V. Reti Derivabili che sono costruite mediante collineazioni Centrali e Piani di traslazione di Baer-Elazione.

(5.1) Definizione.

Un piano di traslazione π di ordine p^{2r} è chiamato un piano di Baer-Elazione se e soltanto se possiede un p-gruppo nonbanale di Baer e un gruppo nonbanale di elazioni.

Per Foulser [12], deve essere $p = 2$. Ci sono molti esempi di piani di Baer-elazione. Per esempio, i piani di Desargues e di Hall sono piani di Baer-elazione. Biliotti, Menichetti [5] hanno studiato piani di traslazione che possono essere derivati da piani su semicorpi e che ammettono elazioni con più di un'asse. In questa situazione, il numero degli assi meno uno è l'ordine del nucleo. Se il nucleo è $GF(q)$ e l'ordine q^2 (del piano), il piano deve essere di Hall (si veda anche Johnson-Rahilly [49]).

(5.2) Definizione.

Sia π un piano di traslazione di ordine $q^2 = 2^{2r}$. Sia $\mathcal{B}$ un 2-gruppo di Baer e $\mathcal{E}$ un gruppo di elazioni. Se $|\mathcal{B}| = 2^b$ e $|E| = 2^e$, diciamo che π è un $(2^b, 2^c)$-piano di Baer-elazione. Normalmente, assumiamo che $\mathcal{B}$, $\mathcal{E}$ si normalizzino.

In questa notazione, i resultati di Jha-Johnson nella sezione IV sono:

Se π è di typo $(2^b, q)$ allora $b \leq 1$ e

Se π è di typo $(\geq 2\sqrt{q}, 2^e)$ allora $e \leq 1$.

(b) *Se $\mathcal{N}$ è derivabile allora anche $\{\mathcal{L},\mathcal{X}\} \cup$ (ogni H-orbita di componenti) è derivabile.*

Dimostrazione.

Sia Σ un piano di Desargues con $\mathcal{N} \subseteq \Sigma$. Si scelga un campo K per Σ in modo che $x = \mathit{0}$ sia l'asse per $\mathcal{E}$ in π e $\mathcal{N}$ abbia le componenti $x = \mathit{0}$, $y = \mathit{0}$, $y = xC$ per $C \in \lambda \subseteq K$. Allora, $\mathcal{E}$ può essere rappresentato in π nella forma $\left\{\begin{bmatrix} I & C \\ \mathit{0} & I \end{bmatrix} \mid C \in \lambda\right\}$. Nota: In Σ, $y = xC$ rappresenta uno spazio di dimensione uno ma in π, x, y possono essere r-spazi vettoriali per un qualche r e C una matrice r per r su GF(p) se $K \cong GF(p^r)$.

Sia $y = xM$ una componente di $\pi - \{x = \mathit{0}\}$. Allora, l'orbita di $y = xM$ su $\mathcal{E}$ è $\{y = x\,(M+C) \mid C \in \lambda\}$.

Cambia le basi mediante $(x,y) \xrightarrow{\tau} (x, xM+y)$, $\left[\tau = \begin{bmatrix} I & -M \\ \mathit{0} & I \end{bmatrix}\right]$. τ fissa $(x = \mathit{0})$ e cambia $\{y = x(M+C) \mid C \in \lambda\}$ in $\{(y = x(M+C-M)) = (y = xC) \mid C \in \lambda\}$.

Se $\mathcal{N}$ è derivabile, possiamo assumere che $\lambda \cong GF(q)$ e $K \cong GF(q^2)$ dove $q^2 = p^r$. Per la dimostrazione sopra, possiamo scegliere le coordinate in modo che ogni $\mathcal{E}$-orbita $\cup\ (x = \mathit{0})$ abbia la stessa forma-allora ogni $\mathcal{E}$-orbita $\cup\ (x = \mathit{0})$ è derivabile.

