## VI. Piani di traslazione di ordine $q^2$ che hanno un gruppo di collineazione di ordine $q^2$ che non agisce regolarmente.

Sia $\Sigma$ il piano di Desargues di ordine $q^2$. Sia $F \cong GF(q^2)$ e $K\ (\subseteq F) \cong GF(q)$. Si rappresenti $\Sigma$ su $K$ come $\{(x_1,x_2,y_1,y_2) \mid x_i, y_i \in K,\ i = 1,2\}$.

Sia $\mathcal{E} = \{(x,y) \longrightarrow (x, x\alpha+y)$ in $\Sigma$ dove $\alpha \in F\}$.

Sia $\sigma : (x,y) \longrightarrow (x^q, y^q)$. Se $\{t,1\}$ è una base per $F$ su $K$ e $(t\alpha+\beta)^q = (t+\beta_0)\alpha+\beta = t\alpha+\beta_0\alpha+\beta$ allora abbiamo $x^q = (\alpha,\beta)^q = (\alpha, \beta_0\alpha+\beta) = (\alpha,\beta)\begin{bmatrix} 1 & \beta_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Sia $\mathcal{G} = \langle \mathcal{E}, \sigma \rangle$ cosicché $|\mathcal{G}| = 2 \cdot q^2$. <u>Nota</u>: $\mathcal{G}$ è in $GL(4,q)$ e se $q$ è pari c'è un sottogruppo $\hat{\mathcal{G}}$ di ordine $q^2$ tale che $\sigma \in \hat{\mathcal{G}}$.

Per esempio per ogni sottogruppo <u>additivo</u> $\hat{K}$ di ordine $q/2$, $\{t\hat{K}+K\}$ è un sottogruppo additivo di ordine $q^2/2$ che è normalizzato da $\sigma$.

$\hat{\mathcal{G}}$ è un gruppo di ordine $q^2$ in $GL(4,q)$ che ha due orbite sulla retta $\ell_\infty - \{(\infty)\}$ di $\Sigma$ di ordine $q^2/2$.

Proviamo che questo è anche il caso generale.

<u>(6.1) Teorema</u>.

*Sia $\pi$ un piano di traslazione di ordine $q^2$ e nucleo $GF(q)$ che ha un gruppo $\mathcal{G}$ di collineazioni di ordine $q^2$ nel complemento lineare di traslazione. Allora, $\mathcal{G}$ fissa un punto all'infinito $(\infty)$ e vale l'uno o l'altro:*

<u>Dimostrazione</u>.
$$\begin{bmatrix} 1 & T(b) & F(b) & f(b) \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T(b) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & T(a) & F(a) & f(a) \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T(a) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

per $F(x) = x+m(x)+xT(x)$ con $x \in \Sigma$,

$$= \begin{bmatrix} 1 & T(b)+T(a) & (F(a)+F(b)+aT(b), & (f(a)+F(b)T(a)+f(b)) \\ 0 & 1 & a+b & b(T(a) \\ 0 & 0 & 1 & T(b)+T(a) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$T(b)+T(a) = T(b+a)$ o $T(b+a) + 1$ per ogni $(b,a) \in \Sigma \times \Sigma$.

Da (6.16),

$$(6.20) \qquad F(a) + F(b) + aT(b) = bT(a) + (a+b) + m(a+b) + (T(a)+T(b))(a+b)$$

e

$$(6.21) \qquad f(a) + F(b)T(a) + f(b) = (T(b))+T(a))bT(a) + f(a+b) + m(bT(a))$$

dove $F(x) = x + m(x) + xT(x)$, $x \in \Sigma$.

$$(6.21) \Rightarrow f(a) + (b+m(b)+bT(b)))T(a) + f(b) = (T(b)+T(a))bT(a) + f(a+b) + m(bT(a))$$

$$\Leftrightarrow f(a+b) = f(a) + f(b) + m(bT(a)) + bT(a)^2 + T(a)(b+m(b))$$

per $a, b \in \Sigma$.

