V. Reti Derivabili che sono costruite mediante collineazioni Centrali e Piani di traslazione di Baer-Elazione.

(5.1) Definizione.

Un piano di traslazione π di ordine p^{2r} è chiamato un piano di Baer-Elazione se e soltanto se possiede un p-gruppo nonbanale di Baer e un gruppo nonbanale di elazioni.

Per Foulser [12], deve essere $p = 2$. Ci sono molti esempi di piani di Baer-elazione. Per esempio, i piani di Desargues e di Hall sono piani di Baer-elazione. Biliotti, Menichetti [5] hanno studiato piani di traslazione che possono essere derivati da piani su semicorpi e che ammettono elazioni con più di un'asse. In questa situazione, il numero degli assi meno uno è l'ordine del nucleo. Se il nucleo è $GF(q)$ e l'ordine q^2 (del piano), il piano deve essere di Hall (si veda anche Johnson-Rahilly [49]).

(5.2) Definizione.

Sia π un piano di traslazione di ordine $q^2 = 2^{2r}$. Sia $\mathcal{B}$ un 2-gruppo di Baer e $\mathcal{E}$ un gruppo di elazioni. Se $|\mathcal{B}| = 2^b$ e $|E| = 2^e$, diciamo che π è un $(2^b,2^c)$-piano di Baer-elazione. Normalmente, assumiamo che $\mathcal{B}$, $\mathcal{E}$ si normalizzino.

In questa notazione, i resultati di Jha-Johnson nella sezione IV sono:

Se π è di typo $(2^b,q)$ allora $b \le 1$ e

Se π è di typo $(\ge 2\sqrt{q},2^e)$ allora $e \le 1$.

Dunque, considereremo piani di tipo (2,q) o (q,2). Per semplicità, assumiamo che il nucleo K sia isomorfo a GF(q).

(q,2)-piani.

(5.3) *Sia* π *un piano di traslazione di ordine* q^2, q *pari, e nucleo* $K \cong GF(q)$. *Sia* π *un piano di Baer-elazione di tipo* (q,2) *con gruppi* $\mathcal{B}$, $\mathcal{E}$ *nel complemento di traslazione, cosicché* $\mathcal{B}$ *è un* 2-*gruppo di Baer di ordine* q *e* $\mathcal{E}$ *è un gruppo di elazioni di ordine* 2 *con asse* $\mathcal{L}$. *Assumiamo che* $\mathcal{B}$ *fissi il sottopiano* π_0.

(5.4) (1) $\mathcal{B}$, $\mathcal{E}$ *si centralizzano o* π *è di Hall.*

(2) $\mathcal{B}$ *è nel complemento lineare.*

Dimostrazione (1).

Se $\mathcal{B}$, $\mathcal{E}$ non si centralizzano allora ci sono almeno due gruppi di Baer di ordine $|\mathcal{B}|$. In sezione VII, vedremo che in questo caso π deve essere un piano di Hall.

Dimostrazione (2).

Foulser [13] (si veda Jha-Johnson (2.2) [33]).

(5.5) *Possiamo scegliere le coordinate in modo tale che*

$$\pi = \{(x_1,x_2,y_1,y_2) \mid x_i,y_i \in K,\ i = 1,2\},$$

$$\pi_0 = \{(0, x_2, 0, y_2) \mid x_2, y_2 \in K\},$$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; a \in K \right\}$$

e le componenti di π_0 *hanno la forma:* $x = \mathit{0}$, $y = x\begin{bmatrix} a & f(a) \\ 0 & a \end{bmatrix}$ *dove* $a \in K$ *e* f *è un funzione su* K *con* $f(0) = f(1) = 0$.

Nota. É possibile che f non sia additiva.

Dimostrazione. Si veda (4.5) e (4.6).

