II. Sulla struttura dei piani di traslazione di ordine q^2 che hanno un gruppo di collineazioni di ordine q^2.

Considereremo piani di traslazione di ordine q^2 con nucleo $K \cong GF(q)$ che hanno un gruppo di collineazioni di ordine q^2 nel complemento lineare di traslazione e daremo una classificazione che fa uso di certe funzioni su $GF(q)$.

La studio delle relazioni tra il piano e le funzioni è stato iniziato da Kantor [51] con le funzioni "likeable." Anche Fink, Johnson, Wilke [11] e Johnson, Wilke [50] hanno studiato funzioni simili alle funzioni likeable e le hanno chiamate "desirable" per q dispari e "elusive" per q pari. Ad esempio, i piani di Lüneburg-Tits sono elusive.

Altri autori hanno lavorato su queste funzioni—likeable e elusive (Ad esempio, Biliotti, Menichetti [4], Cohen [7], e Ganley [17]). Ganley ha provato che le funzioni "likeable" nel caso q pari danno soltanto i piani di Betten. Inoltre, Biliotti e Menichetti hanno provato che le funzioni "elusive" danno soltanto i piani di Betten, i piani di Lüneburg-Tits e un nuovo piano di ordine 64.

Inoltre, Bartolone [3] ha cominciato questi studi nel 1981, là dove ha studiato i piani di traslazione di ordine q^2 che hanno un gruppo di ordine $q^2(q-1)$ (si veda anche sezione IX). Jha, Johnson [22] e Jha, Johnson, Wilke [38] hanno approfondito gli studi di Bartolone.

Dunque, sia π un piano di traslazione di ordine q^2, $q = p^r$, con nucleo $F \cong GF(q)$. Sia $\mathcal{G}$ un gruppo contenuto nel complemento lineare di traslazione, di ordine q^2. Per (1.5), $\mathcal{G}$ fissa una componente $\mathcal{L}$ che possiamo supporre sia $(x = \mathit{0})$.

<u>(2.1) Teorema</u>. *Sia* q *dispari. Allora* $\mathcal{G}$ *contiene un sottogruppo di elazioni* E *di ordine* $\geq q$ *e* $\mathcal{G}$ *non contiene sottogruppi di Baer. Inoltre,* $\mathcal{G}$ *ha un orbita regolare su* $\ell_\infty - \{(\infty)\}$.

<u>Dimostrazione</u>:

$\mathcal{G} \subseteq GL(4,q)$ e $|\mathcal{G}| = q^2$. Sia $E \trianglelefteq \mathcal{G}$ il sottogruppo delle elazioni di asse $(x = \mathit{0})$.

Allora, $\mathcal{G}|_{\mathcal{L}} \cong \mathcal{G}|_{\mathcal{E}}$ e $\mathcal{G}|_{\mathcal{E}} \leq GL(2,q)$. Poichè $|GL(2,q)| = q(q^2-1)(q-1)$, allora $|E| \geq q$.

Se esiste $g \in \mathcal{G}$ che fissi $P \in \ell_\infty - \{(\infty)\}$, allora g deve fissare almeno q punti affini di $\mathit{0}P$ e inoltre, in modo simile, g deve fissare q punti affini di $\mathcal{L}$ (nota: $\mathcal{L}$ e $\mathit{0}P$ hanno dimensione due). Allora, $Fix(\langle g \rangle)$ è un sottopiano di Baer. D'altra parte, Foulser [12] ha provato che gruppi di elazioni e gruppi di Baer non sono compatibili (vedi anche sezione IV).

(2.2). *In generale,* $\mathcal{G}$ *non contiene elementi di Baer se e soltanto se* $\mathcal{G}$ *è transitivo su* $\ell_\infty - \{(\infty)\}$.

(2.3). *Il sottogruppo di elazioni* E *di asse* $\mathcal{L}$ $(= (x = 0))$ *ha ordine almeno* q.

Sia $q = p^r$, allora $|E| = p^{r+t}$ per un certo t con $0 \leq t \leq r$.

