VI. Piani di traslazione di ordine q^2 che hanno un gruppo di collineazione di ordine q^2 che non agisce regolarmente.

Sia Σ il piano di Desargues di ordine q^2. Sia $F \cong GF(q^2)$ e $K\ (\subseteq F) \cong GF(q)$. Si rappresenti Σ su K come $\{(x_1,x_2,y_1,y_2) \mid x_i,y_i \in K,\ i = 1,2\}$.

Sia $\mathcal{E} = \{(x,y) \longrightarrow (x,x\alpha+y)$ in Σ dove $\alpha \in F\}$.

Sia $\sigma : (x,y) \longrightarrow (x^q,y^q)$. Se $\{t,1\}$ è una base per F su K e $(t\alpha+\beta)^q = (t+\beta_0)\alpha+\beta = t\alpha+\beta_0\alpha+\beta$ allora abbiamo $x^q = (\alpha,\beta)^q = (\alpha,\beta_0\alpha+\beta) = (\alpha,\beta)\begin{bmatrix} 1 & \beta_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Sia $\mathcal{G} = \langle \mathcal{E},\sigma \rangle$ cosicché $|\mathcal{G}| = 2 \cdot q^2$. <u>Nota</u>: $\mathcal{G}$ è in $GL(4,q)$ e se q è pari c'è un sottogruppo $\hat{\mathcal{G}}$ di ordine q^2 tale che $\sigma \in \hat{\mathcal{G}}$.

Per esempio per ogni sottogruppo <u>additivo</u> $\hat{K}$ di ordine $q/2$, $\{t\hat{K}+K\}$ è un sottogruppo additivo di ordine $q^2/2$ che è normalizzato da σ.

$\hat{\mathcal{G}}$ è un gruppo di ordine q^2 in $GL(4,q)$ che ha due orbite sulla retta $\ell_\infty - \{(\infty)\}$ di Σ di ordine $q^2/2$.

Proviamo che questo è anche il caso generale.

<u>(6.1) Teorema</u>.

Sia π un piano di traslazione di ordine q^2 e nucleo $GF(q)$ che ha un gruppo $\mathcal{G}$ di collineazioni di ordine q^2 nel complemento lineare di traslazione. Allora, $\mathcal{G}$ fissa un punto all'infinito (∞) e vale l'uno o l'altro:

(1) $\mathcal{G}$ *ha un'orbita regolare su* $\ell_\infty - \{(\infty)\}$ (*di ordine* q^2)

o

(2) q *è pari e* $\mathcal{G}$ *ha due orbite su* $\ell_\infty - \{(\infty)\}$ *di ordine* $q^2/2$.

Dimostrazione.

Deriviamo la dimostrazione dai seguenti lemmi:

Assumiamo $\mathcal{G}$ non sia transitivo su $\ell_\infty - \{(\infty)\}$. Per la sezione II (2.1), q deve essere pari.

(6.2) Lemma.

Sia $Z(\mathcal{G})$ il centro di $\mathcal{G}$. Allora, (1) $|Z(\mathcal{G})| \le q$ o (2) $\mathcal{G}$ è abeliano.

Dimostrazione.

In sezione XII, proveremo che se $\mathcal{G}$ è abeliano allora $\mathcal{G}$ è transitivo su $\ell_\infty - \{(\infty)\}$. Quindi possiamo assumere che $\mathcal{G}$ non sia abeliano.

Sia $\sigma \in Z(\mathcal{G})$ di ordine 2. Se Fix σ è un sottopiano di Baer allora $\mathcal{G}$ deve fissare q punti della componente di Fix σ (perché $\mathcal{G}$ è nel complemento lineare). Allora, $|\mathcal{G} \mid \text{Fix } \sigma| \le q$. Quindi, $|\mathcal{G}_{[\text{Fix } \sigma]}$ (il gruppo che fissa ogni punto di Fix σ)$| = q$.

D'altra parte il sottogruppo delle elazioni ha ordine $\ge q$ (sezione II (2.3)). Quindi, per la sezione IV (4.2)(2), $q \le 2$ perché $\mathcal{G}_{[\text{Fix } \sigma]}$ è un 2-gruppo di Baer. Quindi, le involuzioni di $Z(\mathcal{G})$ sono elazioni.

