CAPITOLO 2. LE SPERANZE CONDIZIONATE: CARATTERIZZAZIONI.

2.1. LA CARATTERIZZAZIONE DI MOY.

La prima caratterizzazione delle SC fu data da Moy nel 1954 ([30]). Questo lavoro rappresenta parte della tesi di dottorato svolta sotto la guida di Doob. Essa è basata sulle seguenti proprietà.

Sia T un operatore $T : L^p(\mathscr{F}) \to L^p(\mathscr{F})$ ($p\in[1,\infty[$) che soddisfaccia alle seguenti proprietà:

(M.1) T è lineare;

(M.2) se f è limitata tale è anche Tf, cioè $TL^\infty(\mathscr{F}) \subset L^\infty(\mathscr{F})$;

(M.3) $T(f\cdot Tg)=(Tf)(Tg)$ quali che siano f e g in $L^\infty(\mathscr{F})$;

(M.4) T è continuo: $\|f_n-f\|_p \to 0 \Longrightarrow \|Tf_n-Tf\|_p \to 0$.

Se $\mathscr{G}$ è una tribù in $\mathscr{F}$ l'operatore di SC $E^{\mathscr{G}}$ verifica le condizioni (M1)-(M4). Per la (M1) si veda il teorema (1.3.1)(h), per la (M.2) il teorema (1.3.1)(f), per la (M3) la (1.3.11) e per la (M4) il teorema (1.3.24). E' notevole però che valga il viceversa, e cioè che se T soddisfa alle (M1)-(M4), esso ammette la rappresentazione $Tf=E(fg|\mathscr{F}_T)$ ove g è un'opportuna v.a. e $\mathscr{F}_T \subset \mathscr{F}$ è una tribù (teorema (1.7)).

Nel seguito di questa sezione le (M1)-(M4) si riterranno senz'altro verificate e non saranno perciò richiamate nei lemmi che seguono.

(1.1) **LEMMA.** Se $\mathscr{H} := \{ f\in L^p(\mathscr{F}) : T(fg) = f\cdot Tg \ \forall g\in L^\infty(\mathscr{F})\}$ allora $\mathscr{H}$ è un sottospazio chiuso di $L^p(\mathscr{F})$. Inoltre se f_1, f_2 sono due v.a. limitate di $\mathscr{H}$, è in $\mathscr{H}$ anche il loro prodotto (cioè

$f_1, f_2 \in \mathscr{H} \cap L^\infty(\mathscr{F}) \Rightarrow f_1 f_2 \in \mathscr{H}$).

DIM. Si osservi, innanzi tutto, che $\mathscr{H}$ non è vuoto perché $1 \in \mathscr{H}$. Se f_1 e f_2 sono in $\mathscr{H}$ e g è limitata riesce $T\{(f_1+f_2)g\} = T(f_1 g)+T(f_2 g) = f_1 Tg + f_2 Tg = (f_1+f_2)Tg$ sicché $f_1+f_2 \in \mathscr{H}$. Se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f \in \mathscr{H}$ è $T(\alpha fg) = \alpha T(fg) = \alpha f Tg$ per ogni g di $L^\infty(\mathscr{F})$ sicché $\alpha f \in \mathscr{H}$. Ciò prova che $\mathscr{H}$ è un sottospazio di $L^p(\mathscr{F})$. Se poi f_1 e f_2 sono limitate, tali sono anche $f_1 g$ e $f_2 g$ per ogni g di $L^\infty(\mathscr{F})$, come pure $f_1 f_2 g$, perciò $T(f_1 f_2 g) = f_1 T(f_2 g) = f_1 f_2 Tg$ sicché $f_1 f_2$ è in $\mathscr{H}$. Rimane da mostrare che $\mathscr{H}$ è chiuso nella topologia della norma $\| \ \|_p$. Si supponga dunque $\{f_n\} \subset \mathscr{H}$ e $f_n \to f$ in $L^p(\mathscr{H})$. Poiché $\|f_n g - fg\|_p \leq \|g\|_\infty \|f_n - f\|_p$ per ogni g di $L^\infty(\mathscr{F})$ si ha anche $f_n g \to fg$ in $L^p(\mathscr{F})$ e quindi per la (M4), $T(f_n g) \to T(fg)$ in $L^p(\mathscr{F})$. D'altro canto se g è limitata, tale è anche Tg per la (M2), sicché $f_n(Tg) \to f(Tg)$ in $L^p(\mathscr{F})$. Poiché riesce $f_n(Tg) = T(f_n g)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $f(Tg) = T(fg)$: $\mathscr{H}$ è così chiuso.//

(1.2) LEMMA. $TL^p(\mathscr{F}) \subset \mathscr{H}$ (cioè $Tf \in \mathscr{H}\ \forall f \in L^p(\mathscr{F})$). ($p \in [1,+\infty]$).

DIM. Se $p = \infty$ l'asserto è ovvio, in virtù della (M3). Si supponga perciò che sia $p < +\infty$ e che $f \in L^p(\mathscr{F})$ non sia limitata. In tal caso esiste una successione $\{f_n\}$ di v.a. limitate tali che $f_n \to f$ in $L^p(\mathscr{F})$; ma allora la (M4) assicura che sia $Tf_n \to Tf$ in $L^p(\mathscr{F})$. Poiché $Tf_n \in \mathscr{H}$ per ogni n e poiché per il lemma precedente $\mathscr{H}$ è chiuso si ha $Tf \in \mathscr{H}$.//

(1.3) LEMMA. La famiglia $\mathscr{F}_T := \{A \in \mathscr{F} : 1_A \in \mathscr{H}\}$ è una tribù contenuta in $\mathscr{F}$.

DIM. (a) Poiché $1 \in \mathscr{H}$ riesce $\Omega \in \mathscr{F}_T$. (b) Se A è in $\mathscr{F}_T$ riesce

$1_A \in \mathscr{H}$; poiché $\mathscr{H}$ è uno spazio vettoriale e $1 \in \mathscr{H}$ si ha $1_{A'} = 1 - 1_A \in \mathscr{H}$ sicché $A' \in \mathscr{F}_T$.

(c) $\mathscr{F}_T$ è stabile rispetto all'intersezione finita; infatti se $A_1, A_2 \in \mathscr{F}_T$ riesce $1_{A_1}, 1_{A_2} \in \mathscr{H}$ e, per il lemma (1.1), $1_{A_1 \cap A_2} = 1_{A_1}\, 1_{A_2} \in \mathscr{H}$ sicché $A_1 \cap A_2 \in \mathscr{F}_T$. Ma allora $\mathscr{F}_T$ è stabile anche rispetto all'unione finita: $1_{A_1 \cup A_2} = 1_{A_1} + 1_{A_2} - 1_{A_1 \cap A_2} \in \mathscr{H}$ onde $A_1 \cup A_2 \in \mathscr{F}_T$. Per induzione si vede quindi che $\mathscr{F}_T$ è stabile rispetto all'unione finita. Sia ora $\{A_k\}$ una successione di insiemi di $\mathscr{F}_T$; per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $\cup_{k=1}^n A_k \in \mathscr{F}_T$ cioè $1_{\cup_{k=1}^n A_k} \in \mathscr{H}$; perciò, posto $A := \cup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ risulta

$$\| 1_A - 1_{\cup_{k=1}^n A_k} \|_p^p = \int | 1_A - 1_{\cup_{k=1}^n A_k} |^p d\mu = \int | 1_A - 1_{\cup_{k=1}^n A_k} | d\mu = \mu[(A - \cup_{k=1}^n A_k)] \to 0;$$

quindi $1_A \in \mathscr{H}$, perché $\mathscr{H}$ è chiuso, se $p \in [1, +\infty[$. Se, poi, $p = +\infty$ da $1_{\cup_{k=1}^n A_k} \uparrow 1_A$ segue $\| 1_A - 1_{\cup_{k=1}^n A_k} \|_\infty \to 0$ sicché nuovamente si ha $1_A \in \mathscr{H}$.//

(1.4) LEMMA. $L^p(\mathscr{F}_T) \subset \mathscr{H}$ $(p \in [1, +\infty[)$.