(2.4). *Si può scegliere le coordinate in modo tale che una elazione* σ *in* $Z(\mathcal{G})$ *(centro) abbia la forma* $\begin{bmatrix} I & I \\ 0 & I \end{bmatrix}$.

Dimostrazione.

$E \trianglelefteq \mathcal{G}$ è un sottogruppo abeliano elementare e quindi uno spazio vettoriale su $GF(p)$. Allora, $\mathcal{G}$, agendo su E, deve fissare un qualche sottospazio $\langle\sigma\rangle$ di dimensione uno di E. Quindi, $\mathcal{G}$ centralizza σ. Allora, σ ha la forma $\begin{bmatrix} I & B \\ 0 & I \end{bmatrix}$ ma possiamo scegliere $(y = 0)\sigma$ in modo tale che sia $(y = x)$. Ne segue che possiamo assumere che B sia I.

Ora, possiamo assumere che $\mathcal{G}|_{(x=0)} \subseteq \left\{\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$ perchè la restrizione è un p-sottogruppo di $SL(2,q)$.

Sia $\lambda \subseteq K$ tale che $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in (\mathcal{G}|_{x=0})$ per $a \in \lambda$. Quindi, $|\lambda| = p^{r-t}$.

(2.5). *Si può scegliere le coordinate in modo tale che* $\mathcal{G}$ *sia rappresentabile nella forma:*

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & a & b_1 & b_2 \\ 0 & 1 & b_3 & b_4 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; a \in \lambda \right\}.$$

<u>Dimostrazione</u>:

Sia $g \in \mathcal{G}$, g fissa $(x = O)$ cosicchè g sarà rappresentato da una matrice della forma $\begin{bmatrix} A & B \\ O & C \end{bmatrix}$ dove A, B, C sono matrici 2 per 2. Ma, $\sigma = \begin{bmatrix} I & I \\ O & I \end{bmatrix}$ è nel centro di $\mathcal{G}$ cosicchè $A = C$. Cioè, $\begin{bmatrix} I & I \\ O & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ O & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B+C \\ O & C \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} A & B \\ O & C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & I \\ O & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & A+B \\ O & C \end{bmatrix}$.

Ora consideriamo $(y = O)\mathcal{G}$. Si ha:

$$(x, O) \longrightarrow \left(x\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, x\begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} + O\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$\in \left(y = x\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}\right) \equiv \left(y = x\begin{bmatrix} b_1-ab_3, & b_2-ab_4 \\ b_3, & b_4 \end{bmatrix}\right).$$

In sezione VI, considereremo il caso più generale ma per il resto della sezione,

(2.6) *facciamo il presupposto che* $\mathcal{G}$ *abbia un'orbita regolare su* $\ell_\infty - \{(\infty)\}$.

Rimandando alla forma (2.5), abbiamo $\{[b_3, b_4] \mid g \in \mathcal{G}\} = K \times K$.

(2.7) *Sia* $b_3 = 0$ *in* $g = \begin{bmatrix} 1 & a & b_1 & b_2 \\ 0 & 1 & b_3 & b_4 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. *Allora* $a = 0$.

Dimostrazione:

Supposto non vero, allora $(x_1, x_2, y_1, y_2)g = (x_1, x_2, y_1, y_2)$ se e soltanto se $x_1 = 0$, e $b_4x_2 + y_1a = 0$. Quindi, g fisserebbe ogni punto di $\{(0, x_2, -a^{-1}b_4x_2, y_2) \mid x_2, y_2 \in K\}$. Questo è impossible perché non ci sono elementi di Baer per (2.2) e (2.6).

(2.8) *Sia* $b_3 = 0$. *Allora* $b_1 = b_4$ *o* $\mathcal{G} = E$.