In modo simile,

(5.6) *Possiamo scegliere le coordinate in modo tale che*

$$\mathcal{E} = \langle \begin{bmatrix} I & I \\ \mathit{0} & I \end{bmatrix} \rangle = \langle \sigma \rangle .$$

(5.7) $\mathcal{BE}$ *contiene* $q-1$ *involuzioni di Baer* τ_a *per* $a \in K - \{0\}$ *che non sono in* $\mathcal{B}$. *Ogni involuzione di Baer fissa ogni punto di un sottopiano di Baer* π_a *che ha in comune solo la componente* $(x = \mathit{0})$ *con* π_b, $a \neq b$.

Dimostrazione.

$|\mathcal{BE} - \mathcal{E} - 1| = q-1$ e $\mathcal{BE}$ è abeliano elementare.

$$\tau_a = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \sigma = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(5.8). *Sia* $\tau_a = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $a \neq 0$. *Le componenti che* τ_a *fissa hanno la forma:* $x = 0$, $y = x\begin{bmatrix} u & G(u,a^{-1}) \\ a^{-1}, & u+1 \end{bmatrix}$ *dove* G *è una funzione* : $K \times (K-\{0\}) \longrightarrow K$.

Dimostrazione.

Una componente $y = x\begin{bmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{bmatrix}$ è fissata da $\tau_a \Leftrightarrow m_3 = a^{-1}$ e $m_4 = m_1+1$ (si veda (4.8)).

(5.9) *Sia* $G(0,a^{-1}) = g(a^{-1})$. *Ci sono* $(q-1)$-*componenti della forma*

$$y = x\begin{bmatrix} 0 & , & g(a^{-1}) \\ a^{-1} & , & 1 \end{bmatrix}, \quad a \in K - \{0\}.$$

Le componenti di π_a *per* $a \neq 0$ *hanno la forma:*

$$x = 0, \quad y = x\begin{bmatrix} ba^{-1} & , & b^2a^{-1}+b+g(a^{-1}) \\ a^{-1} & , & ba^{-1}+1 \end{bmatrix}$$

per b *in* K.

Dimostrazione.

$\mathcal{BE}$ è abeliano elementare cosicché $\mathcal{B}$ deve fissare ogni sottopiano π_a e agire transitivamente sulle componenti di $\pi_a \neq (X = 0)$.

$$y = x\begin{bmatrix} 0 & , & g(a^{-1}) \\ a^{-1} & , & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

$$y = x\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & g(a^{-1}) \\ a^{-1} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \left\{ y = x\begin{bmatrix} ba^{-1} & , & g^2a^{-1}+b+b(a^{-1}) \\ a^{-1} & , & ba^{-1}+1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Quindi, possiamo dare la struttura per i piani di tipo (q,2) e dimensione due:

(5.10) Teorema (Jha-Johnson [33] (2.8)).

Sia π un piano di traslazione di ordine q^2, q pari e nucleo $K \cong GF(q)$. Se π ammette un gruppo di Baer nel complemento di traslazione di ordine q e un gruppo non-banale di elazioni, allora esistono coordinate e funzioni $f,g : K \longrightarrow K$ tali che

(1) $f(a) = f(a+1)$ *per* $a \in K$;

(2) $d + d^2 + f(d)a^{-1} \neq g(a^{-1})a^{-1}$, *per* $d,a \neq 0$ *in* K;

(3) $g(d) + g(c) \neq t(1+t \frac{dc}{c+d})$ *per* $d \neq c$, t *in* K *e le componenti hanno la forma:*

$$x = 0, \quad y = x\begin{bmatrix} u & f(u) \\ 0 & u \end{bmatrix},$$

$$y = x\begin{bmatrix} ba^{-1} \ , & b^2a^{-1}+b+g(a^{-1}) \\ a^{-1} \ , & ba^{-1}+1 \end{bmatrix}$$

per $u, b, a \neq 0$ *in* K *e* $(x,y) = (x_1, x_2, y_1, y_2)$ *per* x_i, y_i *in* K, $i = 1,2$. *Viceversa, se ci sono funzioni* f, g *su un campo* $K \cong GF(q)$ *che hanno le proprietà* (1), (2), (3) *allora si può ottenere un piano di traslazione di ordine* q^2 *e tipo* $(q,2)$.