DIM. Per la definizione di $\mathscr{F}_T$, le v.a. $\mathscr{F}_T$-semplici appartengono a $\mathscr{H}$, perché è uno spazio lineare. Se f è in $L^p(\mathscr{F}_T)$ esiste una successione $\{f_n\}$ di v.a. $\mathscr{F}_T$-semplici tale che $|f_n|^p \leq |f|^p$ e che $f_n \to f$ q.c.; ma allora si ha anche ([23] teorema 7.6) $f_n \to f$ in $L^p(\mathscr{F})$ sicché $f \in \mathscr{H}$.//

(1.5) LEMMA. $\mathscr{H} \cap L^\infty(\mathscr{F}) \subset L^p(\mathscr{F}_T)$.

DIM. Se f è limitata in $\mathscr{H}$ esistono due numeri $a, b \in \mathbb{R}$ tali che

Ran $f \subset [a,b]$. Sia $\varphi\in C[a,b]$. Per il teorema di Weierstrass esiste una successione $\{p_n\}$ di polinomi definiti in $[a,b]$ tale che $p_n\to\varphi$ uniformemente. Perciò $(p_n\circ f)(\omega)$ converge a $(\varphi\circ f)(\omega)$ uniformemente in $\omega\in\Omega$ onde $p_n\ f \to \varphi\circ f$ in $L^p(\mathscr{F})$. Il lemma (1.1) assicura che $p_n\circ f$ sia in $\mathscr{H}$ per ogni $n\in\mathbb{N}$ se f è limitata; perciò $\varphi\circ f\in\mathscr{H}$ ancora per il lemma (1.1). Se $A\in f^{-1}(\mathscr{B})$ sia $A = f^{-1}(B)$ con $B\in\mathscr{B}$. Poiché, posto $I=[a,b]$, $C(I)$ è denso in $L^p(I)=L^p(I,\mathscr{B}(I),\lambda)$ (si veda, per esempio, [2] 2.4.14) se $p<+\infty$ esiste una successione $\{\varphi_n\}\subset C(I)$ tali che $\varphi_n\to 1_B$ in $L^p(I)$; perciò $\{\varphi_n\circ f\}$ converge a 1_A in $L^p(\mathscr{F})$. D'altro canto, $\varphi_n\circ f$ è in $\mathscr{H}$ per ogni $n\in\mathbb{N}$ sicché 1_A è in $\mathscr{H}$ o, in maniera equivalente, $A\in\mathscr{F}_T$.

Se invece è $p=+\infty$, occorre dimostrare che $L^\infty(\mathscr{F})\subset L^p(\mathscr{F}_T)$, ciò che è una conseguenza pressoché immediata della definizione di $\mathscr{F}_T$ e dell'essere $\mathscr{H}$ un sottospazio chiuso di $L^\infty(\mathscr{H})$. //

(1.6) LEMMA. $TL^p(\mathscr{H})\subset L^p(\mathscr{F}_T)$.

DIM. Se $p=+\infty$ l'asserto è ovvio perché (M2) e (1.5) danno $TL^\infty(\mathscr{F})\subset L^\infty(\mathscr{F})\subset L^p(\mathscr{F}_T)$. Si supponga perciò $p<+\infty$. Per ogni f in $L^p(\mathscr{F})$ si può trovare una successione $\{f_n\}$ di v.a. limitate ($f_n\in L^\infty(\mathscr{F})$) con $f_n\to f$ in $L^p(\mathscr{F})$. La (M4) fornisce allora $Tf_n\to Tf$ in $L^p(\mathscr{F})$, mentre, per la (M2), Tf_n è in $L^\infty(\mathscr{F})$ per ogni $n\in\mathbb{N}$. I lemmi (1.2) e (1.5) danno così $Tf_n\in L^p(\mathscr{F}_T)$ per ogni $n\in\mathbb{N}$ e quindi $Tf\in L^p(\mathscr{F}_T)$ poiché $L^p(\mathscr{F}_T)$ è un sottospazio chiuso di $L^p(\mathscr{F})$. //

Siamo ora pronti ad annunciare il primo teorema di caratterizzazione di Moy.

(1.7) **TEOREMA.** Per un operatore $T : L^p(\mathscr{F}) \to L^p(\mathscr{F})$ con $p\in[1,+\infty[$ sono equivalenti le affermazioni:

(a) T soddisfa alle proprietà (M1)-(M4);

(b) T ammette la rappresentazione:

(1.8) $$Tf = E(fg|\mathscr{F}_T) \qquad (f\in L^p(\mathscr{F})),$$

ove $\mathscr{F}_T$ è la tribù del lemma (1.3). e g è in $L^q(\mathscr{F})$ ($q=p/(p-1)$ se $p<+\infty$, mentre $q=\infty$ se $p=1$) ed è tale che $E(g/\mathscr{F}_T)$ sia limitata.

DIM. (a) $\Longrightarrow$ (b). Il funzionale $J : L^p(\mathscr{F}) \to \mathbb{R}$ definito da

(1.9) $$J(f) := \int Tf\, d\mu$$

è lineare, per la (M1) e continuo, infatti se $f_n \to f$ in $L^p(\mathscr{F})$ è anche $Tf_n \to Tf$ in $L^p(\mathscr{F})$; per la (M4) e quindi anche $Tf_n \to Tf$ in $L^1(\mathscr{F})$ sicché $J(f_n) \to J(f)$. Per il teorema di rappresentazione dei funzionali lineari e continui in $L^p(\mathscr{F})$([19] teoremi IV.8.1 e IV.8.5) esiste g in $L^q(\mathscr{F})$, ove q è come nell'enunciato, tale che

(1.10) $$J(f) = \int fg\, d\mu \qquad (f\in L^p(\mathscr{F})).$$

La (1.9) e la (1.10) insieme danno

$$\int Tf\, d\mu = \int fg\, d\mu \qquad (f\in L^p(\mathscr{F})) ,$$

sicché se $A\in\mathscr{F}_T$

$$\int_A Tf\, d\mu = \int 1_A Tf\, d\mu = \int T(1_A f)d\mu = \int 1_A fg\, d\mu = \int_A fg\, d\mu = \int_A E(fg/\mathscr{F}_T)d\mu$$

onde, per l'arbitrarietà di A, e poiché Tf è $\mathscr{F}_T$-misurabile, in virtù del lemma (1.6), $Tf=E(fg/\mathscr{F}_T)$. La (1.8) dà per $f=1$, $T1=E(g/\mathscr{F}_T)$

che è limitata in virtù della (M2).//

La rappresentazione (1.8) non è unica. Infatti, se, per esempio, B è un insieme di $\mathscr{F}_T$ tale che $g(\omega) = 0$ per ogni $\omega \in B$, si ponga $\mathscr{F}' := \{B \cup A : A \in \mathscr{F}_T, A \cap B = \emptyset\} \cup \{A \in \mathscr{F}_T : A \cap B = \emptyset\}$; è facile verificare che $\mathscr{F}'$ è una tribù e che $E(fg/\mathscr{F}') = E(fg/\mathscr{F}_T)$.