Dimostrazione:

Se $b_3 = 0$ allora $a = 0$ per (2.7). Consideriamo

$$\begin{bmatrix} I & \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ 0 & b_4 \end{bmatrix} \\ \mathit{0} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{matrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{bmatrix} \\ \mathit{0} & \begin{matrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{matrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -\begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ 0 & b_3 \end{bmatrix} \\ \mathit{0} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{matrix} 1 & -c \\ 0 & 1 \end{matrix} & F \\ \mathit{0} & \begin{matrix} 1 & -c \\ 0 & 1 \end{matrix} \end{bmatrix}$$

dove $\begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} F + \begin{bmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathit{0}$. Questo elemento precedente è

$$h = \begin{bmatrix} I & \begin{bmatrix} 0 & c(b_1 - b_4) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathit{0} & I \end{bmatrix}$$

Cioè, $(y = \mathcal{O})h \equiv \left[y = x\begin{bmatrix} 0 & c(b_1-b_4) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right]$ cosicchè $c(b_1-b_4) = 0$. Se $\mathcal{G} \neq \mathcal{E}$ c'è un qualche $c \neq 0$ in λ. In questo caso, $b_1 = b_4$.

Se $E = \mathcal{G}$ allora π è un piano su un semicorpo. Quindi, possiamo assumere $E \neq \mathcal{G}$.

Inoltre,

$$(2.9) \qquad E \supseteq \left\{ \begin{bmatrix} I & \begin{bmatrix} u & m(u) \\ 0 & u \end{bmatrix} \\ \mathcal{O} & I \end{bmatrix} \;\middle|\; u \in K \textit{ e } m \textit{ è una funzione additiva su } K \right\} = E_0. \quad \textit{Inoltre,} \quad E_0 \subseteq Z(\mathcal{G}).$$

Dimostrazione:

Se $b_3 = 0$ allora $b_1 = b_4$ e $b_2 = m(b_1)$ per una qualche funzione m. Ma E è additivo e quindi anche m è additiva. Si noti che $\{[b_3, b_4]\} = K \times K$ cosicchè, $|\{[0, b_4]\}| = |K| = |E_0|$.

(2.10). *Sia* $b_4 = 0$ *in* $g = \begin{bmatrix} 1 & a & b_1 & b_2 \\ 0 & 1 & b_3 & b_4 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. *Allora,* a, b_1, b_2 *sono rappresentabili mediante le funzioni* T, L, R *su* F *dove:*

$$a = T(b_3), \quad b_1 = L(b_3), \quad b_2 = R(b_3).$$

Dimostrazione:

$$(y = O) \xrightarrow{g} \left[y = x \begin{bmatrix} b_1 - b_3, & b_2 \\ b_3, & 0 \end{bmatrix} \right] \quad \text{con} \quad b_4 = 0.$$

Sia $k = \begin{bmatrix} 1 & c & d_1 & d_2 \\ 0 & 1 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ allora, $((y = O)k) =$

$\left[y = x \begin{bmatrix} d_1 - cb_3 & d_2 \\ b_3 & 0 \end{bmatrix} \right]$. $\begin{bmatrix} b_1 - ab_3, & b_2 \\ b_3 & , 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} d_1 - cb_3, & d_2 \\ b_3 & , 0 \end{bmatrix}$ è non-singolare se $g \neq k$. Pertanto, $g = k$ e $a = T(b_3)$, $b_1 = L(b_3)$ e $b_2 = R(b_3)$ (cioè, $a = c$ cosicché $b_1 = d_1$ e $b_2 = d_2$).

(2.11) Teorema Fondamentale per l'orbita regolare.

Sia π *un piano di traslazione di ordine* $q^2 = p^{2r}$ *che non sia un piano sopra un semicorpo. Il nucleo di* π *sia* $K \cong GF(q)$ *e supponiamo che* π *ammetta un gruppo* $\mathcal{G}$ *di collineazioni di ordine* q^2 *contenuto nel complemento lineare di traslazione. Supponiamo infine che* $\mathcal{G}$ *non abbia elementi di Baer o equivalentemente* $\mathcal{G}$ *abbia un'orbita regolare sulla retta all'infinito. Allora esistono le funzioni* T, L, R, m *su* K *tali che* $\mathcal{G}$ *può essere rappresentato nella forma seguente:* $\mathcal{G} = \{M(b,u) \mid b,u \in K\}$ *dove*

$$M(b,u) = \begin{bmatrix} 1 & T(b) & u+L(b), & m(u)+uT(b)+R(b) \\ 0 & 1 & b\ , & u \\ 0 & 0 & 1\ , & T(b) \\ 0 & 0 & 0\ , & 1 \end{bmatrix}$$

Inoltre:

1) m *e* T *sono additive e* $m(a) = 0$ *per ogni* $a \in GF(p)$.

