II. Sulla struttura dei piani di traslazione di ordine q^2 che hanno un gruppo di collineazioni di ordine q^2.

Considereremo piani di traslazione di ordine q^2 con nucleo $K \cong GF(q)$ che hanno un gruppo di collineazioni di ordine q^2 nel complemento lineare di traslazione e daremo una classificazione che fa uso di certe funzioni su $GF(q)$.

La studio delle relazioni tra il piano e le funzioni è stato iniziato da Kantor [51] con le funzioni "likeable." Anche Fink, Johnson, Wilke [11] e Johnson, Wilke [50] hanno studiato funzioni simili alle funzioni likeable e le hanno chiamate "desirable" per q dispari e "elusive" per q pari. Ad esempio, i piani di Lüneburg-Tits sono elusive.

Altri autori hanno lavorato su queste funzioni—likeable e elusive (Ad esempio, Biliotti, Menichetti [4], Cohen [7], e Ganley [17]). Ganley ha provato che le funzioni "likeable" nel caso q pari danno soltanto i piani di Betten. Inoltre, Biliotti e Menichetti hanno provato che le funzioni "elusive" danno soltanto i piani di Betten, i piani di Lüneburg-Tits e un nuovo piano di ordine 64.

Inoltre, Bartolone [3] ha cominciato questi studi nel 1981, là dove ha studiato i piani di traslazione di ordine q^2 che hanno un gruppo di ordine $q^2(q-1)$ (si veda anche sezione IX). Jha, Johnson [22] e Jha, Johnson, Wilke [38] hanno approfondito gli studi di Bartolone.

(v) Il piano di Biliotti-Menichetti [4] di ordine 64 è ottenuto dal gruppo delle forma

$$\left\{ \left[\begin{matrix} 1 & b^2 & u+b^3+b^4, & u^2+u^4+ub^2+b+b^2+b^4+b^5+b^6 \\ 0 & 1 & b & u \\ 0 & 0 & 1 & b^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right] \middle| \; b,u \in GF(8) \right\}.$$

Cioè, $T(b) = b^2$, $m(u) = u^2+u^4$, $\ell(b) = b^4$, e $R(b) = b + b^2 + b^4 + b^5 + b^6$.

(vi) I piani di Jha-Johnson [23] di ordine q^2 sono interessanti perché il gruppo di elazioni ha ordine $2 \cdot q$. Biliotti ha recentemente provato che esiste soltanto un piano di questo tipo di ordine 64. La domanda sulla esistenza per l'ordine $q^2 \neq 64$ è aperta.

Il gruppo $\mathcal{G}$ ha la forma:

$$\left\{ \left[\begin{matrix} 1 & t_0(b+b^2), & \left\{ \begin{matrix} u+bt_0(b+b^2) \\ +b+t_0(b^2+b^4) \end{matrix} \right\}, & \left\{ \begin{matrix} u+u^2+ut_0(b+b^2) \\ +t_0^2 b^3(1+b)^3+S(b) \end{matrix} \right\} \\ 0 & 1 & b, & 1 \\ 0 & 0 & 1 & t_0(b+b^2) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right] \middle| \; b,u \in FD(q),\ q \text{ pari},\ t_0 \text{ costante in } GF(q) \right\}.$$

Cioè, $T(b) = t_0(b+b^2)$, $m(u) = u+u^2$, $\ell(b) = b + t_0(b^2+b^4)$, $R(b) = t_0^2 b^3(1+b)^3 + S(b)$ dove S è un funzione additiva su $GF(q)$.

(vii) I piani "likeable" sono derivabili. Le loro forme sono facilmente ottenute dopo la sezione tre.