(1.11) COROLLARIO. Se $T1$ è eguale a una costante $k \neq 0$ riesce $TL^p(\mathscr{F}) = L^p(\mathscr{F}_T)$. Se, inoltre $T1=1$ allora T è la proiezione di $L^p(\mathscr{F})$ su $L^p(\mathscr{F}_T)$ $(p<+\infty)$.

DIM. Se f è in $L^p(\mathscr{F}_T)$ la (1.8) e (1.3.10) danno

$$Tf = E(fg/\mathscr{F}_T) = f\, E(g/\mathscr{F}_T) = f \cdot T1 = kf$$

sicché $T(f/k) = f$. Alla luce del lemma (1.6) ciò implica $TL^p(\mathscr{F}) = L^p(\mathscr{F}_T)$. Supposto, poi, $T1=1$, la (M3) dà $T^2 f = T(Tf) = T(1 \cdot Tf) = (T1)(Tf) = Tf$ sicché T è la proiezione di $L^p(\mathscr{F})$ su $L^p(\mathscr{F}_T)$.//

(1.12) TEOREMA. Per un operatore $T : L^1(\mathscr{F}) \to L^1(\mathscr{F})$ sono equivalenti le affermazioni:

(a) T soddisfa alle proprietà (M1)-(M4) e inoltre $T1=1$ e $\|Tf\|_1 \leq \|f\|_1$;

(b) T ammette la rappresentazione

$$Tf = E(f/\mathscr{F}_T) \qquad (f \in L^1(\mathscr{F})). \tag{1.13}$$

DIM. La funzione d'insieme $\nu : \mathscr{F} \to \mathbf{R}$ definita da $\nu(A) := J(1_A) = \int T1_A d\mu$ è una misura reale su $\mathscr{F}$ poiché J è un funzionale lineare e continuo. Inoltre $\nu(\Omega) = \int T1 d\mu = \int d\mu = 1$ e $|\nu(A)| := |\int T1_A d\mu| \leq$

$\leq \int |T1_A| d\mu = \|T1_A\|_1 \leq \|1_A\|_1 = \mu(A)$, per ogni $A \in \mathscr{F}$. Si supponga per assurdo che esista $A \in \mathscr{F}$ tale che $|\nu(A)| < \mu(A)$. Allora si avrebbe

$$1 = \mu(\Omega) = \mu(A)+\mu(A') > |\nu(A)| + |\nu(A')| \geq \nu(\Omega) = 1$$

che è una contraddizione. Riesce $|\nu(A)| = \mu(A)$ per ogni $A \in \mathscr{F}$; in altre parole, per ogni $A \in \mathscr{F}$, riesce $\nu(A) = \mu(A)$ oppure $\nu(A) = -\mu(A)$. Si supponga, per assurdo, che esista $A \in \mathscr{F}$ tale che $\nu(A) = -\mu(A)$. Allora $\nu(A') = \nu(\Omega) - \nu(A) = 1 + \mu(A) \geq 1$ relazione che è possibile solo se $\mu(A) = 0$. Perciò risulta $\nu(A) = \mu(A)$ per ogni $A \in \mathscr{F}$ cioè $\nu = \mu$. Se $B \in \mathscr{F}_T$ la (1.8) dà

$$\nu(B) = \int T1_B d\mu = \int E(1_B g/\mathscr{F}_T) d\mu = \int 1_B E(g/\mathscr{F}_T) d\mu = \int_B E(g/\mathscr{F}_T)\, d\mu = \int_B g d\mu$$

sicché $g=1$ per l'eguaglianza $\nu = \mu$. Ciò dimostra l'implicazione (a) $\Longrightarrow$ (b). L'implicazione inversa è contenuta nell'elenco delle proprietà delle SC.//

2.2. LA CARATTERIZZAZIONE DI BAHADUR.

In questa sezione $\mathscr{V}$ è un sottospazio chiuso di $L^2(\mathscr{F})$ e T denota la proiezione ortogonale di $L^2(\mathscr{F})$ su $\mathscr{V}$. Si indicheranno inoltre con $\mathscr{F}_1$ la più piccola tribù che renda misurabili tutte le v.a. di $\mathscr{V}$ cioè $\mathscr{F}_1:=\sigma(\cup\{f^{-1}(\mathscr{B}):f\in\mathscr{V}\})$ e con $\mathscr{F}_2$ la famiglia d'insiemi, che non è necessariamente una tribù, definita da $\mathscr{F}_2:=\{A\subset\Omega:1_A\in\mathscr{V}\}$ Ovviamente si ha $\mathscr{F}_2\subset\mathscr{F}_1$.

La caratterizzazione di Bahadur della SC in senso ampio ([3]) si basa sul seguente

(2.1) **TEOREMA.** Se T è la proiezione ortogonale di $L^2(\mathscr{F})$ su $\mathscr{V}$ sono equivalenti le proprietà:

(a) $T1 = 1$ e T è positivo;

(b) $\mathscr{V}$ verifica le condizioni:

(b1) $1\in\mathscr{V}$,

(b2) $fg\in\mathscr{V}$ $\forall f,g\in\mathscr{V}\cap L^\infty(\mathscr{F})$ ($\mathscr{V}$ è stabile rispetto al prodotto di v.a. limitate),

(b3) $\mathscr{V}=\overline{\mathscr{V}\cap L^\infty(\mathscr{F})}$ (le v.a. limitate di $\mathscr{V}$ sono dense in $\mathscr{V}$ rispetto alla topologia di $L^2(\mathscr{F})$);

(c) $\mathscr{F}_1 = \mathscr{F}_2$;

(d) $\mathscr{V} = L^2(\mathscr{F}_1)$.

DIM. (a) $\Longrightarrow$ (b) Poiché $\mathscr{V}=\{f\in L^2(\mathscr{F}):Tf=f\}$ si ha subito $1=T1\in\mathscr{V}$. Le ipotesi (a) equivalgono alle seguenti: (a') $\alpha\leq Tf\leq\beta$ se $\alpha\leq f\leq\beta$ e (a'') $Tf\geq Tg$ se $f\geq g$. Per mostrare la (b2) basta far vedere che se f è una v.a. limitata di $\mathscr{V}$, cioè $f\in\mathscr{V}\cap L^\infty(\mathscr{F})$

allora f^{2*} è in $\mathscr{V}$; infatti, in tal caso, se f e g sono limitate e in $\mathscr{V}$ la (b2) scende immediatamente dall'identità $fg=\{(f+g)^2-$ $-f^2-g^2\}/2$. Sia dunque $f\in\mathscr{V}\cap L^\infty(\mathscr{F})$ e si ponga $z:=Tf^2-f^2$; vogliamo provare che $z=0$. Si applichi ora il teorema della linea di supporto (1.3.19) alla funzione convessa $x\to x^2$. Esistono allora due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ di numeri reali tali che sia $x^2=\sup\{a_nx+b_n:n\in\mathbb{N}\}$. Perciò $X^2\geq a_nX+b_n$ per ogni $n\in\mathbb{N}$ onde, per la (a'), $TX^2\geq a_nTX+b_n=$ $=a_nX+b_n$ per ogni $n\in\mathbb{N}$; vale perciò $TX^2\geq\sup\{a_nX+b_n\}=X^2$ sicché $z\geq 0$. D'altro canto, poiché T è autoaggiunto ([20] th.26.1), riesce per ogni $Y\in L^2(\mathscr{F})$

$$\int Y\,d\mu=\langle Y,1\rangle=\langle Y,T1\rangle=\langle TY,1\rangle=\int TY\,d\mu\ ,$$

ora $Tz=T^2X^2-TX^2=0$ sicché $\int z\,d\mu=0$ cioè $z=0$.