2) $|\{T(b) \mid b \in K\}| = p^{r-t}$ *per un certo* t *tale che* $0 \leq t \leq r$.

3) *Il gruppo* E *delle elazioni ha ordine* p^{r+t} *e è costituito da tutte e sole le matrici* $M(b,u)$ *tali che* $T(b) = 0$.

4) $L(a) + L(b) + T(b)a = L(a+b) + bT(a)$ *per ogni* $a,b \in K$.

5) $R(a) + R(b) + L(b)T(a) = m(bT(a)) + bT(a)T(a) + R(a+b)$ *per ogni* $a,b \in K$.

<u>Dimostrazione</u>.

$M(b,0)M(a,0) = M(a+b,bT(a))$ da cui

$$\begin{bmatrix} 1 & T(a)+T(b) & L(a)+T(b)a+L(b), & R(a)+R(b)+L(b)T(a) \\ 0 & 1 & a+b\ , & bT(a) \\ 0 & 0 & 1\ , & T(a)+T(b) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & T(a+b) & bT(a)+L(a+b), & m(bT(a))+bT(a)T(a+b)+R(a+b) \\ 0 & 1 & a+b \quad , & bT(a) \\ 0 & 0 & 1 \quad , & T(a+b) \\ 0 & 0 & 0 \quad , & 1 \end{bmatrix}.$$

Per (2.9), e gli (1,2)-elementi delle due matrici, (1) è provato. (2) e (3) sono veri per (2.4) e (2.5). Gli (1,3)-elementi delle due matrici danno (4) e gli (1,4)-elementi danno (5).

Adesso, consideriamo il caso q pari.

<u>(2.12) Con le stesse ipotesi di (2.11).</u>

Se q *è pari, allora* $L(x) = xT(x) + \ell(x)$ *dove* ℓ *è una funzione additiva su* $K \cong GF(q)$ *ossia* $\ell(x) = \sum_{j=0}^{r-1} \ell_j x^{2^j}$, se $q = 2^r$.

<u>Dimostrazione</u>.

(1) <u>Lemma</u> (Vaughan [61]). Sia $q = p^r$, $K \cong GF(q)$. Qualunque funzione f addditiva su K può essere rappresentata nella forma $f(x) = \sum_{j=0}^{r-1} a_j x^{p^j}$, dove $a_j \in K$, $j = 0,1,\dots,r-1$.

(2) <u>Lemma</u> (Biliotti, Menichetti [4](1.1)). Sia g una funzione su $K \cong GF(Q)$ tale che

$$\sum_{i\in I,\, j\in I} k_{ij}(x^{2^i} y^{2^j} + y^{2^i} x^{2^j}) + g(x+y) + g(x) + g(y) = 0$$

per ogni $x, y \in K$, dove I, J sono sottoinsiemi finiti di N (numeri naturali) e $k_{ij} \in K$.

Allora, $g(x) = \sum_{i\in I, j\in I} k_{ij} x^{2^i+2^j} + \Omega(x)$ dove Ω è una funzione additiva su K.

Ora, in ((2.11)(4)), abbiamo $L(a) + L(b) + T(b)a = L(a+b) + bT(a)$. Sia $T(z) = \sum_{i=0}^{r-1} c_i z^{2^i}$. Allora

$$(3) \qquad L(a) + L(b) + \sum_{i=0}^{r-1} c_i b^{2^i} a + \sum_{i=0}^{r-1} c_i a^{2^i} b + L(a+b) = 0.$$

Sia $\sum_{i=0}^{r-1} c_i (ab^{2^i} + ba^{2^i}) = \sum_{i,j} k_{ij}(a^{2^i} b^{2^j} + b^{2^i} a^{2^j})$ dove $k_{ij} = \begin{cases} c_i & \text{per } j = 0 \\ 0 & \text{per } j \neq 0 \end{cases}$. Possiamo usare il lemma (2) per ottenere: $L(x) = \sum_{i,j} k_{ij} x^{2^i+2^j} + \Omega(x)$, dove Ω è additiva.