Dimostrazione (2) (traccia). Rappresenta $\mathcal{H}$ mediante $\{(x,y) \longrightarrow (x,yC) \mid C \in \lambda\}$,

$$(x, xM) \xrightarrow{\mathcal{H}} \{y = x(MC) \mid C \in \lambda\}.$$

Cambia le basi mediante $\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M^{-1} \end{bmatrix}$. Allora, questa orbita Γ ha la forma $\{y = x(MCM^{-1}) \mid C \in \lambda\}$. $MKM^{-1} \cong K$ e $\Gamma \subseteq \overline{\Sigma}$ dove $\overline{\Sigma}$ è il piano che può essere coordinatizzato da MKM^{-1}.

La Costruzione delle orbite.

(5.2) *Sia* π_1 *un piano di traslazione di ordine* q^2 *che ammetta un gruppo* $\mathcal{B}$ *di Baer dove* $|\mathcal{B}| = q$ (*o* $(q-1)$). *Supponiamo* $\mathcal{B}$ *fissi ogni punto di* π_0 *e che le componenti* $\mathcal{N}$ *di* π_0 *diano una rete derivabile. Sia* π_2 *il piano derivato. In* π_2, $\mathcal{B}$ *è un gruppo centrale e possiamo applicare* (5.20). *Siano queste* $q-1$ (q) $\mathcal{B}$-*orbite* Γ_i, $i = 1, \dots, q-1$ (q) $\neq \overline{\mathcal{N}}$ (*la rete sostituibile di* π_2). *Si scelga una orbita* $\Gamma_j \cup$ {*l'asse di* $\mathcal{B}$ *in* π_2}) (*o l'asse e il co-asse di* $\mathcal{B}$ *in* π_2). *Questa è anche una rete derivabile—si ottiene un piano nuovo* π_1^j; $j = 1, \dots q-1$ (q) *che ancora ammette un gruppo di Baer di ordine* q (*o* $(q-1)$) *ma generalmente non è isomorfo a* π_1. $\{\pi_1^j \mid j = 1, \dots, q-1\ (q)\}$ *si chiamano le forme ri-derivate di* π_1.

Abbiamo:

$$\underset{(\mathcal{B}\text{ gruppo di Baer})}{\pi_1} \longrightarrow \underset{(\mathcal{B}\text{ gruppo centrale})}{\pi_2} \xrightarrow[\Gamma_j]{\text{scegli un orbita nuova}} \pi_2 \xrightarrow{\text{"ri"-derivato}} \underset{(\mathcal{B}\text{-gruppo di Baer})}{\pi_1^j}$$

Per un'illustrazione, applichiamo ciò ai piani di Baer-elazione usando la sezione III.

$$\underset{\substack{((q,2)\text{-piano che}\\ \text{è derivable})}}{\pi_1} \xrightarrow{\text{derivato}} \underset{\substack{(2,q)\text{-}\\ \text{piano}}}{\pi_2} \xrightarrow[\Gamma_j]{\substack{\text{scegli}\\ \text{un'orbita nuova}}} \pi_2 \xrightarrow{\text{"ri"-derivato}} \underset{\substack{(q,2)\text{-}\\ \text{piano})}}{\pi_1^j} .$$

(5.22) Teorema.

Sia π_1 *un piano di traslazione di ordine* q^2, *nucleo* $K \cong GF(q)$ *e di tipo* $(q,2)$ *che sia derivabile. Supponiamo che le componenti di* π_1 *abbiano la forma:* $x = 0$, $y = x\begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{bmatrix}$, $y = x\begin{bmatrix} ba^{-1} , & b^2a^{-1}+b+g(a^{-1}) \\ a^{-1} , & ba^{-1}+1 \end{bmatrix}$ *per* $u,b,a \neq 0$ *in* K *e* $(x,y) = (x_1,x_2,y_1,y_2)$ *per* $x_i,y_i \in K$, $i = 1,2$ *e* $g : K \longrightarrow K$.

(1) *Le componenti possono essere rappresentate nella forma:* $x = 0$, $y = x\begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{bmatrix}$, $y = x\begin{bmatrix} ba & g(a^{-1}) \\ a & b+a \end{bmatrix}$ *per tutti gli* $a,b,a \neq 0$ *in* K.