(b3) Sia z in $\mathscr{V}$ e si introducano le v.a. limitate $X_n:=z1_{\{|z|\leq n\}}$ Chiaramente riesce $X_n\to z$ in $L^2(\mathscr{F})$. Posto $z_n:=TX_n(n\in\mathbb{N})$ riesce $|z_n|\leq n$ e $z_n\in\mathscr{V}$. Dalle due relazioni $\|T\|_2\leq 1$ e $Tz=z$ scende $\|z-z_n\|_2+\|Tz-TX_n\|_2\leq\|z-X_n\|_2$ onde la (b3).

(b) $\Longrightarrow$ (c). Procedendo come nella dimostrazione del lemma (1.3), salvo la sostituzione di $L^2(\mathscr{F})$ a $L^p(\mathscr{F})$, si fa, innanzi tutto, vedere che $\mathscr{F}_2$ è una tribù. Poiché già si sa che $\mathscr{F}_2\subset\mathscr{F}_1$, basta stabilire l'inclusione $\mathscr{F}_1\subset\mathscr{F}_2$. Sia $X\in\mathscr{V}$ limitata e tale che $\operatorname{Ran}X\subset[a,b]$ e sia $A=X^{-1}(B)$ ove B è un arbitrario insieme boreliano contenuto in $[a,b]$. Come nel lemma (1.5), con p=2, si ha $A\in\mathscr{F}_2$; ciò assicura, poiché B è arbitrario, che X è $\mathscr{F}_2$-misurabile. Poiché le v.a. limitate di $\mathscr{V}$ sono dense in $\mathscr{V}$ stesso, segue che ogni v.a. di $\mathscr{V}$

è $\mathscr{F}_2$-misurabile onde $\mathscr{F}_1 \subset \mathscr{F}_2$.

(c) $\Longrightarrow$ (d) Si supponga che $\mathscr{F}_2$ sia una tribù; sia $X \in L^1(\mathscr{F}_2)$. Esiste una successione $\{X_n\}$ di v.a. $\mathscr{F}_2$-semplici tali che $X_n \to X$ q.c. e in L^2 (come nel Lemma 1.4)). Segue dalla definizione di $\mathscr{F}_2$ che $X_n \in \mathscr{V}$ per ogni n naturale e quindi anche $X \in \mathscr{V}$ poiché $\mathscr{V}$ è chiuso (in L^2); si ha così $L^2(\mathscr{F}_2) \subset \mathscr{V}$. D'altro canto X è $\mathscr{F}_1$-misurabile sicché $\mathscr{V} \subset L^2(\mathscr{F}_1)$. La doppia inclusione $L^2(\mathscr{F}_2) \subset \mathscr{V} \subset L^2(\mathscr{F}_1)$ dà l'asserto.

(d) $\Longrightarrow$ (c) Se $X \in L^2(\mathscr{F})$ si ha $TX \in \mathscr{V} = L^2(\mathscr{F}_1) \subset L^1(\mathscr{F}_1)$ e inoltre per ogni insieme A di $\mathscr{F}_1$ riesce

(2.2) $$\int_A f d\mu = \int f 1_A d\mu = \langle f, 1_A \rangle = \langle f, T1_A \rangle = \langle Tf, 1_A \rangle = \int_A Tf d\mu$$

cioè $Tf = E(f|\mathscr{F}_1)$; è ora noto che l'operatore $E(./\mathscr{F}_1)$ soddisfa le (a).//

La caratterizzazione delle SC si può dare nella forma del seguente ovvio

(2.3) COROLLARIO. Per un operatore $T: L^2(\mathscr{F}) \to L^2(\mathscr{F})$ sono equivalenti le proprietà:

(a) esiste una tribù $\mathscr{F}_1 \subset \mathscr{F}$ tale che T sia la restrizione a $L^2(\mathscr{F})$ di $E(.|\mathscr{F}_1)$;

(b) T è lineare, idempotente, autoaggiunto, positivo e $T1=1$. Risulta $\mathscr{F}_1 = \{A \subset \Omega : 1_A \in \operatorname{Ran} T\}$.

Si vedrà nella prossima sezione, a proposito della caratterizzazione di Šidak, che effettivamente non è restrittivo caratterizzare le SC su $L^2(\mathscr{F})$ anziché su $L^1(\mathscr{F})$.

Anche per il seguito sarà utile la seguente

(2.4) DEFINIZIONE. Dato lo spazio di Hilbert $L^2(\mathscr{F})$ si chiama misurabile ogni sottospazio chiuso $\mathscr{V}$ di $L^2(\mathscr{F})$ per il quale esiste una tribù $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ tale che sia $\mathscr{V} = L^2(\mathscr{G})$.

Per il seguito è importante notare che la (2.2) per $A=\Omega$ dà $E(Tf)=E(f)$ una proprietà che sarà il fondamento della caratterizzazione di Pfanzagl ([35]) (si veda, oltre, la sezione 2.9).

2.3. LA CARATTERIZZAZIONE DI ŠIDAK

Sidak ([48]) basò la caratterizzazione delle SC sopra l'analisi delle definizioni in senso largo o in senso stretto e sopra l'osservazione che i procedenti lavori di Moy e Bahadur consideravano v.a. limitate (in L^p e in L^2 rispettivamente) per poter eseguire il prodotto di v.a. ((M3) e (b.2) nel teorema (2.1)). Šidak sostituì al prodotto l'operazione reticolare $\vee$(=max); per la prima volta compaiono considerazioni reticolari che diverranno preminenti nel lavoro di Douglas [18] (sezione 2.6).

(3.1) **LEMMA.** Nello spazio di Hilbert $L^2(\mathscr{F})$ esiste una biezione tra le tribù $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ e i sottospazî misurabili $\mathscr{V} = L^2(\mathscr{G})$ di $L^2(\mathscr{F})$.

DIM. Siano $\mathscr{F}_1$ e $\mathscr{F}_2$ tribù distinte contenute in $\mathscr{F}$; esiste allora un sottinsieme $A \in \mathscr{F}$ che appartiene a $\mathscr{F}_1$ ma non a $\mathscr{F}_2$, per esempio. Perciò 1_A è in $L^2(\mathscr{F}_1)$ ma non $L^2(\mathscr{F}_2)$.//

(3.2) **LEMMA.** Se $\{\mathscr{G}_i : i \in I\}$ è una famiglia di tribù contenute in riesce

(a) $\mathscr{G}_1 \subset \mathscr{G}_2 \Longrightarrow L^2(\mathscr{G}_1) \subset L^2(\mathscr{G}_2)$;

(b) $L^2(\bigcap_{i\in I}\mathscr{G}_i) = \bigcap_{i\in I} L^2(\mathscr{G}_i)$;

(c) $L^2\ \{\sigma(\bigcup_{i\in I}\mathscr{G}_i)\} = M\{\bigcup_{i\in I} L^2(\mathscr{G}_i)\}$ essendo quest'ultimo il più piccolo spazio misurabile contenente $\bigcup_{i\in I} L^2(\mathscr{G}_i)$.

