{G}^* = (\mathcal{G}^*)' \cdot N$ e $(\mathcal{G}^*)' \cong SL(2,2^s)$.

<u>(8.7) Lemma</u>.

Ogni 2-*sottogruppo di Sylow* $\mathcal{S}$ *di* J *è un* B-*gruppo.*

Dimostrazione Supponiamo che ciò sia falso. Allora, ci sono due B-gruppi in $\mathcal{S}$. Cioè, $\mathcal{S}$ è abeliano elementare e contiene un B-gruppo E. Se $\sigma \in \mathcal{S}-E$ allora $Fix(\sigma)$ è un sottopiano di Baer. Ogni due involuzioni in $\mathcal{S}$ si coniugano in J. Sia $\tau \in E$ tale che ci sia $h \in J$ con $\tau^h = \sigma$ e $h \in \mathcal{N}_J(\mathcal{S})$.

Allora E^h fissa ogni punto di $Fix(\sigma)$. Ma, $E^h \cap E = \langle 1 \rangle$ perché E fissa ogni punto di un qualche sottopiano π_0 e $\pi_0 \neq Fix(\sigma)$ se $|E|$ è massimo.

Quindi, $|\mathcal{S}| \geq |E|^2 > (\sqrt{q})^2 = q$. Questo è una contraddizione per (7.8) perché se π è Desarguesiano allora π non ha gruppi di Baer di ordine > 2.

(8.8) Lemma.

Se i sottopiani di Baer in Σ *(si veda* (8.3)) *non si incrociano, allora sono sulla stessa rete* $\mathcal{N}$ *di ordine* 2^r+1. *Allora,* J *fissa tutte le componenti di* $\mathcal{N}$.

Dimostrazione. (Si veda Foulser-Johnson [15].)

(8.9) Lemma.

J *deve fissare una componente.*

Dimostrazione. Per (8.8), si può assumere che i sottopiani di Baer si incrocino. Ma, J è generato da due 2-gruppi di Sylow e per (8.7), ogni 2-sottogruppo di Sylow è un B-gruppo

Allora, J deve fissare una componente $\mathcal{L}$.

(8.10) Lemma.

Sia $U \subseteq J$ di ordine 2^s-1. Siano B_1, B_2 due 2-gruppi di Sylow che sono normalizzati da U. Per ogni gruppo B_i, c'è un sottopiano π_i di Baer tale che ogni punto di π_i è fissato da B_i. Inoltre, U agisce fedelmente su π_i, $i = 1,2$.

Dimostrazione. Sia $g \in U$ un elemento che fissa ogni punto di π_1. Allora, per un qualche elemento h, g^h fissa ogni punto di π_2 e quindi fissa π_2. É chiaro che anche g^h è in U. Ma, $|\langle g\rangle| = |\langle g^h\rangle|$ e U è un gruppo ciclico. Quindi, $\langle g\rangle = \langle g^h\rangle$ cosicché $g = 1$ $(\pi_1 \neq \pi_2)$.

(8.11) Lemma.

U fissa due componenti di π_i, $i = 1,2$.

Dimostrazione. π_i è Desarguesiano per Foulser [13] perché $|B_i| > \sqrt{q}$ e l'ordine di B_i è l'ordine del nucleo di π_i. U fissa $\mathcal{L}$ cosicché deve fissare ancheun'altra componente $\mathcal{M}$ di π_i perché $U \subseteq GL(2,q)$ per (8.10).

(8.12) Lemma.

$J \cong SL(2,2^b)$.

Dimostrazione. Se ciò non è vero, c'è un elemento $g \in U$

tale che $|g| = u$ è un divisore p-primitivo di 2^s-1 dove $\sqrt{q} < 2^s < q$. Cioè, $2^s < q$ perché se $2^s \geq q$ si può usare (7.7) e (7.8) per mostrare che π è Desarguesiano. Ma, in questo caso $|B\text{-gruppo}| \leq 2$.

U permuta i punti su $\mathcal{L} \cap \pi_i$ per $i = 1,2$ e $|\mathcal{L} \cap \pi_i - \{O\}| = 2^r-1$. Se $u | 2^r-1$ allora, $u | 2^{(s,r)}-1$ il che implica $(s,r) = s$. Ma, $s > r/2$ perché $\sqrt{q} < 2^s$ cosicché abbiamo una contraddizione.