Dimostrazione.

Le condizioni (2), (3) possono essere ottenute usando la proprietà che la differenza tra due matrici (che rapresentano le componenti) è non-singolare.

(2,q)-piani

L'analisi per piani di tipo (2,q) è molto simile a quella per piani di tipo (q,2). Pertanto daremo solo una traccia.

(5.11) *Sia* π *un piano di traslazione di ordine* q^2, q *pari e nucleo* $K \cong GF(q)$. *Supponiamo che* π *sia un* $(2,q)$*-piano con gruppi* $\mathfrak{B}$, $\mathcal{E}$ *nel complemento* lineare *dove* $\mathfrak{B}$ *è un gruppo di*

Baer di ordine 2 *e* $\mathcal{E}$ *è un gruppo di elazioni di ordine* q. *Inoltre supponiamo che* $\mathcal{B}$, $\mathcal{E}$ *si centralizzino e che* $\mathcal{B}$ *fissi ogni punto del sottopiano* π_0.

(5.12) *Si possono seegliere le coordinate in modo che*

$$\pi = \{(x_1, x_2, y_1, y_2) \mid x_i, y_i \in K,\ i = 1,2\},$$

$$\pi_0 = \{(0, x_2, 0, y_2) \mid x_2, y_2 \in K\},$$

$$\mathcal{B} = \langle \tau \rangle, \qquad \tau = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{E} = \left\{ \sigma_u = \begin{bmatrix} 1 & 0 & u & m(u) \\ 0 & 1 & 0 & u \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \,\middle|\, u \in K \text{ e } m \text{ è una funzione additiva su } K \text{ con } m(0) = m(1) = 0 \right\}.$$

(5.13) *Esistono funzioni* f, g *su* K *dove* f *è uno-uno taliche* $y = x\begin{bmatrix} g(v), & f(v) \\ v\ , & 0 \end{bmatrix}$ *è una componente per tutti i* $v \in K$.

Dimostrazione.

Sia $y = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{bmatrix}$ una componente. $\{[m_3, m_4]\} = K \times K$. Consideriamo le componenti $y = x\begin{bmatrix} \_\_, & \_\_ \\ v & 0 \end{bmatrix}$. Ogni componente è determinata completemente da $[v,0]$. Allora gli elementi $(1,1)$ e $(1,2)$ della matrice devono essere rappresentati da funzioni di V.

Nota: $\begin{bmatrix} g(u) & f(u) \\ u & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g(v) & f(v) \\ v & 0 \end{bmatrix}$ è non-singolare.

Quindi, f è uno-uno.

(5.14) *Le componenti di* π *hanno la forma*

$$x = \mathcal{O}, \quad y = x\begin{bmatrix} u+g(v) & f(v)+m(u) \\ v & u \end{bmatrix}.$$

Dimostrazione.

Applica il gruppo $\mathcal{E}$ a $\left\{y = x\begin{bmatrix} g(v) & f(v) \\ v & 0 \end{bmatrix}\right\}$.

(5.15) $\mathfrak{B}\mathcal{E}$ *contiene* q *involuzioni di Baer*

$$= \tau\mathcal{E} = \left\{ \tau\sigma_a = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a & m(a)+a \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; a \in K \right\}.$$

(5.16) $g(a) = a + m(a)$ *per tutti gli* $a \in K$.

Dimostrazione.

$\tau\sigma_a$ fissa $y = x\begin{bmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow a = m_3$ e $m_1 = m_4 + m(a) + a$ (si veda (4.8)). Se $m_4 = u$ allora (da (5.14)) $u + g(a) = m_1 = u + m(a) + a$.

Allora, abbiamo il seguente

(5.17) Teorema (Jha-Johnson [33] (3.7)).