DIM. (a) è ovvia. (b) $\mathscr{G} = \bigcap_{i\in I}\mathscr{G}_i$ è una tribù, onde, per (a), riesce $L^2(\mathscr{G}) \subset L^2(\mathscr{G}_i)$ per ogni $i \in I$; perciò $L^2(\mathscr{G}) \subset \bigcap_{i\in I} L^2(\mathscr{G}_i)$. D'altro canto, se f è in $\bigcap_{i\in I} L^2(\mathscr{G}_i)$ allora è $\mathscr{G}_i$-misurabile per ogni $i \in I$ sicché è misurabile rispetto alla tribù $\cap_{i\in I}\mathscr{G}_i$; perciò $\cap_{i\in I}L^2(\mathscr{G}_i) \subset L^2(\cap_{i\in I}\mathscr{G}_i)$.

(c) Posto $\mathscr{V} = L^2\{\sigma(\cup_{i\in I}\mathscr{G}_i)\}$ risulta $L^2(\mathscr{G}_i) \subset \mathscr{V}$ per ogni $i\in I$ onde $M\{\cup_{i\in I}(\mathscr{G}_i)\} \subset \mathscr{V}$. Viceversa allo spazio misurabile $\{\cup_{i\in I}L^2(\mathscr{G}_i)\}$ corrisponde (lemma (3.1)) una tribù $\mathscr{G}$ tale che $M=L^2(\mathscr{G})$. Chiaramente $\mathscr{G}_i \subset \mathscr{G}$ per ogni $i\in I$ onde $\sigma(\cup_{i\in I}\mathscr{G}_i) \subset \mathscr{G}$ sicché, per (a), riesce $\mathscr{V} \subset L^2(\mathscr{G})=M$. //

(3.3) **TEOREMA.** Il sottoinsieme $\mathscr{V}\subset L^2(\mathscr{F})$ è un sottospazio misurabile se, e solo se, verifica le condizioni

(a) $\mathscr{V}$ è un sottospazio chiuso di $L^2(\mathscr{F})$;

(b) $1 \in \mathscr{V}$,

(c) $f\vee g:=\max\{f,g\}$ è in $\mathscr{V}$ per ogni coppia di v.a. f e g di $\mathscr{V}$.

DIM. Poiché le tre condizioni sono chiaramente necessarie, basta mostrare che sono sufficienti. Suppostele soddisfatte, si definisce $\mathscr{G}:=\{A\subset\Omega : 1_A\in\mathscr{V}\}$. Si procede come nella dimostrazione del lemma (1.3) per far vedere che $\mathscr{G}$ è una tribù, con una sola differenza nel provare che $\mathscr{G}$ è stabile per unioni finite. Ma se A e B sono in $\mathscr{G}$, 1_A e 1_B sono in $\mathscr{V}$ onde $1_{A\cup B}=1_A\vee 1_B$ è pure in $\mathscr{V}$ in virtù di (c), sicché $A\cup B$ è in $\mathscr{G}$. Per concludere la dimostrazione basta far vedere che $\mathscr{V}= L^2(\mathscr{G})$. Ora è immediato che $L^2(\mathscr{G}) \subset \mathscr{V}$; infatti appartengono a $\mathscr{V}$ tutte le v.a. $\mathscr{G}$-semplici e quindi, poiché $\mathscr{V}$ è chiuso, tutte le v.a. di $L^2(\mathscr{G})$. Si consideri dunque f in $\mathscr{V}$ e si ponga $A(f) = \{f \geq 0\}$. Poiché $f^+:=f\vee 0=f1_{A(f)}$ è $f^+\in\mathscr{V}$. Definita la successione $\{f_n\}$ ove $f_n:=n(f^+\wedge 1,n)=$

$= -n(-f^+ \vee -1/n)$ è in $\mathscr{V}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e posto $A_n := \{f \geq 1/n\}$, riesce $A_n \subset A_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$, $A(f) = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, $g_n = 1_{A_n} + nf^+ 1_{A'_n}$ sicché $0 \leq g_n \leq 1$. Allora si ha $g_n \to 1_{A(f)}$ sia q.c. sia in $L^2(\mathscr{F})$ onde $1_{A(f)} \in \mathscr{V}$ e $A(f) \in \mathscr{G}$. Se c è un numero reale arbitrario, $f_c := f - c$ è in $\mathscr{V}$ e come sopra si vede che è in $\mathscr{G}$ l'insieme $\{f \geq c\}$; f è dunque $\mathscr{G}$-misurabile, cioè $f \in L^2(\mathscr{G})$, vale a dire $\mathscr{V} \subset L^2(\mathscr{G})$.//

Nel linguaggio della teoria dei reticoli il teorema (3.3) si può enunciare nella forma

(3.4) TEOREMA. Per un sottoinsieme $\mathscr{V} \in L^2(\mathscr{F})$ sono equivalenti le proprietà

(a) $\mathscr{V}$ è un sottospazio misurabile;

(b) $\mathscr{V}$ è un reticolo di Banach al quale appartiene 1.

Nel definire i rapporti tra SC in senso largo e in senso stretto è essenziale il seguente

(3.5) LEMMA. Se $S,T: L^p \to L^p$ (con $p \in [1,+\infty[$) sono operatori continui che coincidono su L^∞ (cioè $S(f) = T(f)$ per ogni $f \in L^\infty$) allora S e T coincidono in L^p (cioè S(f) per ogni $f \in L^p$).

DIM. Sia f in L^p; posto $f_n := (|f| A_n)$ (s ogni f) $n \in \mathbb{N}$) riesce $f_n \in L^\infty$; sicché $s(f_n) = T(f_n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. D'altro canto $f_n \to f$ in L^p cosicché la continuità dà $S(f) = T(f)$.//

(3.6) TEOREMA. Sia $\mathscr{V} = L^2(\mathscr{G})$ un sottospazio misurabile di $L^2(\mathscr{F})$ e sia P la proiezione di $L^2(\mathscr{F})$ su $\mathscr{V}$. L'operatore di SC, $E(.|\mathscr{G})$: $: L^1(\mathscr{F}) \to L^1(\mathscr{G})$ è l'unica estensione continua di P a $L^1(\mathscr{F})$.

DIM. $E(.|\mathscr{G})$ è continua in $L^1(\mathscr{F})$ (teorema(1.3.1)(f)) ed estende P a tutto $L^1(\mathscr{F})$ poiché $Pf=E(f/\mathscr{G})$ per ogni $f\in L^2(\mathscr{F})$; in virtù del lemma (3.5) essa è l'unica estensione continua.//

Si può ora enunciare la caratterizzazione di Šidak.

(3.7) **TEOREMA.** Per una trasformazione $T:L^2(\mathscr{F}) \to L^2(\mathscr{F})$ sono equivalenti le proprietà:

(a) T è la restrizione a $L^2(\mathscr{F})$ di un operatore di SC $E(./\mathscr{G})$;

(b) T verifica:

(b1) T è lineare, autoaggiunto, idempotente,

(b2) $T1 = 1$

(b3) $T(Tf \vee Tg) = Tf \vee Tg \qquad (\forall f,g \in L^2(\mathscr{F}))$.

DIM. Basta dimostrare l'implicazione (b) $\Longrightarrow$ (a). Per la (b1) T è la proiezione di $L^2(\mathscr{F})$ sopra un sottospazio chiuso $\mathscr{V}$ ([20] th.26.4) mentre la (b2) e la (b3) asseriscono, in virtù del teorema (3.3), che $\mathscr{V}$ è un sottospazio misurabile cioè che esiste una tribù $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ tale che sia $\mathscr{V} = L^2(\mathscr{G})$. La tesi scende dal teorema (3.6).//

2.4. GLI OPERATORI MEDIANTI.

Rota caratterizzò le SC ricorrendo al concetto di operatore mediante ("averaging operator")([45]).