Possiamo rappresentare $\mathcal{G}$ nella forma $\left\{ \left| \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & A \end{array} \right| \right\}$ se si sceglie che un'involuzione di $Z(\mathcal{G})$ sia $\begin{bmatrix} I & I \\ 0 & I \end{bmatrix}$ (si veda sezione II) dove $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ per $a \in \lambda \subseteq K$ dove $|\lambda| = 2^{r-t}$ se $q = 2^r$.

Sia E il sottogruppo della elazioni di $\mathcal{G}$. $|E| = 2^{r+t}$, $0 \leq t \leq r$.

Se $t = r$ allora $\mathcal{G}$ è abeliano. Quindi, c'è un elemento $a \neq 0$ in K tale che $\sigma = \begin{bmatrix} 1 & a & b_1 & b_2 \\ 0 & 1 & b_3 & b_4 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{G}$. Sia anche $\tau = \begin{bmatrix} 1 & c & c_1 & c_2 \\ 0 & 1 & c_3 & c_4 \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{G}$. Se $c_3 = 0$ e $c \neq 0$ allora τ fissa i q^2-punti $\{(0, x_2, x_2c^{-1}, y_2)) \mid x_2, y_2 \in K\}$. Se $c_3 = 0$ e $c = 0$ allora $c_1 = c_4$ e (si veda <u>Dim. (2.8) e (2.9)</u> della sezione II) c_2 è $m(c_1)$ per una qualche funzione $m : K \longrightarrow K$.

Dunque, se $c_3 = 0$ allora $\tau = \begin{bmatrix} I & \begin{bmatrix} u & m(u) \\ 0 & u \end{bmatrix} \\ 0 & I \end{bmatrix}$ per un qualche u in K.

<u>(6.3) Lemma</u>.

Se $|E| = q$ *allora* $\mathcal{G}$ *è transitivo su* $\ell_\infty - \{(\infty)\}$.

<u>Dimostrazione</u>. Jha-Johnson [24].

Allora, $|E| = 2^{r+t}$, $t \geq 1$ e possiamo assumere $c_3 \neq 0$ e

$c = 0$ per un qualche elemento $\tau \in \mathcal{G}$. Infine, se

$$\rho = \begin{bmatrix} 1 & d & d_1 & d_2 \\ 0 & 1 & d_3 & d_4 \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in Z(\mathcal{G}) \quad \text{allora} \quad \rho\tau = \tau\rho \iff \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \iff c_3 = 0$$ se anche $d \neq 0$. Allora ogni elemento del centro è un' elazione. Se $|Z(\mathcal{G})| > q$. Allora, c'è un tale elemento $\tau \in Z(\mathcal{G})$. In questo caso, $\tau\sigma \neq \sigma\tau$.

Quindi, $|Z(\mathcal{G})| \leq q$ e anche

<u>(6.4) Lemma</u>.

$$Z(\mathcal{G}) = \left\{ \begin{bmatrix} I & \begin{bmatrix} u & m(u) \\ 0 & u \end{bmatrix} \\ 0 & I \end{bmatrix} \;\middle|\; u \in \lambda \ \text{e} \ m \ \text{è una funzione di} \ \lambda \subseteq K \right\}.$$

<u>(6.5) Lemma</u>.

Ci sono esattamente q *sottopiani di Baer che sono fissati da involuzioni di Baer.*

<u>Dimostrazione</u>.

$\mathcal{G}$ fissa q punti di $(x = 0)$. Allora, per $P \in \ell_\infty - \{(\infty)\}$, $\mathcal{G}_P \neq \langle 1 \rangle$ e $\mathcal{G}_P$ è un sottogruppo di Baer che fissa ogni punto di un sottopiano π_P di Baer. Sia $Q \in \pi_P \cap \{\ell_\infty - \{(\infty)\}\}$ cosicché $\mathcal{G}_P$ fissa Q. Quindi, $\mathcal{G}_P \subseteq \mathcal{G}_Q$ ma $\mathcal{G}_Q$ è anche di Baer cosicché $\mathcal{G}_P = \mathcal{G}_Q$.

(6.6) Lemma.

Sia $\sigma = \begin{bmatrix} 1 & a & b_1 & b_2 \\ 0 & 1 & b_3 & b_4 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *un' involuzione di Baer.*

Allora, $a \neq 0$ *e* $b_3 = 0$. σ *fissa ogni punto di* $\pi_k = \{(0, x_2, x_2k, y_2) \mid k = b_4a^{-1},\ x_2, y_2 \in K\}$.