Sia π *un piano di traslazione di ordine* q^2, q *pari, e nucleo* $K \cong GF(q)$. *Ammetta* π *un gruppo di elazioni* $\mathcal{E}$ *di ordine* q *e un 2-gruppo nonbanale* $\mathfrak{B}$ *taliche* $\mathcal{E}$ *e* $\mathfrak{B}$ *si normalizzino e*, $\mathfrak{B}$ *sia nel complemento lineare di traslazione. Allora ci sono funzioni* f, m *su* K *tali che*

(1) f *è uno-uno,*

(2) m *è additiva e* $m(0) = m(1) = 0$,

(3) $$\mathrm{Det}\left\{\begin{bmatrix} u+v+m(v), & f((v)+m(u) \\ v & u \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a+b+m(b), & f(b)+m(a) \\ b\quad , & a \end{bmatrix}\right\} \neq 0$$

se almeno uno fra a,b,u,v *non è zero per* $a,b,u,v \in K$ *e* $(u,v) \neq (a.b)$ *e le componenti di* π *possono essere rappresentate nella forma* $x = 0$, $y = x\begin{bmatrix} u+v+m(v), & f(v)+m(u) \\ v\quad , & u \end{bmatrix}$ *per tutti gli* $u,v \in K$. *Viceversa, funzioni* f,m *che hanno le proprietà sopra indicate danno un piano di traslazione di ordine* q^2 *e tipo* $(2,q)$.

Se π è un $(q,2)$ o $(2,q)$-piano con molti assi (o molti sottogruppi di Baer), Jha e Johnson [33](4.5),(4.6) hanno provato:

(5.18) Teorema.

(1) *Sia* π *un piano di traslazione di ordine* q^2 *con nucleo* $K \cong GF(q)$. *Ammetta* π *un gruppo di Baer di ordine* q. *Se* π *ammette gruppi di elazioni con almeno due assi allora* π

è un piano di Hall e viceversa un piano di Hall ammette gruppi di questo tipo.

(2) *Sia* π *un piano di traslazione di ordine* q^2 *con nucleo* $K \cong GF(q)$. *Ammetta* π *un gruppo di elazioni* $\mathcal{E}$ *di ordine* q. *Se* π *ammette almeno due 2-gruppi di Baer* $\mathcal{B}_i$, $u = 1,2$, *nel complemento lineare dove* $\mathcal{E}$, $\mathcal{B}_i$ *si normalizzano* $i = 1,2$ *ma* $\mathcal{B}_2 \not\subseteq \mathcal{E}\mathcal{B}_1$, *allora* π *è un piano di Desargues.*

<u>Reti Derivabili Che Sono Costruite Mediante Collineazioni Centrali</u>

Consideriamo il seguente problema: Sia π un piano di traslazione e sia $\mathcal{G}$ un gruppo di collineazioni nel complemento e $\mathcal{S}$ una collezione di componenti (forse vuota). Quando è $\mathcal{S}$ U (una qualche orbita di $\mathcal{G}$ di componenti) una rete sostituible (di Desargues)?

Per esempio, c'è il seguente

<u>(5.19) Teorema</u> (Johnson [41]).

Sia π *un piano di traslazione di ordine* p^{2rt} *che ammetta un gruppo di collineazioni isomorfo a* $SL(2,p^r)$ *dove gli element di ordine* p *sono elazioni. Sia* $\mathcal{S}$ *la collezione degli assi di elazione. Allora, c'è una orbita* Γ *di* $\mathcal{G}$ *di componenti tale che* $\mathcal{S} \cup \Gamma$ *è una rete di Desargues che può* *essere coordinatizzata da* $GF(p^{2r})$. *Inoltre, per ogni orbita* $\overline{\Gamma}$ *tale che* $|\overline{\Gamma}| = |\Gamma|$, $\mathcal{S} \cup \overline{\Gamma}$ *ha questa proprietà.*

Nel caso sopra, non tutte le orbite $\overline{\Gamma} \cup \mathcal{S}$ sono reti di Desargues. Ma, la situazione è diversa quando $\mathcal{G}$ è un gruppo centrale.

Se $\mathcal{F}$ è una fibrazione per π, useremo la notazione $\mathcal{F} = \mathcal{N} \cup \mathcal{M}$ quando $\mathcal{N}$, $\mathcal{M}$ sono reti tali che ogni componente di π è in $\mathcal{N}$ o $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N} \cap \mathcal{M} = \phi$.