(4.1) DEFINIZIONE. Un operatore $P:L^p(\mathscr{F})\to L^p(\mathscr{F})$ con $p\in[1,+\infty]$ si dice essere <u>mediante</u> se

(a) è una contrazione : $\|Pf\|_p \leq \|f\|_p$ per ogni $f\in L^2(\mathscr{F})$;

(b) $P(g\ Pf) = (Pg)(Pf)$ $(f\in L^p(\mathscr{F}),\ g\in L^\infty(\mathscr{F}))$;

(c) $P1 = 1$.

Un operatore di SC soddisfa ai requisiti della definizione appena data. Si vedrà nel seguito che è vero anche che ogni operatore mediante è una SC se $p\in[1,+\infty[$ (teorema (4.8)).

(4.2) LEMMA. Sia $g\in L^\infty(\mathscr{F})$ e sia $\mathscr{A}:=\{\varphi\circ g: \varphi$ è un polinomio$\}$. La chiusura di $\mathscr{A}$ in $L^p(\mathscr{F})$ è $L^p(\sigma(g))$ ove $\sigma(g) = g^{-1}(\mathscr{B})$ $(p\in[1,+\infty])$.

DIM. Sia μ_g la legge della v.a. g, cioè la misura di probabilità su $(\mathbb{R},\mathscr{B})$ definita da $\mu_g(B):=\mu[g^{-1}(B)]$ per ogni borelliano B. Poiché g è (essenzialmente) limitata esiste un intervallo $[\alpha,\beta]$ tale che $\mu_g([\alpha,\beta]) = 1$. Per ogni funzione borelliana $h:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ il teorema del cambio di variabile dà

$$\int h\circ g\, d\mu = \int_\alpha^\beta h\, d\mu_g\ ;$$

in particolare se $C\in\mathscr{B}$ e $B = f^{-1}(C)$ riesce

$$\int 1_B d\mu = \int 1_{f^{-1}(c)}\, d\mu = \int 1_c\circ g\, d\mu = \int_\alpha^\beta 1_c d\mu_g .$$

Poiché 1_c è il limite puntuale su $[\alpha,\beta]$ di una successione di polinomî, il teo· ›a di convergenza dominata assicura che 1_c è il limite di polinomî anche in $L^p([\alpha,\beta], \mathscr{B}([\alpha,\beta]), \mu_g)$. Perciò 1_B è il limite in $L^p(\sigma(g))$ di una successione di polinomî e quindi appartiene alla chiusura di $\mathscr{A}$. L'asserto segue dal fatto che le funzioni semplici sono dense in $L^p(\mathscr{F})$.//

Questo lemma aveva dimostrazione simile a quella del lemma (1.5).

(4.3) LEMMA. Ogni operatore mediante è una proiezione.

DIM. $P^2f = P(Pf) = P(1Pf) = (P1)(Pf) = Pf$ per ogni $f \in L^p(\mathscr{F})$.//

(4.4) LEMMA. Sia $g \in L^\infty(\mathscr{F})$ tale che $Pg=g$ (una tale v.a. esiste in virtù di (4.1.c); si ha allora $Pf=f$ per ogni $f \in L^p(\sigma(g))$.

DIM. $Pg^2 = P(g.g) = P(g\ Pg) = Pg)^2=g^2$ e per induzione $Pg^n=g^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (infatti $Pg^{n+1}=P(g.g^n)=P(g^nPg)=(Pg^n)(Pg)=g^ng=g^{n+1}$). Perciò, in virtù della linearità di P, è $P(\varphi\circ g)=\varphi\circ g$ per ogni polinomio φ.L'asserto scende ora dal lemma (4.2) e dalla continuità di P che è conseguenza di (4.1.a).//

(4.5) LEMMA. Se P è un operatore mediante su $L^p(\mathscr{F})$ riesce $PL^\infty(\mathscr{F}) \subset L^\infty(\mathscr{F})$.

DIM. Vi è qualcosa da dimostrare solo nel caso $p < +\infty$, perché per $p=\infty$ l'asserto è contenuto nella stessa definizione di operatore mediante. Sia f in $L^\infty(\mathscr{F})$ e si ponga $g:=Pf$; per definizione, g è in $L^p(\mathscr{F})$. Per la (4.1.a) riesce $g^2=g.g=(Pf)(Pf)=P(fPf)=P(fg)$ sicché $g^2 \in L^p(\mathscr{F})$; ragionando per induzione, si ottiene $g^n \in L^p(\mathscr{F})$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ (infatti, supposta verificata la relazione $g^n=P(fg^{n-1})$, si ha $g^{n+1}=g\circ g^n=(Pf)P(fg^{n-1})=P\{fP(fg^{n-1})\}=P(fg^n) \in L^p(\mathscr{F})$). La (4.1.a) e la diseguaglianza di Hölder danno

$$\int |g|^{np}\, d\mu = \|g^n\|_p^p = \|P(fg^{n-1})\|_p^p \leq \|fg^{n-1}\|_p^p = \int |f|^p |g|^{(n-1)p} d\mu \leq$$

$$\leq \left(\int |f|^{np} d\mu\right)^{1/n} \left(\int |g|^{np} d\mu\right)^{1-1/n}$$

onde

$$\|g\|_{np}^p = \left(\int |g|^{np} d\mu\right)^{1/n} \leq \left(\int |f|^{np} d\mu\right)^{1/n} \leq \|f\|_\infty^p .$$

Facendo tendere n a $+\infty$ in quest'ultima diseguaglianza si ottiene

$$\|g\|_\infty \leq \|f\|_\infty \quad \text{sicché } g \in L^\infty(\mathscr{F}). \ //$$

(4.6) LEMMA. Se $P^* : L^p(\mathscr{F}) \to L^p(\mathscr{F})$ è l'operatore aggiunto di P (ove $(1/p)+(1/q) = 1$ se $p > 1$, mentre $q=+\infty$ se $p=1$) risulta $P^*1=1$.

DIM. Posto $h:=P^*1$, scende dalla (4.1.c) che

$$\int h\, d\mu = \int h\, 1\, d\mu = \int (P^*1) 1\, d\mu = \int P1\, d\mu = \int d\mu = 1.$$

Valgono inoltre le relazioni

$$\|h\|_q = \sup \{\int h\, f\, d\mu : f \in L^p(\mathscr{F}),\ \|f\|_p \leq 1\} =$$

$$= \sup\{ \int Pf d\mu : f \in L^p(\mathscr{F}),\ \|f\|_p \leq 1\} =$$

$$= \sup \{ \|Pf\|_1 : f \in L^p(\mathscr{F}),\ \|f\|_p \leq 1\} = 1.$$

Di qui, si ricava, ricorrendo nuovamente alla diseguaglianza di Hölder

$$1 = \int h\, d\mu \leq \|h\|_q\, \|1\|_p = 1;$$

siccome nella diseguaglianza di Holder vale il segno d'eguaglianza si ha $h=1$.//

Nel prossimo lemma si incontra una proprietà che sarà alla base dela caratterizzazione di Pfanzagl (sezione 2.9).

(4.7) LEMMA. Ogni operatore mediante conserva la speranza matematica:

$$E(Pf) = E(f) \qquad (f \in L^p(\mathscr{F})).$$

DIM. In virtù del lemma (4.6)

$$E(Pf) = \int Pf d\mu = \int f(P^*1) d\mu = \int f d\mu = E(f). //$$

Si può ora dare la caratterizzazione di Rota.