Dimostrazione. Se $a = 0$ allora $\sigma \in E$. Supponiamo $a \neq 0$. Se σ fissa (x_1, x_2, y_1, y_2) allora, $(x_1, x_1a+x_2, x_1b_1+x_2b_3+y_1$ $x_1b_2+x_2b_4+y_1a+y_2) = (x_1, x_2, x_3, x_4)$. Quindi, $x_1 = 0$, $x_2b_3 = 0$. Se $x_2 = 0$ sempre allora σ è una collineazione centrale. Quindi, $b_3 = 0$. In questo caso, $x_2b_4 + y_1a = 0$ cosicché σ fissa ogni punto di $\{(0, x_2, x_2b_4a^{-1}, y_2) \mid x_2, y_2 \in K\}$.

Quindi, i q sottopiani di Baer sono π_k per $k \in K$.

(6.7) Lemma.

(1) $\mathcal{G}_{\pi_k} = \mathcal{G}_{\pi_a}$ *per tutti i* $k, a \in K$.

(2) *Gli elementi di* $\mathcal{G}_{\pi_k}$ *sono esattamente gli elementi di Baer di* $\mathcal{G}$ *e/o le elazioni nel centro.*

Dimostrazione.

$\rho = \begin{bmatrix} 1 & d & d_1 & d_2 \\ 0 & 1 & d_3 & d_4 \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ fissa $\pi_k \Leftrightarrow (0, x_2, x_2k, y_2) \longrightarrow$

$(0, x_2, x_2d_3+x_2k, x_2d_4+x_2kd+y_2)$ cosicché $d_3 = 0 \Leftrightarrow (0, x_2, x_2a, y_2)$ $\longrightarrow (0, x_2, x_2a, x_2d_4+x_2ad+y_2) \Leftrightarrow \rho$ fissa π_a. ρ è di

Baer $\Leftrightarrow d \neq 0$ e $d_3 = 0$ e è un' elazione $\Leftrightarrow d = 0$ cosicché con $d_3 = 0$, $\rho \in Z(\mathcal{G})$.

<u>(6.8) Lemma</u>.

Ci sono esattamente q *sottogruppi* $\mathcal{G}_{x_k}$ *per* $x_k \in \pi_k \cap \{\ell_\infty - \{(\infty)\}\}$.

<u>Dimostrazione</u>. $\mathcal{G}_P = \mathcal{G}_Q \Leftrightarrow P, Q \in \pi_k \cap \ell_\infty - \{(\infty)\}$ per un qualche $k \in K$.

<u>(6.9) Lemma</u>

Sia $\hat{\mathcal{G}}$ *il gruppo* $\mathcal{G}$ *quando* $\mathcal{G}$ *agisce su* $\{\mathcal{G}_{x_k} \mid k \in F\}$ *per coniugio. Sia* $\overline{\mathcal{G}}$ *il gruppo* $\mathcal{G}$ *quando* $\mathcal{G}$ *agisce su* $\{\pi_k \mid k \in F\}$. *Allora* $\hat{\mathcal{G}}$ *è isomorfo a* $\overline{\mathcal{G}}$ *come gruppo di permutazioni*.

Sia $h \in \mathcal{G}$ allora $\pi_{x_i} h = \pi_{x_j} \Leftrightarrow x_i h \in \pi_{x_j} \cap (\ell_\infty - \{(\infty)\})$ $\Leftrightarrow \mathcal{G}_{x_j} = \mathcal{G}_{x_i h}$. Ma, $\mathcal{G}_{x_i} h = \mathcal{G}_{x_i}^h$. Quindi, $\mathcal{G}_{x_j} = \mathcal{G}_{x_i h} \Leftrightarrow$ $\mathcal{G}_{x_j} = \mathcal{G}_{x_i}^h$.

<u>(6.10) Lemma</u>.

Sia $|\mathcal{G}_{\pi_k}| = 2^d$ *per* $1 \leq d \leq 2r$ *se* $q = 2^r$. *La lunghezza dell'orbita di* π_k *in* $\mathcal{G}$ *allora è* 2^{2r-d} *e ogni orbita di* π_a *ha lunghezza* 2^{2r-d} *Quindi, ci sono* $2^r/2^{2r-d} = 2^{d-r}$

orbite di sottopiani di Baer

Dimostrazione. (6.7).