(5.20) Teorema (Jha-Johnson [30] (3.1),(3.2)).

Sia π *un piano finito di traslazione* $= \mathcal{N} \cup \mathcal{M}$ *dove* $\mathcal{N}$ *è una rete di Desargues.*

(1) *Sia* $\mathcal{E}$ *un gruppo di elazioni con l'asse* $\mathcal{L}$ *una componente di* $\mathcal{N}$. *Supponiamo che* $\mathcal{E}$ *sia transitivo sulle componenti di* $\mathcal{N}$-$\mathcal{L}$.

(a) *Allora* $\mathcal{L} \cup$ *(ogni* $\mathcal{E}$*-orbita di componenti* $\neq \mathcal{L}$*) è una rete di Desargues.*

(b) *Se* $\mathcal{N}$ *è derivabile allora anche* $\mathcal{L} \cup$ *(ogni* $\mathcal{E}$*-orbita delle componente* $\neq \mathcal{L}$*) è derivabile.*

(2) *Sia* $\mathcal{H}$ *un gruppo di omologie con asse* $\mathcal{L}$ *e coasse* $\mathcal{K}$ *dove* $\mathcal{L}, \mathcal{K}$ *sono componenti di* $\mathcal{N}$. *Supponiamo che* $\mathcal{H}$ *sia transitivo sulle componenti di* $\mathcal{N} - \{\mathcal{L}, \mathcal{K}\}$.

(a) *Allora* $\{\mathcal{L}, \mathcal{K}\} \cup$ *(ogni H-orbita di componenti) è una rete di Desargues.*

(b) *Se* $\mathcal{N}$ *è derivabile allora anche* $\{\mathcal{L},\mathcal{H}\} \cup$ *(ogni H-orbita di componenti) è derivabile.*

Dimostrazione.

Sia Σ un piano di Desargues con $\mathcal{N} \subseteq \Sigma$. Si scelga un campo K per Σ in modo che $x = O$ sia l'asse per $\mathcal{E}$ in π e $\mathcal{N}$ abbia le componenti $x = O$, $y = O$, $y = xC$ per $C \in \lambda \subseteq K$. Allora, $\mathcal{E}$ può essere rappresentato in π nella forma $\left\{\begin{bmatrix} I & C \\ O & I \end{bmatrix} \mid C \in \lambda\right\}$. Nota: In Σ, $y = xC$ rappresenta uno spazio di dimensione uno ma in π, x,y possono essere r-spazi vettoriali per un qualche r e C una matrice r per r su $GF(p)$ se $K \cong GF(p^r)$.

Sia $y = xM$ una componente di $\pi - \{x = O\}$. Allora, l'orbita di $y = xM$ su $\mathcal{E}$ è $\{y = x\,(M+C) \mid C \in \lambda\}$.

Cambia le basi mediante $(x,y) \xrightarrow{\tau} (x,xM+y)$, $\left[\tau = \begin{bmatrix} I & -M \\ O & I \end{bmatrix}\right]$. τ fissa $(x = O)$ e cambia $\{y = x(M+C) \mid C \in \lambda\}$ in $\{(y = x(M+C-M)) = (y = xC) \mid C \in \lambda\}$.

Se $\mathcal{N}$ è derivabile, possiamo assumere che $\lambda \cong GF(q)$ e $K \cong GF(q^2)$ dove $q^2 = p^r$. Per la dimostrazione sopra, possiamo scegliere le coordinate in modo che ogni $\mathcal{E}$-orbita $\cup\ (x = O)$ abbia la stessa forma-allora ogni $\mathcal{E}$-orbita $\cup\ (x = O)$ è derivabile.