(4.8) TEOREMA. Per un operatore $P: L^p(\mathscr{F}) \to L^p(\mathscr{F})$ con $p \in [1, +\infty[$ sono equivalenti le proprietà:

(a) P è un operatore mediante;

(b) esiste una tribù $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ tale che sia $P=E(\cdot/\mathscr{G})$ in $L^p(\mathscr{F})$.

DIM. Poiché l'implicazione (b) $\Rightarrow$ (a) è ovvia, basterà dimostrare l'altra (a) $\Longrightarrow$ (b). A tal fine sia $\mathscr{G}$ la più piccola tribù che contenga tutte le tribù $\sigma(g)$ indotte dalle v.a. g di $L^\infty(\mathscr{F})$ tali che $Pg=g$, cioè $\mathscr{G} := (\cup \{\sigma(g) : g \in L^\infty(\mathscr{F}),\ Pg=g\})$. Il lemma (4.4) dà, se B è in $\mathscr{G}$, $P1_B = 1_B$; in virtù del lemma (4.7) riesce se f è in $L^\infty(\mathscr{F})$

$$\int_B Pf d\mu = \int 1_B Pf d\mu = \int (P\, 1_B)(Pf) d\mu = \int P(f\, P1_B) d\mu =$$

$$= \int P(f1_B) d\mu = \int f\, 1_B d\mu = \int_B f d\mu$$

onde $Pf = E(f/\mathscr{G})$ per ogni $f \in L^\infty(\mathscr{F})$. L'asserto segue ora da (3.5).//

Le considerazioni che precedono non sono necessariamente vere se $p=+\infty$. Rimando alla sezione 4 dell'articolo [45] di Rota per lo studio degli operatori medianti in $L^{\infty}(\mathscr{F})$.

2.5. PROIEZIONI NEGLI SPAZÎ DI ORLICZ

I risultati delle sezioni precedenti furono estesi nel 1965 da M.M.Rao ([38]) dagli spazî $L^p(\mathscr{F})$ agli spazi di Orlicz $L^\varphi(\mathscr{F})$. Per le definizioni riguardanti gli spazî di Orlicz si veda [25].

La definizione che segue estende in modo ovvio la definizione (2.4).

(5.1) DEFINIZIONE. Un sottospazio chiuso $\mathscr{V}$ di $L^\varphi(\mathscr{F})$ è detto misurabile se esiste una tribù $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ tale che $\mathscr{V} = L^\varphi(\mathscr{G})$. In tal caso si dirà misurabile anche la proiezione $P : L^\varphi(\mathscr{F}) \to L^\varphi(\mathscr{G})$.

Il lemma che segue ha la stessa dimostrazione dei lemmi (3.1) e (3.2) nei quali non si faceva alcun uso particolare delle proprietà di L^2.

(5.2) LEMMA. (a) Esiste una biiezione tra le sottotribù $\mathscr{G}$ di $\mathscr{F}$ e i sottospazi misurabili $L^\varphi(\mathscr{G})$ di $L^\varphi(\mathscr{F})$:

(b) se $\{\mathscr{G}_i : i \in I\}$ è una famiglia di sottotribù di $\mathscr{F}$ risulta

$$L^\varphi(\cap_{i\in I}\mathscr{G}_i) = \cap_{i\in I} L^\varphi(\mathscr{G}_i);$$

(c) $L^\varphi\{\sigma(\cup_{i\in I}\mathscr{G}_i)\} = M\{\cup_{i\in I} L^\varphi(\mathscr{G}_i)\}$.

Si indichino con $M^\varphi(\mathscr{F})$ e $M^\varphi(\mathscr{G})$ i sottospazî chiusi di $L^\varphi(\mathscr{F})$ e di $L^\varphi(\mathscr{G})$, rispettivamente, generati dalle v.a. semplici (rispetto a $\mathscr{F}$ o a $\mathscr{G}$). Una funzione di Young φ si dice <u>moderata</u> se riesce $\varphi(2x) \leq k\varphi(x)$ per ogni $x \geq x_0$ ove x_0 è un numero reale strettamente positivo.

(5.3) LEMMA. Sia φ una funzione di Young moderata. Per un insieme $\mathscr{V} \subset L^\varphi(\mathscr{F})$ sono allora equivalenti le proposizione:

(a) $\mathscr{V}$ è un sottospazio misurabile,

(b) $\mathscr{V}$ soddisfa alle condizioni:

(b1) $\mathscr{V}$ è un sottospazio chiuso;

(b2) $1 \in \mathscr{V}$;

(b3) $\mathscr{V}$ è stabile rispetto al max: $f,g \in \mathscr{V} \Longrightarrow f \vee g \in \mathscr{V}$.

DIM. Poiché l'implicazione (a) $\Rightarrow$ (b) è ovvia, basta stabilirne l'inversa. A tal fine si ricava [37] che le funzioni semplici sono dense in $L^{\varphi}(\mathscr{F})$, cioè $M^{\varphi}(\mathscr{F}) = L^{\varphi}(\mathscr{F})$; inoltre lo spazio di Orlicz $L^{\varphi}(\mathscr{F})$ coincide con la classe di Orlicz $C^{\varphi}(\mathscr{F})$ si veda [25] sicché $L^{\varphi}(\mathscr{F}) = \{f \in L^{\circ}(\mathscr{F}) : \int \varphi(kf)d\mu \;\; +\infty \;\; \forall k>0\}$. Da questo punto in poi la dimostrazione riproduce quella del teorema (3.3). //

Ricordo che una funzione di Young φ o è continua in $\mathbb{R}$ oppure è continua per $|x| < x_0$ ed identicamente eguale a $+\infty$ per $|x| \geq x_0$, ove x_0 è un opportuno numero reale strettamente positivo.

(5.4) TEOREMA. Sia φ una funzione di Young continua e moderata e sia $\mathscr{V} = L^{\varphi}(\mathscr{G})$ un sottospazio misurabile di $L^{\varphi}(\mathscr{F})$. Se la proiezione $P: L^{\varphi}(\mathscr{F}) \to L^{\varphi}(\mathscr{G})$ soddisfa ad una delle seguenti condizioni

(5.5) P è una contrazione e la funzione di Young complementare ψ è continua;

(5.6) $p{*}f = f$ per ogni v.a. f di $L^{\infty}(\mathscr{G})$,

allora essa ammette la rappresentazione

$$pf = E(f/\mathscr{G}) \qquad (f \in L^{\varphi}(\mathscr{F})), \tag{5.7}$$

e può essere estesa in maniera unica a $E(./\mathscr{G})$ in $L^{1}(\mathscr{F})$.

Viceversa, la restrizione di $E^{\mathscr{G}}$ a $L^{\varphi}(\mathscr{F})$ è una proiezione misurabile su $L^{\varphi}(\mathscr{F})$ che soddisfa sia alla (5.5) sia alla (5.6).

DIM. Dimostrerò dapprima che (5.5) implica (5.6) e quindi che la (5.7) è una conseguenza della (5.6).

SI supponga dunque valida la (5.5); poiché φ è moderata il duale $(L^{\varphi}(\mathcal{F}))^*$ può essere identificato con $L^{\psi}(\mathcal{F})$ ([53], teorema 7.4.2). Inoltre l'aggiunto P^* di P esiste ed è una proiezione su $L^{\psi}(\mathcal{F})$ che verifica $\|P^*\|=\|P\|$ sicché anche P^*, come P, è una contrazione. Si può ora mostrare la (5.6). E' ovvio che vale l'inclusione $L^{\infty}(\mathcal{F}) \subset L^{\varphi}(\mathcal{F}) \cap L^{\psi}(\mathcal{F})$. Sia ora $f \in L^{\infty}(\mathcal{F})$ e si ponga $g:=P^*f$. Allora, indicata con N_{ψ} la norma di Luxemburg nello spazio $L^{\psi}(\mathcal{F})$ ([25]), vale la relazione

(5.8) $N_{\psi}(g) = N_{\psi}(P^*f) \leq \|P^*\| \, N_{\psi}(f) \leq N_{\psi}(f)$.