(6.11) Lemma.

Siano $\Sigma_1, \cdots, \Sigma_{2^{d-r}}$ *le orbite di* $\{\pi_k \mid k \in K\}$. *Sia* $y_i \in \Sigma_i \cap (\ell_\infty - \{(\infty)\})$ *per ogni* $i = 1, 2, \cdots, 2^{d-r}$. *Allora, ci sono* 2^{2r-d} *gruppi* $\mathcal{G}_{x_k}$ *in ogni orbita di* $\mathcal{G}_{y_i}$ *di lunghezza* 2^{2r-d}

Dimostrazione. (6.10) e (6.9).

(6.12) Lemma.

$$(1) \quad \mathcal{G}_{\pi_k} = \bigcup_{\substack{a=0 \\ (a \in K)}}^{q-1} \mathcal{G}_{x_a} \cup Z(\mathcal{G}) \quad \textit{per} \quad k \in K.$$

$$(2) \quad |\mathcal{G}_{\pi_k}| = \sum_{a=0}^{q-1} (|\mathcal{G}_{x_a}| - 1) + |Z(\mathcal{G})|.$$ *Sia* $|\mathcal{G}_{y_i}|$ *(da* (6.11) $= 2^{b_i}$ *dove assumiamo* $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_{2^{d-r}}$. *Allora,*

$$(3) \quad |\mathcal{G}_{\pi_k}| = \left(\sum_{j=1}^{2^{d-r}} |\mathcal{G}_{y_j}| \cdot 2^{2r-d} \right) - q + |Z(\mathcal{G})|$$

$$= 2^{2r-d} \cdot \sum_{j=1}^{2^{d-r}} 2^{b_j} - q + |Z(\mathcal{G})|.$$

Dimostrazione (1), (2): (6.7), (6.8).

<u>Dimostrazione</u> (3). Se $\mathcal{G}_{x_b}$ è nella stessa orbita Γ_j di $\mathcal{G}_{y_j}$ allora $|\mathcal{G}_{x_b}| = |\mathcal{G}_{y_j}|$. Per (6.11), ci sono 2^{2r-d} gruppi $\mathcal{G}_{x_b}$ in Γ_j cosicché $\sum_{(\mathcal{G}_{x_b} \in \Gamma_j)} |\mathcal{G}_{x_b}| = 2^{2r-d}|\mathcal{G}_{y_j}|$. Per (2), $|\mathcal{G}_{\pi_k}| = \left[\sum_{a=0}^{q-1} |\mathcal{G}_{x_a}|\right] - q + |Z(\mathcal{G})|$. Quindi,

$$|\mathcal{G}_{\pi_k}| = 2^{2r-d} \cdot \sum_{j=1}^{2^{d-r}} 2^{b_j} - q + |Z(\mathcal{G})|.$$

Sia $Z(\mathcal{G}) = 2^c \leq 2^r$ (da (6.4)) per $q = 2^r$.

Abbiamo,

<u>(6.13) Lemma</u>.

$$2^d + q = 2^{2r-d} \cdot \sum_{j=1}^{2^{d-r}} 2^{b_j} + 2^c \textit{ dove } b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_{2^{d-r}}.$$

Anche,

<u>(6.14) Lemma</u>.

$$2^d = |\mathcal{G}_{\pi_k}| \leq q \cdot 2^{b_1}.$$

<u>Dimostrazione</u>. $|\mathcal{G}_{\pi_k}| =$ (lunghezza della $\mathcal{G}_{\pi_k}$-orbita di $x_k \in \pi_k \cap \ell_\infty - \{(\infty)\}$)) $\cdot\ |(\mathcal{G}_{\pi_k})_{x_k}|$.