Dimostrazione (2) (traccia). Rappresenta $\mathcal{H}$ mediante $\{(x,y) \longrightarrow (x,yC) \mid C \in \lambda\}$.

$$(x,xM) \xrightarrow{\mathcal{H}} \{y = x(MC) \mid C \in \lambda\}.$$

Cambia le basi mediante $\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M^{-1} \end{bmatrix}$. Allora, questa orbita Γ ha la forma $\{y = x(MCM^{-1}) \mid C \in \lambda\}$. $MKM^{-1} \cong K$ e $\Gamma \subseteq \overline{\Sigma}$ dove $\overline{\Sigma}$ è il piano che può essere coordinatizzato da MKM^{-1}.

<u>La Costruzione delle orbite.</u>

(5.2) *Sia* π_1 *un piano di traslazione di ordine* q^2 *che ammetta un gruppo* $\mathcal{B}$ *di Baer dove* $|\mathcal{B}| = q$ (*o* $(q-1)$). *Supponiamo* $\mathcal{B}$ *fissi ogni punto di* π_0 *e che le componenti* $\mathcal{N}$ *di* π_0 *diano una rete derivabile. Sia* π_2 *il piano derivato. In* π_2, $\mathcal{B}$ *è un gruppo centrale e possiamo applicare* (5.20). *Siano queste* $q-1$ (q) $\mathcal{B}$*-orbite* Γ_i, $i = 1,\ldots,q-1$ (q) $\neq \overline{\mathcal{N}}$ (*la rete sostituibile di* π_2). *Si scelga una orbita* $\Gamma_j \cup \{$*l'asse di* $\mathcal{B}$ *in* $\pi_2\}$ (*o l'asse e il co-asse di* $\mathcal{B}$ *in* π_2). *Questa è anche una rete derivabile—si ottiene un piano nuovo* π_1^j; $j = 1, \ldots q-1$ (q) *che ancora ammette un gruppo di Baer di ordine* q (*o* $(q-1)$) *ma generalmente non è isomorfo a* π_1. $\{\pi_1^j \mid j = 1, \ldots, q-1\ (q)\}$ *si chiamano le forme ri-derivate di* π_1.

Abbiamo:

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_1 & \longrightarrow & \pi_2 & \xrightarrow[\quad]{\text{scegli un orbita nuova } \Gamma_j} & \pi_2 & \xrightarrow{\text{"ri"-derivato}} & \pi_1^j \\ (\mathcal{B} \text{ gruppo di Baer}) & & (\mathcal{B} \text{ gruppo centrale}) & & & & (\mathcal{B}\text{-gruppo di Baer}) \end{array}$$

Per un'illustrazione, applichiamo ciò ai piani di Baer-elazione usando la sezione III.

$$\begin{array}{ccccccc} & & \text{scegli un'orbita nuova} & & & & \\ \pi_1 & \xrightarrow{\text{derivato}} & \pi_2 & \xrightarrow{\Gamma_j} & \pi_2 & \xrightarrow{\text{"ri"-derivato}} & \pi_1^j . \\ \text{((q,2)-piano che è derivable)} & & \text{(2,q)-piano} & & & & \text{(q,2)-piano)} \end{array}$$

(5.22) Teorema.

Sia π_1 *un piano di traslazione di ordine* q^2, *nucleo* $K \cong GF(q)$ *e di tipo* $(q,2)$ *che sia derivabile. Supponiamo che le componenti di* π_1 *abbiano la forma:* $x = 0$, $y = x\begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{bmatrix}$, $y = x\begin{bmatrix} ba^{-1}, & b^2a^{-1}+b+g(a^{-1}) \\ a^{-1}, & ba^{-1}+1 \end{bmatrix}$ *per* $u,b,a \neq 0$ *in* K *e* $(x,y) = (x_1,x_2,y_1,y_2)$ *per* $x_i,y_i \in K$, $i = 1,2$ *e* $g : K \longrightarrow K$.

(1) *Le componenti possono essere rappresentate nella forma:* $x = 0$, $y = x\begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{bmatrix}$, $y = x\begin{bmatrix} ba & g(a^{-1}) \\ a & b+a \end{bmatrix}$ *per tutti gli* $a,b,a \neq 0$ *in* K.