(2) *Siano le orbite* Γ_j *del gruppo* $\mathcal{E}$ *di elazioni* $= \left\{ y = x\begin{bmatrix} b & g(a_j^{-1}) \\ a_j & b+a_j \end{bmatrix} \;\middle|\; b \in K \right\}$ *per* $j = 1,2,\ldots,q-1;$ $a_j \neq 0$.

Sia $g_j(c^{-1}) = g(c+a_j)^{-1}) + g(a_j^{-1})$. *Cambia le basi di* $\begin{bmatrix} I & M_j \\ 0 & I \end{bmatrix}$ *dove* $M_j = \begin{bmatrix} 0 & g(a_j^{-1}) \\ a_j & a_j \end{bmatrix}$. *Dopo questo cambiamento, le componenti di* π_2 *hanno la forma* $x = 0$, $y = x\begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{bmatrix}$, $y = x\begin{bmatrix} b & g_j(a^{-1}) \\ a & b+a \end{bmatrix}$ *per* $u,b,a \neq 0$ *in* K.

(3) *I piani ri-derivati* π_1^j *possono avere la forma:*

$$x = 0, \quad y = x\begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{bmatrix}, \quad y = x\begin{bmatrix} ba^{-1}, & b^2a^{-1}+b+g_j(a^{-1}) \\ a^{-1}, & ba^{-1}+1 \end{bmatrix}$$

dove $g_j(c^{-1}) = g((c+a_j)^{-1}) + g(a_j^{-1})$.

Dimostrazione. (1) Usa (5.10), (3.3) (con $m \equiv 0$).

(2) $\left\{y = x\begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{bmatrix}\right\} \xrightarrow{\begin{bmatrix} I & M_j \\ 0 & I \end{bmatrix}} \left\{y = x\begin{bmatrix} u & g(a_j^{-1}) \\ a_j & u+a_j \end{bmatrix}\right\}$ e

$$\left\{y = x\begin{bmatrix} b & g(a^{-1}) \\ a & b+a \end{bmatrix}\right\} \xrightarrow{\begin{bmatrix} I & M_j \\ 0 & I \end{bmatrix}} \left\{y = x\begin{bmatrix} b, & g(a^{-1})+g(a_j^{-1}) \\ a+a_j, & b+(a+a_j) \end{bmatrix}\right\}.$$

Se $\bar{a} = a + a_j$ allora $g(a^{-1}) + g(a_j^{-1}) = g((\bar{a}+a_j)^{-1}) + g(a_j^{-1})$ $= g_j(\bar{a})^{-1}$.

(3) Usa (3.3) di nuovo.

Inoltre, Barriga [2] e anche Cohen-Ganley [8] hanno trovato lo stesso piano π_1 di ordine q^2, nucleo $GF(q)$, usando polinomi di Chebyshev di grado 5.

Usando (5.20) e (3.3) possiamo ottenere le seguenti fibrazioni per π_1^j.

(5.23) Teorema (Jha-Johnson [30]).

Sia $V = \{(x_1,x_2,y_1,y_2) \mid x_1,x_2,y_1,y_2 \in GF(q)$ *dove* $q = p^r$, r *dispari e* $p \equiv \pm 2 \bmod 5\}$. *Per ogni* $a_j \neq 0$, $j = 1,\dots,q-1$, *la seguente è una fibrazione per un piano* π_1^j

di ordine q^2 *che ammetta un gruppo di Baer di ordine* q *e sia un piano ri-derivato di* π_1—*il piano di (Barriga- Cohen-Ganley):* $x = 0$, $y = x\begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{bmatrix}$,

$$y = x\begin{bmatrix} v\ , & \{-\gamma((b^{-1}+a_j)^5-a_j^5) + \beta(v(b^{-1}+a_j)^3-a_j^3)-v^2b^{-1}\} \\ b\ , & \beta b(b^{-1}+a_j)^3-a_j^3-v \end{bmatrix}$$

per $u, v, b \neq 0$ *in* $GF(q)$.