Ma, $\mathcal{G}_{x_k}$ è di Baer e fissa π_k perché tutti gli elementi di Baer sono in $\mathcal{G}_{\pi_k}$ (si veda Dim. (6.7)). Allora, $\mathcal{G}_{x_k} \subseteq \mathcal{G}_{\pi_k}$ cosicché $(\mathcal{G}_{\pi_k})_{x_k} = \mathcal{G}_{x_k \cdot \pi_k} = \mathcal{G}_{x_k}$. Quindi, $|\mathcal{G}_{\pi_k}| \le 2^r \cdot |\mathcal{G}_{x_k}| \le 2^r \cdot 2^{b_1} = q \cdot 2^{b_1}$. Da (6.13) e (6.14) abbiamo

$$2^d + q = 2^{2r-d} \sum_{j=1}^{2^{d-r}} 2^{b_j} + 2^c$$

dove $b_1 \le b_2 \le \cdots \le b_q$ e $2^d \le q \cdot 2^{b_1}$ cosicché $d \le r+b_1$. Sia $2r-d+b_1 > c$. Allora

$$2^d + 2^r = 2^{2r-d+b_1}(1+2^{b_2-b_1}+\cdots+2^{b_{2^{d-r}}-b_1}) + 2^c.$$

Cosicché

$$2^{d-c} + 2^{r-c} = 2^{2r-d+b_1-c}(1+2^{b_2-b_1}+\cdots+2^{b_{2^{d-r}}-b_1}) + 1.$$

Quindi (poiché $d > c$) $2^{r-c} = 1$ o $2^c = 2^r = q$. Sia $2r-d+b_1 \le c$, $2r-(r+b_1) + b_1 \le 2r-d+b_1$ (poiché $-(r+b_1) \le -d$) $\le c$. Quindi, $r \le c$, il che implica $c = r$.

Abbiamo,

(6.15) Lemma.

$$|Z(\mathcal{G})| = 2^c = 2^r = q.$$

Per sezione IV (4.3)(2), ogni gruppo $\mathcal{G}_{x_k}$ deve avere ordine 2 perché $Z(\mathcal{G})$ e $\mathcal{G}_{x_k}$ si normalizzano. (Nella equazione (6.13), $b_1 = b_2 = \cdots = 1$, $2^c = 2^r$ cosicché

$2^d+q = 2^{2r-d} \cdot 2^{d-r} \cdot 2 + q \Leftrightarrow 2^d = 2^{r+1}$.)

Quindi, la lunghezza dell'orbita è sempre $q^2/2$. Questo dà la dimostrazione di (6.1). Ora, consideriamo i piani π correspondenti. Nota: Abbiamo adesso un piano di Baer-elazione di ordine q^2 e tipo $(2,q)$ perché dobbiamo avere

$$Z(\mathcal{G}) = \left\{ \begin{bmatrix} I & \begin{bmatrix} u & m(u) \\ 0 & I \end{bmatrix} \\ 0 & I \end{bmatrix} \text{ dove } u \in K, \ m \text{ una funzione su } K \right\}.$$

Dunque, possiamo rappresentare le componenti di π nella forma:

$x = 0$, $y = x\begin{bmatrix} u+v+m(v), & f(v)+m(u) \\ v & , & u \end{bmatrix}$ per tutti gli $u,v \in K$ (si veda (5.17)) per opportune funzioni $t,m : K \longrightarrow K$ dove

(1) f è uno-uno e

(2) m è additiva e $m(0) = m(1) = 0$

Inoltre, abbiamo un gruppo $\mathcal{G}$ di ordine 2^{2r}, $q = 2^r$ nel complemento lineare col centro $Z(\mathcal{G}) = \left\{ \begin{bmatrix} I & \begin{bmatrix} u & m(u) \\ 0 & u \end{bmatrix} \\ 0 & I \end{bmatrix} \middle| \ u \in K \right\}$

e un' involuzione di Baer $\tau = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. E chiaro ora

che $\mathcal{G}$ può avere la forma $\begin{bmatrix} 1 & a & b_1 & b_2 \\ 0 & 1 & b_3 & b_4 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ per $a \in \lambda \subseteq K$.

$$(y = 0) \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & a & b_1 & b_2 \\ 0 & 1 & b_3 & b_4 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} y = x\begin{bmatrix} b_1+ab_3, & b_2+ab_4 \\ b_3 & , & b_4 \end{bmatrix}.$$

Quindi, $b_1+ab_3 = u+v+m(v)$, $b_2+ab_4 = f(v)+m(u)$, $b_3 = v$, e $b_4 = u$.

<u>(6.16) Lemma</u>.