(2) *Siano le orbite* Γ_j *del gruppo* $\mathcal{E}$ *di elazioni* $= \left\{ y = x\begin{bmatrix} b & g(a_j^{-1}) \\ a_j & b+a_j \end{bmatrix} \;\middle|\; b \in K \right\}$ *per* $j = 1,2,\ldots,q-1;$ $a_j \neq 0$.

Sia $g_j(c^{-1}) = g(c+a_j)^{-1}) + g(a_j^{-1})$. *Cambia le basi di* $\begin{bmatrix} I & M_j \\ 0 & I \end{bmatrix}$ *dove* $M_j = \begin{bmatrix} 0 & g(a_j^{-1}) \\ a_j & a_j \end{bmatrix}$. *Dopo questo cambiamento, le componenti di* π_2 *hanno la forma* $x = 0$, $y = x\begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{bmatrix}$, $y = x\begin{bmatrix} b & g_j(a^{-1}) \\ a & b+a \end{bmatrix}$ *per* $u,b,a \neq 0$ *in* K.

(3) *I piani ri-derivati* π_1^j *possono avere la forma:*

$$x = 0, \quad y = x\begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{bmatrix}, \quad y = x\begin{bmatrix} ba^{-1}, & b^2a^{-1}+b+g_j(a^{-1}) \\ a^{-1}, & ba^{-1}+1 \end{bmatrix}$$

dove $g_j(c^{-1}) = g((c+a_j)^{-1}) + g(a_j^{-1})$.

Dimostrazione. (1) Usa (5.10), (3.3) (con $m \equiv 0$).

(2) $$\left\{y = x\begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{bmatrix}\right\} \xrightarrow{\begin{bmatrix} I & M_j \\ 0 & I \end{bmatrix}} \left\{y = x\begin{bmatrix} u & g(a_j^{-1}) \\ a_j & u+a_j \end{bmatrix}\right\}$$ e

$$\left\{y = x\begin{bmatrix} b & g(a^{-1}) \\ a & b+a \end{bmatrix}\right\} \xrightarrow{\begin{bmatrix} I & M_j \\ 0 & I \end{bmatrix}} \left\{y = x\begin{bmatrix} b, & g(a^{-1})+g(a_j^{-1}) \\ a+a_j, & b+(a+a_j) \end{bmatrix}\right\}.$$

Se $\bar{a} = a + a_j$ allora $g(a^{-1}) + g(a_j^{-1}) = g((\bar{a}+a_j)^{-1}) + g(a_j^{-1})$ $= g_j(\bar{a})^{-1}$.

(3) Usa (3.3) di nuovo.

Inoltre, Barriga [2] e anche Cohen-Ganley [8] hanno trovato lo stesso piano π_1 di ordine q^2, nucleo $GF(q)$, usando polinomi di Chebyshev di grado 5.

Usando (5.20) e (3.3) possiamo ottenere le seguenti fibrazioni per π_1^j.

(5.23) Teorema (Jha-Johnson [30]).

Sia $V = \{(x_1,x_2,y_1,y_2) \mid x_1,x_2,y_1,y_2 \in GF(q)$ *dove* $q = p^r$, r *dispari e* $p \equiv \pm 2 \bmod 5\}$. *Per ogni* $a_j \neq 0$, $j = 1,\dots,q-1$, *la seguente è una fibrazione per un piano* π_1^j

di ordine q^2 *che ammetta un gruppo di Baer di ordine* q *e sia un piano ri-derivato di* π_1—*il piano di (Barriga- Cohen-Ganley):* $x = 0$, $y = x\begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{bmatrix}$,

$$y = x\begin{bmatrix} v\,, & \{-\gamma((b^{-1}+a_j)^5-a_j^5) + \beta(v(b^{-1}+a_j)^3-a_j^3)-v^2b^{-1}\} \\ b\,, & \beta b(b^{-1}+a_j)^3-a_j^3-v \end{bmatrix}$$

per $u, v, b \neq 0$ *in* $GF(q)$.