Allora, $L(x) = \sum_i c_i x^{2^i+1} + \Omega(x) = xT(x) + \Omega(x)$.

<u>(2.13) Teorema</u>.

Con le stesse ipotesi di (2.11) *e* q *dispari si ha* $|E| = q$ o q^2.

<u>Dimostrazione</u>.

Se $|E| > q$ esiste un elemento $g \in E - E_0$ della forma

$\begin{bmatrix} I & \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix} \\ 0 & I \end{bmatrix}$ con $c_3 \neq 0$. (Se $c_3 = 0$ allora $c_1 = c_4$ perché E_0 contiene $\begin{bmatrix} I & \begin{bmatrix} c_1 & m(c_1) \\ 0 & c_1 \end{bmatrix} \\ 0 & I \end{bmatrix}$.) Se $|E| \neq q^2$, c'è un elemento k della forma $\begin{bmatrix} 1 & e & b_1 & b_2 \\ 0 & 1 & b_3 & b_4 \\ 0 & 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ con $e \neq 0$.

Consideriamo $ghg^{-1}h^{-1}$ che è eguale a

$$\begin{bmatrix} I & \begin{bmatrix} c_3e \,, & ec_3(c_4-c_1)-c_3e^2 \\ 0 \,, & -c_3e \end{bmatrix} \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

D'altra parte, in E_0 c'è l'elemento $\begin{bmatrix} I & \begin{bmatrix} c_3e, & m(c_3e) \\ 0 \,, & c_3e \end{bmatrix} \\ 0 & I \end{bmatrix}$.

Quindi, $-c_3e = c_3e$ cosicché $c_3 = 0$ e $E = E_0$.

Abbiamo:

(2.14) *Se* q *è dispari allora possiamo prendere* $T(a) = a$ *per ogni* $a \in K$.

Dimostrazione. (traccia)

$L(a) + L(b) + T(b)a = L(a+b) + bT(a)$ per ((2.11)(4)).

Allora, rovesciando i ruoli di a e b, anche

$$L(b) + L(a) + T(a)b = L(b+a) + aT(b)$$

cosicché $2aT(b) = 2bT(a)$. Quindi, $aT(1) = T(a)$. Ora, possiamo cambiare base ottenendo il risultato.

<u>(2.15) Teorema</u>.

Sia π un piano di traslazione di ordine q^2 con nucleo $K \cong GF(q)$ che ammetta un gruppo $\mathcal{G}$ di ordine q^2 nel complemento lineare di traslazione. Se $\mathcal{G}$ ha un'orbita regolare su ℓ_∞ allora $\mathcal{G}$ può essere rappresentato da un gruppo di matrici della seguente forma:

Se q è pari

$$\mathcal{G} = \left\{ \left[\begin{array}{cccc} 1 & T(b) & u+bT(b)+\ell(b) , & m(u)+uT(b)+R(b) \\ 0 & 1 & b , & u \\ 0 & 0 & 1 , & T(b) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \middle| \ b,u \in K \right\}$$

dove T, m, ℓ sono funzioni additive e $m(1) = 0$. Inoltre,

$$R(a) + R(b) + \ell(b)T(a) = m(bT(a)) + b(T(a))^2 + R(a+b),$$

per ogni $a,b \in K$,

$$\text{e} \quad \left| \left[\begin{array}{cc} u+bT(b)+\ell(b) , & m(u)+uT(b)+R(b) \\ b , & u \end{array} \right] \right| \neq 0$$

se almeno uno tra b e u non è zero.

Se q è dispari (allora $p \neq 3$—si veda [50])

$$\mathcal{G} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & a & u & -\frac{1}{3}a^3+J(a)+m(u) \\ 0 & 1 & a & u \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; a,u \in K \right\}.$$

dove (1) m è additiva e $m(GF(p)) \equiv 0$,

(2) $J(a+b) + m(ab) = J(a) + J(b)$

per ogni $a,b \in K$,

(3) $$\left\| \begin{bmatrix} u & -\frac{1}{3}a^3 + J(a)+m(u) \\ a & u \end{bmatrix} \right\| \neq 0$$

se almeno uno tra u e a non è zero.