Ora, consideriamo le componenti

$$\mathcal{L}_{u,v} \equiv \left[ y = x \begin{bmatrix} u+v+m(v), & f(v)+m(u) \\ v & , \quad u \end{bmatrix} \right] \quad \text{per} \quad v \in K-\Sigma.$$

$$\mathcal{L}_{0,v} \xrightarrow{\tau_b} \left[ x \begin{bmatrix} 1 & T(b) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, x \left[ \begin{bmatrix} F(b) & f(b) \\ b & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v+m(v), & f(v) \\ v & , \quad 0 \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} 1 & T(b) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right]$$

$$= \left[ x \begin{bmatrix} 1 & T(b) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, x \begin{bmatrix} (F(b)+v+m(v)), & f(b)+(v+m(v))T(b)+f(v) \\ b+v & , \quad vT(b) \end{bmatrix} \right]$$

$$\in \left[ y = x \begin{bmatrix} (F(b)+v+T(b)(b+v) & , \; (f(b)+(v+m(v))T(b)+f(v) \\ \quad +m(v)) & \quad +vT(b)^2 \\ b+v & , \quad vT(b) \end{bmatrix} \right].$$

Questo elemento deve essere della forma

$$\left[ y = x \begin{bmatrix} \bar{u}+\bar{v}+m(\bar{v}), & f(\bar{v})+m(\bar{u}) \\ \bar{v} & \bar{u} \end{bmatrix} \right].$$

Quindi,

(6.22) $$(F(b)+v+T(b)(b+v)+m(v)) = vT(b)+(b+v)+m(b+v)$$

(6.23) $$f(b)+(v+m(v))T(b)+f(v)+vT(b)^2 = f((b+v)+m(vT(b))$$

per $v \in K-\Sigma$ e $b \in \Sigma$. Da (6.23), (6.19) è provato.

<u>(6.24) Teorema</u>. *Fondamentale per l'orbita non-regolare.*

*Sia* $\pi$ *un piano di traslazione di ordine* $q^2 = 2^{2r}$. *Il*

*nucleo di* $\pi$ *sia* $K \cong GF(q)$ *e supponiamo che* $\pi$ *ammetta un gruppo non abeliano* $\mathcal{G}$ *di collineazioni di ordine* $q^2$ *contenuto nel complemento lineare di traslazione. Infine, supponiamo che* $\mathcal{G}$ *non abbia un'orbita regolare sulla retta all'infinito. Allora, esiste un sottogruppo additivo* $\Sigma$ *di* $K$ *di ordine* $q/2$ *ed esistono funzioni* $T$ *su* $\Sigma$ *e* $m, f$ *su* $K$ *tali che* $\mathcal{G}$ *può essere rappresentato nella forma seguente:*
$\mathcal{G} = \langle \tau_b, \sigma_u, \tau \rangle$ *dove* $Z(\mathcal{G}) = \langle \sigma_u \rangle$,

$$\tau_b = \begin{bmatrix} 1 & T(b), & b+m(b)+T(b)b, & f(b) \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T(b) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{per} \quad b \in \Sigma,$$

$$\sigma_u = \begin{bmatrix} I & \begin{bmatrix} u & m(u) \\ 0 & u \end{bmatrix} \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad \text{per} \quad u \in K \quad (\text{cosicché} \quad |Z(\mathcal{G})| = q.$$

$$\tau = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$ Inoltre,

(0) *Le componenti di* $\pi$ *hanno la forma*

$$x = 0,$$

$$y = x\begin{bmatrix} u+v+m(v), & f(v)+m(u) \\ v & u \end{bmatrix}$$

*e* $\pi$ *è un piano di Baer-elazione di ordine* $q^2$ *e tipo* $(q,2)$.

(1) $f$ *è uno-uno.*

(2) $m$ *è additiva e* $m(0) = m(1) = 0$.