Il gruppo $\mathcal{G}$ *può avere la forma:*

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & a & u+v+m(v)+a(v), & au+f(v)+m(u) \\ 0 & 1 & v \quad , & u \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; v \in \Sigma \subseteq K \quad dove \quad |\Sigma| = q/2 \quad e \quad u \in K \right\}.$$

<u>Dimostrazione</u>. $Z(\mathcal{G}) = \begin{bmatrix} I & \begin{bmatrix} u & m(u) \\ 0 & u \end{bmatrix} \\ 0 & I \end{bmatrix}$ e $|(y = 0)\mathcal{G}| = q^2/2$ per (6.1), allora $|\{v\}| = q/2$ e $|\{u\}| = q$.

<u>(6.17) Lemma</u>.

Consideriamo, gli elementi

$$\begin{bmatrix} 1 & a & v+m(v)+av, & f(v) \\ 0 & 1 & v \quad , & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad per \quad v \in \Sigma.$$

Per ogni $v \in \Sigma$, *l'elemento* (1,2)-*della matrice può avere solo due valori* a_1, a_2 e $a_2 = a_1+1$.

Dimostrazione.

$$\begin{bmatrix} 1 & a_1 & v+m(v)+a_1v, & f(v) \\ 0 & 1 & v \quad , & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & a_2 & v+m(v)+a_2v, & f(v) \\ 0 & 1 & v \quad , & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & a_1+a_2 & a_2v \quad , & (v+m(v)+a,v)a_2 \\ 0 & 1 & 0 \quad , & a_2v \\ 0 & 0 & 1 & a_1+a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sia,

$$\left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix} & \\ \hline & \begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix} \end{array}\right]\begin{bmatrix} I & \begin{bmatrix} u & m(u) \\ 0 & u \end{bmatrix} \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & u & u+m(v) \\ 0 & 1 & 0 & u \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ci sono esattamente q involuzioni di Baer in $\mathcal{G}$. Quindi, $a_1 + a_2 = 0$ o 1. Anche,

$$\begin{bmatrix} 1 & a_1 & v+m(v)+a_1v, & f(v) \\ 0 & 1 & v \quad , & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & v & v+m(v) \\ 0 & 1 & 0 & v \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & a_1+1 & v+m(v)+a_1v, & f(v) \\ 0 & 1 & v \quad , & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_1+1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Per ogni $v \in \Sigma$ $(|\Sigma| = q/2)$, sia $T(v)$ uno degli elementi a_1, a_1+1 con T una funzione da $\Sigma \longrightarrow K$.

<u>(6.18) Lemma</u>.

$$\textit{Sia}\quad \tau_b = \begin{bmatrix} 1 & T(b) & (b+m(b)+T(b)b), & f(b) \\ 0 & 1 & b \quad , & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T(b) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \textit{per}\quad b \in \Sigma,$$

$|\Sigma| = q/2$,

$$\tau = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \sigma_u = \begin{bmatrix} I & \begin{matrix} u & m(u) \\ 0 & u \end{matrix} \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

per $u \in K$. *Allora*, $\mathcal{G} = \langle \tau_b, \sigma_u, \tau \rangle$.

<u>Dimostrazione.</u>

$$\text{Sia}\quad \tau_{b+1} = \begin{bmatrix} 1 & T(b)+1, & (b+m(b)+(T(b)+1)b), & f(b) \\ 0 & 1 & b \quad , & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T(b)+1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

allora $\tau_b \tau \sigma_b = \tau_{b+1}$. Ora si usa (6.16).

<u>(6.19) Lemma</u>.

$$f(a+b) = f(a) + f(b) + m(aT(b)) + aT(b)^2 + T(b)(a+m(a))$$

per tutti gli $a \in K$ *e per tutti i* $b \in \Sigma$.

<u>Dimostrazione</u>. $\begin{bmatrix} 1 & T(b) & F(b) & f(b) \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T(b) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & T(a) & F(a) & f(a) \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T(a) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

per $F(x) = x+m(x)+xT(x)$ con $x \in \Sigma$,

$$= \begin{bmatrix} 1 & T(b)+T(a) & (F(a)+F(b)+aT(b), & (f(a)+F(b)T(a)+f(b)) \\ 0 & 1 & a+b & b(T(a) \\ 0 & 0 & 1 & T(b)+T(a) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$T(b)+T(a) = T(b+a)$ o $T(b+a) + 1$ per ogni $(b,a) \in \Sigma \times \Sigma$.