<u>Dimostrazione</u>.

Per q pari, usiamo (2.12) e (2.11).

Per q dispari, vogliamo provare per (2.11) che $L(b) = bL(1)$. Cambiamo le basi mediante

$$\begin{bmatrix} 1 & L(1)/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L(1)/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ora, sia $u \equiv u-aL(1)/2$ e sia $-a^2L(1)/4 + R(a) + m(-aL(1)/2) + a(L(1))^2/4 = t(a)$ e $t(a) = -\frac{1}{3}a^3 + J(a)$. Questo dà il risultato (2.15).

(2.16) Note.

(i) Se $|E| = q$ allora T è uno-uno su K. In questo caso si ottengono i piani "Elusive" o "Desirable" per q pari e dispari rispettivamente.

Per q pari o dispari, ma con la forma (2.15) per q dispari e anche $m \equiv 0$, si ottengono i piani "likeable".

(ii) I piani di Betten (q pari) e Walker (q dispari) somo ottenuti per $m \equiv 0$ e $J \equiv 0$.

(iii) Ci sono poi i piani di Kantor ottenuti assumendo $m \equiv 0$ e $J(a) = k^{-1}a + ka^5$ dove k non è un quadrato.

(iv) I piani di Lüneburg-Tits sono "elusive" e il gruppo $\mathcal{G}$ ha la forma

$$\left\{ \left[\begin{matrix} 1 & b^{\alpha^{-1}} & u+b^{1+\alpha^{-1}}, & (u+u^{\alpha})+ub^{\alpha^{-1}}+b+b^{\alpha}+b^{\alpha+1} \\ 0 & 1 & b, & u \\ 0 & 0 & 1 & b^{\alpha^{-1}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right] \;\middle|\; b,u \in GF(2^{2k+1}) \quad \alpha : x \longrightarrow x^{2^{k+1}} \right\}.$$

Cioè, $T(b) = b^{\alpha^{-1}}$, $m(u) = u + u^{\alpha}$, e $R(b) = b + b^{\alpha} + b^{\alpha+1}$, $\mathfrak{L}(b) = b$.

(v) Il piano di Biliotti-Menichetti [4] di ordine 64 è ottenuto dal gruppo delle forma

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & b^2 & u+b^3+b^4, & u^2+u^4+ub^2+b+b^2+b^4+b^5+b^6 \\ 0 & 1 & b & u \\ 0 & 0 & 1 & b^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \middle| \; b,u \in GF(8) \right\}.$$

Cioè, $T(b) = b^2$, $m(u) = u^2+u^4$, $\ell(b) = b^4$, e $R(b) = b + b^2 + b^4 + b^5 + b^6$.

(vi) I piani di Jha-Johnson [23] di ordine q^2 sono interessanti perché il gruppo di elazioni ha ordine $2 \cdot q$. Biliotti ha recentemente provato che esiste soltanto un piano di questo tipo di ordine 64. La domanda sulla esistenza per l'ordine $q^2 \neq 64$ è aperta.

Il gruppo $\mathcal{G}$ ha la forma:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1\,, & t_0(b+b^2), & \left\{\begin{matrix} u+bt_0(b+b^2) \\ +b+t_0(b^2+b^4) \end{matrix}\right\}, & \left\{\begin{matrix} u+u^2+ut_0(b+b^2) \\ +t_0^2b^3(1+b)^3+S(b) \end{matrix}\right\} \\ 0 & 1 & b\,, & 1 \\ 0 & 0 & 1 & t_0(b+b^2) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \middle| \; b,u \in FD(q),\ q \text{ pari},\ t_0 \text{ costante in } GF(q) \right\}.$$

Cioè, $T(b) = t_0(b+b^2)$, $m(u) = u+u^2$, $\ell(b) = b + t_0(b^2+b^4)$, $R(b) = t_0^2 b^3(1+b)^3 + S(b)$ dove S è un funzione additiva su $GF(q)$.

(vii) I piani "likeable" sono derivabili. Le loro forme sono facilmente ottenute dopo la sezione tre.