Quindi, un elemento g di ordine u fissa alcuni punti $\neq O$ su $\mathcal{L}$ e anche su $\mathcal{M}$ di π_i. π_i è Desarguesiano cosicché $\hat{g} = g|\mathcal{L} \in \mathrm{Aut}(GF(2^r))$. Quindi, $u = |\hat{g}| \,\big|\, r$. Sia $\mathcal{M}_g$ un complemento di Maschke di $\mathrm{Fix}(\hat{g})$ in $GF(2^r)$ e $|\mathcal{M}_g| = 2^t$. $\hat{g}$ agisce regolarmente su $GF(2^r)-\{O\}$ cosicché $u | 2^t-1$. Ora, non è possibile che $s > t$ e $u | 2^{(s,t)}-1$ cosicché $(s,t) \geq s$. Allora, $s | t$, ossia $sk = t$. Ma, $r > t = sk \geq s > r/2$ cosicché $2s > r > t = sk$. Quindi $h = 1$ e $s = t = \dim(\mathcal{M}_g)$ su $GF(2)$.

Ora, $s = r-1$. Cioè, sia $\hat{h} \in \mathrm{Aut}(GF(2^r))$ dove $|\hat{h}| = r/u = v$. Supponiamo $v \neq 1$. Allora, $\mathrm{Fix}(\hat{h})$ è un $\hat{g}$-modulo e

$$\mathrm{Fix}(\hat{h}) = (\mathrm{Fix}(\hat{h})) \cap (\mathrm{Fix}(\hat{g})) \oplus M_1$$

dove M_1 è un complemento di Maschke di $\mathrm{Fix}(\hat{g})$ su $\mathrm{Fix}(\hat{h})$.

$\hat{g}$ deve fissare $\mathrm{Fix}(\hat{h})$ e M_1 allora permuta i punti di $M_1-\{O\}$ semiregolarmente. Questo implica che $u | (|M_1|-1, 2^s-1)$

cosicché $|M_1| \geq 2^s > 2^{r/2}$, il che non è possibile se $Fix(\hat{h}) \neq \langle 1 \rangle$ a meno che $|M_1| = 1$ e $Fix(\hat{h}) \subseteq Fix(\hat{g})$. In questo caso, $|\hat{h}| = r/u$, quindi, $Fix(\hat{h}) = GF(2^u)$ e $Fix(\hat{g}) = GF(2^{r-s})$ (perché $GF(2^r) = Fix\ \hat{g} \oplus M_g$, $\dim.M_g = s$, e $Fix\ \hat{g}$ è un sottocampo di $GF(2^r)$). Eppure, $u|r-s$ e $u|r$ cosicché $u|s$.

Ma inoltre $s = r-1$ e $(r,r-1) \neq 1$. Allora, $Fix(\hat{h}) = \langle 1 \rangle$ e $u = r$, $s = r-1$, $|g| = r$.

Quindi, $g|\pi_i$ fissa un sottopiano $\pi_{0,i}$ di ordine 2 cosicché U deve fissare $\pi_{0,i}$ per $i = 1,2$. Perciò, U fissa ogni punto di $\pi_{0,i}$.

Allora U è isomorfo a un sottogruppo di automorfismi di $GF(2^r)$ cosicché $|U| = 2^s-1|r = s+1$, il che implica $2 \geq s > \sqrt{q}$—una contradizione. Per finire la dimostrazione si deve studiare il gruppo $SL(2,2^b)$. Per questo si veda [28].

Questo teorema (8.5(a)) è vero anche per piani di ordine dispari:

<u>(8.13) Teorema</u> (Jha, Johnson [29]).

Sia π *un piano di traslazione di ordine* p^{2r}, p *dispari. Supponiamo che ci siano due* p-*gruppi* $\mathcal{B}_i$, $i = 1,2$ *di ordine uguale o maggiore di* $p^{r/2}$ $(|\mathcal{B}_1| = |\mathcal{B}_2| > p^{r/2})$ *e ogni gruppo* $\mathcal{B}_i$ *fissi un sottopiano di Baer* π_i, $i = 1,2$. *Allora,* π *è un piano di Hall e* $\langle \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \rangle \cong SL(2,p^r)$.