III. La forma della rete derivabile in piani di traslazione di dimensione due.

Sia π un piano finito di traslazione e sia $\mathcal{N}$ una rete derivabile. Per Foulser [13], $\mathcal{N}$ è una rete di Desargues. Sia $\mathfrak{B}$ la collezione di sottopiani di Baer di $\mathcal{N}$ e sia K il nucleo di π. Diciamo che π ha dimensione due se l'ordine di π è q^2 e K è isomorfo a GF(q). K-{0} agisce sulla $\mathfrak{B}$ alla GL(2,q). (Nota: Ogni componente $\mathcal{L}$ di $\mathcal{N}$ è un piano di Desargues con rette $\mathcal{L} \cap b$ dove $b \in \mathfrak{B}$. Ancora, K-{0} agisce sulla $\mathcal{L}$ alla GL(2,q). Allora da (q,K-{0}) = 1, abbiamo

(3.1) Teorema (Biliotti-Lunardon [6]).

Sia π *un piano finito di traslazione di ordine* q^2 *e nucleo* K. *Sia* $\mathcal{N}$ *una rete derivable. Allora, ci sono* 0,2 *o* q+1 *sottopiani di* $\mathcal{N}$ *che sono* K-*sottospazi.*

(3.2) Corollario.

Con le stesse ipotesi di (3.1), *se* K ≅ GF(q) (π *ha dimensione due*) *allora ci sono* 2 *o* q+1 *sottopiani di* $\mathcal{N}$ *che sono* K-*sottospazi.*

Dimostrazione. K-{0} ha ordine q-1 e ⊆ GL(2,q).

Ora, sia π un piano di traslazione di dimensione due con nucleo K ≅ GF(q). Scegliamo come tre componenti di $\mathcal{N}$, $(x = 0)$, $(y = 0)$, $(y = x)$. Ancora, se $\pi = \{(x_1,x_2,y_1,y_2) \mid$

$x_i, y_i \in K,\ i = 1,2\}$, scegliamo $\pi_0 = \{(0,x_2,0,y_2) \mid x_2,y_2 \in K\}$ e $\pi_1 = \{(x_1,0,y_1,0) \mid x_1,y_1 \in K\}$ come due sottopiani di Baer (di $\mathcal{N}$) che siano K-sottospazi.

Le componenti di $\mathcal{N}$ hanno la forma: $x = \mathit{0}$, $y = \mathit{0}$, $y = x\begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & g(u) \end{bmatrix}$ dove $u \in K$ e g è una funzione uno-uno su K. Per Foulser [13], queste matrici sono additive e moltiplicative. Allora, $g(u) = u^{\sigma}$ per un qualche automorfismo σ di K.

<u>(3.3) Teorema</u> (Jha-Johnson [35]).

Sia π *un piano di traslazione di ordine* q^2 *e nucleo* $K \cong GF(q)$. *Sia* $\mathcal{N}$ *una rete derivabile che può essere rappresentata nella forma:* $x = \mathit{0}$, $y = \mathit{0}$, $y = x\begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & u^{\sigma} \end{bmatrix}$ *per* $u \in K$ *e* $\sigma \in \mathrm{Aut}\ K$. *Siano le componenti di* $\pi - \mathcal{N}$, $y = x\begin{bmatrix} a & f \\ b & g \end{bmatrix}$.

Se (x_1,x_2,x_3,x_4) *in* π *è rappresentato nel piano derivato* $\bar{\pi}$ *da* (x_1,x_3,x_2,x_4) *allora la componente* $y = x\begin{bmatrix} a & f \\ b & g \end{bmatrix}$ *in* π *é rappresentata da* $y = x\begin{bmatrix} -ab^{-1}, & f-ab^{-1}g \\ b^{-1}, & b^{-1}g \end{bmatrix}$. *Anche, sia* $(x_1,x_2)^{\sigma} = x^{\sigma} = (x_1^{\sigma},x_2^{\sigma})$, *allora* $y = x^{\sigma}\begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{bmatrix}$ *per* $u \in K$ *sono componenti in* $\bar{\pi}$.

<u>Dimostrazione</u>.

$(x_1,x_2,x_1a+x_2b,x_1f+x_2g)$ in π è $(x_1,x_1a+x_2b,x_2,x_1f+x_2g)$ in $\bar{\pi}$. Se $x_1 = \bar{x}_1$, $x_1a+x_2b = \bar{x}_2$ allora, $x_2 = (\bar{x}_2-\bar{x}_1a)b^{-1} = \bar{x}_1(-ab^{-1}) + \bar{x}_2b^{-1}$ e $x_1f + x_2g = \bar{x}_1f+(\bar{x}_2-\bar{x}_1a)b^{-1}g = \bar{x}_1(f-ab^{-1}g) + \bar{x}_2b^{-1}g$.

Inoltre, le componenti in $\overline{\pi}$, $y = x^{\sigma}\begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{bmatrix}$ sono sottopiani di Baer di $\mathcal{N}$.

Ora, sia π un piano likeable di (2.15) (vedi (2.16)(i)).

Sia

$$\mathcal{G} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & a & u & -\frac{1}{3}a^3+J(a) \\ 0 & 1 & a & u \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; u,a \in K \right\}.$$

Le componenti sono: $x = \mathcal{O}$,

$$(y = \mathcal{O})\mathcal{G} = \left[y = x\begin{bmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u & -\frac{1}{3}a^3+J(a) \\ a & u \end{bmatrix} \right]$$

$$= \left[y = x\begin{bmatrix} u-a^2 & -\frac{1}{3}a^3+J(a)-au \\ a & u \end{bmatrix} \right] \quad \text{per} \quad u,a \in K.$$

Se $a = 0$ sia $\mathcal{N} : x = \mathcal{O}$, $y = x\begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{bmatrix}$ per $u \in K$. Allora, i piani likeable sono derivabli.

Usando (3.3), abbiamo <u>i piani che sono derivati dai piani likeable</u>:

(3.4) *Sia* π *un piano likeable con gruppo*

$$\mathcal{G} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & a & u & -\frac{1}{3}a^3+J(a) \\ 0 & 1 & a & u \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; a, u \in K \right\}.$$

Allora, un piano $\overline{\pi}$ *può costruirsi per derivazione con componenti:*

$$x = 0, \quad y = x\begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{bmatrix}, \quad y = x\begin{bmatrix} -ua^{-1}+a, & \frac{1}{3}a^3+J(a)-u^2a^{-1} \\ a^{-1} & a^{-1}u \end{bmatrix}$$

per $u, a \neq 0$ *in* K.