Da (6.16),

$$(6.20) \qquad F(a) + F(b) + aT(b) = bT(a) + (a+b) + m(a+b) + (T(a)+T(b))(a+b)$$

e

$$(6.21) \qquad f(a) + F(b)T(a) + f(b) = (T(b))+T(a))bT(a) + f(a+b) + m(bT(a))$$

dove $F(x) = x +m(x) + xT(x)$, $x \in \Sigma$.

$$(6.21) \Rightarrow f(a) + (b+m(b)+bT(b)))T(a) + f(b) = (T(b)+T(a))bT(a) + f(a+b) + m(bT(a))$$

$$\Leftrightarrow f(a+b) = f(a) + f(b) + m(bT(a)) + bT(a)^2 + T(a)(b+m(b))$$

per $a, b \in \Sigma$.

Ora, consideriamo le componenti

$$\mathcal{L}_{u,v} \equiv \left[y = x \begin{bmatrix} u+v+m(v), & f(v)+m(u) \\ v, & u \end{bmatrix} \right] \quad \text{per} \quad v \in K-\Sigma.$$

$$\mathcal{L}_{0,v} \xrightarrow{\tau_b} \left[x \begin{bmatrix} 1 & T(b) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, x \left[\begin{bmatrix} F(b) & f(b) \\ b & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v+m(v), & f(v) \\ v, & 0 \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} 1 & T(b) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right]$$

$$= \left[x \begin{bmatrix} 1 & T(b) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, x \begin{bmatrix} (F(b)+v+m(v)), & f(b)+(v+m(v))T(b)+f(v) \\ b+v, & vT(b) \end{bmatrix} \right]$$

$$\in \left[y = x \begin{bmatrix} (F(b)+v+T(b)(b+v) \\ \quad +m(v)) & , & (f(b)+(v+m(v))T(b)+f(v) \\ & & \quad +vT(b)^2 \\ b+v & , & vT(b) \end{bmatrix} \right].$$

Questo elemento deve essere della forma

$$\left[y = x \begin{bmatrix} \bar{u}+\bar{v}+m(\bar{v}), & f(\bar{v})+m(\bar{u}) \\ \bar{v} & \bar{u} \end{bmatrix} \right].$$

Quindi,

$$(6.22) \qquad (F(b)+v+T(b)(b+v)+m(v)) = vT(b)+(b+v)+m(b+v)$$

$$(6.23) \qquad f(b)+(v+m(v))T(b)+f(v)+vT(b)^2 = f((b+v)+m(vT(b))$$

per $v \in K-\Sigma$ e $b \in \Sigma$. Da (6.23), (6.19) è provato.

<u>(6.24) Teorema</u>. *Fondamentale per l'orbita non-regolare.*

Sia π *un piano di traslazione di ordine* $q^2 = 2^{2r}$. *Il* *nucleo di* π *sia* $K \cong GF(q)$ *e supponiamo che* π *ammetta un gruppo non abeliano* $\mathcal{G}$ *di collineazioni di ordine* q^2 *contenuto nel complemento lineare di traslazione. Infine, supponiamo che* $\mathcal{G}$ *non abbia un'orbita regolare sulla retta all'infinito. Allora, esiste un sottogruppo additivo* Σ *di* K *di ordine* $q/2$ *ed esistono funzioni* T *su* Σ *e* m, f *su* K *tali che* $\mathcal{G}$ *può essere rappresentato nella forma seguente:*

$\mathcal{G} = \langle \tau_b, \sigma_u, \tau \rangle$ *dove* $Z(\mathcal{G}) = \langle \sigma_u \rangle$,

$$\tau_b = \begin{bmatrix} 1 & T(b), & b+m(b)+T(b)b, & f(b) \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T(b) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{per } b \in \Sigma,$$

$$\sigma_u = \begin{bmatrix} I & \begin{bmatrix} u & m(u) \\ 0 & u \end{bmatrix} \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad \text{per } u \in K \quad (\text{cosicché } |Z(\mathcal{G})| = q.$$

$$\tau = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad \text{Inoltre,}$$

(0) *Le componenti di* π *hanno la forma*

$$x = 0,$$

$$y = x \begin{bmatrix} u+v+m(v), & f(v)+m(u) \\ v & u \end{bmatrix}$$

e π *è un piano di Baer-elazione di ordine* q^2 *e tipo* $(q,2)$.

(1) f *è uno-uno.*

(2) m *è additiva e* $m(0) = m(1) = 0$.