Se A è in $\mathcal{G}$, la sua funzione indicatrice 1_A appartiene a $\mathcal{V} = L^{\varphi}(\mathcal{G})$ e vale

(5.9) $\int_A f d\mu = \int 1_A f d\mu = \int (P1_A) f d\mu = \int 1_A (P^*f) d\mu = \int_A g d\mu = \int_A E(g/\mathcal{G}) d\mu$.

Poiché gli spazi di Orlicz $L^{\varphi}(\mathcal{F})$ e $L^{\psi}(\mathcal{F})$ sono strettamente contenuti in $L^1(\mathcal{F})$, l'operatore SC $E^{\mathcal{G}}$ è definito in essi. In virtù dell'arbitrarietà di $A \in \mathcal{G}$ la (5.9) dà

(5.10) $\qquad f = E(g/\mathcal{G})$;

di qui, ricordando che $E^{\mathcal{G}}$ è una contrazione, scende $N_{\psi}(f) \leq N_{\psi}(g)$. Quest'ultima diseguaglianza, insieme alla (5.8) dà $N_{\psi}(f) = N_{\psi}(g)$.

Sia k_o il loro valore comune; segue allora dalla definzione di norma di Luxemburg che

(5.11) $\qquad \int \psi(f/k_o) d\mu \leq 1 \quad$ e $\quad \int \psi(g/k_o) d\mu \leq 1$.

La prima delle (5.11) è, in effetti, un'uguaglianza poiché f è limitata. Ricorrendo alla diseguaglianza di Jensen (1.3.21) rispetto alla funzione convessa ψ e usando la (5.10) si ottiene

$$(5.12) \qquad \psi(f/k_o) = \varphi[(E^{\mathcal{G}}g)/k_o] \leq E^{\mathcal{G}}[\psi(g/k_o)].$$

In quest'ultima relazione vale il segno d'eguaglianza se, e solo se, si verifica uno dei due casi seguenti: o ψ è lineare o g è $\mathcal{G}$-misurabile. Ora ψ non può essere lineare perché ogni funzione di Young verifica la relazione $\lim_{x\to+\infty} \psi(x)/x = +\infty$ ([25](1.16)). Supposto che g non sia $\mathcal{G}$-misurabile esiste un insieme di $\mathcal{G}$ di misura strettamente positiva nei punti del quale vale la diseguaglianza stessa nella (5.12); perciò

$$1= \int\psi(f/k_o)d\mu = \int\psi[E^{\mathcal{G}}(g/k_o)]d\mu < \int E^{\mathcal{G}}[\psi(g/k_o)]d\mu = \int\psi(g/k_o)d\mu \leq 1$$

che è una contraddizione. Perciò g è $\mathcal{G}$-misurabile; scende così dalla (5.10) che $f=E(g/\mathcal{G}) = g = P^*f$ ciò che stabilisce la (5.6).

Si supponga ora verificata la (5.6). Quale che sia $A\in\mathcal{G}$ riesce, poiché 1_A è in $L^\infty(\mathcal{G})$,

$$\int_A Pf\, d\mu = \int 1_A\, Pf\, d\mu = \int (P^*1_A)f\, d\mu = \int 1_A\, f\, d\mu = \int_A f d\mu = \int_A E(f/\mathcal{G})d\mu$$

onde la (5.7) grazie all'unicità della SC.

Il viceversa è ovvio. (Si veda anche [32], IX.2.3).//

Dal teorema (5.4) scende, come corollario, la caratterizzazione di Rota (4.8).

(5.13) COROLLARIO. Per un operatore $P:L^p(\mathcal{F}) \to L^p(\mathcal{F})$ con $p\in[1,+\infty[$ sono equivalenti le affermazioni:

(a) P è un operatore mediante;

(b) esiste una tribù $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ tale che $P = E^{\mathcal{G}}$ in $L^p(\mathcal{F})$.

DIM. Come nel teorema (4.8) basta stabilire l'implicazione (a) $\Longrightarrow$ (b). Si osservi che basta prendere $g=1$ nella (4.1)(b) per avere, grazie alla (4.1)(c), $P^2 = P$. Scende, inoltre, dalla (5.3) che $\mathcal{V} := \mathrm{Ran}\, P$ è un sottospazio misurabile; vi è perciò una tribù $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ tale che $\mathcal{V} = L^p(\mathcal{F})$.

Se $p > 1$, la funzione di Young complementare di φ, ove $\varphi(x) = |x|^p/p$, è data da $x \to \varphi(x) = |x|^q/q$ ove $p^{-1}+q^{-1}=1$. E' perciò verificata l'ipotesi (5.5) sicché $P = E^{\mathcal{G}}$.

Se, invece, $p=1$, è verificata l'ipotesi (5.6). Infatti, se $A \in \mathcal{G}$ si ponga $g_A := P^*1_A$; ma allora $\|g_A\|_\infty = \|P^*1_A\|_\infty \leq \|1_A\|_\infty = 1$ perché $\|P^*\| = \|P\| \leq 1$ e di conseguenza

$$\int_A g_A d\mu = \int g_A d\mu = \int 1 g_A d\mu = \int 1 (P^*1_A) d\mu = \int (P1) 1_A d\mu = \int 1_A d\mu$$

Si ha così $g_A = 1_A$ cioé $P^*1_A = 1_A$ relazione che dà immediatamente la (5.6). Pertanto anche in questo caso è $P = E^{\mathcal{G}}$. //

2.6 LE SC COME PROIEZIONI IN L^1.

La caratterizzazione di Douglas ([18]) è la conseguenza di un teorema che dà la decomposizione delle proiezioni contrattive in L^1. Come al solito do solo i risultati necessarî ai fini della caratterizzazione delle SC. Inoltre mentre l'articolo di Douglas considera spazî complessi, mi limiterò qui, per semplicità, al caso reale.

(6.1) DEFINIZIONE. Se $\mathcal{G}$ è una tribù contenuta in $\mathcal{F}$ si dirà <u>funzione peso per</u> $\mathcal{G}$ ogni v.a. $h: \Omega \to \mathbb{R}_+$ che sia $\mathcal{F}$-misurabile e tale che

(a) $E(h/\mathcal{G}) = 1_{S(h)}$ con $S(h) \in \mathcal{G}$ ove $S(h):=\{h\neq 0\}$ è il supporto di h;

(b) Se $A\in\mathcal{F}$ e $S(h) \subset A$ allora $A\in\mathcal{G}$.

Si dice <u>SC pesata</u> l'operatore $E_h^{\mathcal{G}} : L^1(\mathcal{F}) \to L^1(\mathcal{G})$ definito da $E_h^{\mathcal{G}}:=h\, E^{\mathcal{G}}$.

Siano, per esempio, $\Omega = [0,1]\times[0,1]$, $\mathcal{F}= \mathcal{B}(\Omega)$, μ la misura di Lebesgue su $\mathcal{B}(\Omega)$ e infine $\mathcal{G} = \{A\times[0,1]:A\in\mathcal{B}([0,1])\}$. E' immediato verificare che la funzione $h:[0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}_+$ definita da $h(x,y)=2y$ è una funzione peso per $\mathcal{G}$; si osservi che, in questo esempio, h non è $\mathcal{G}$-misurabile e $S(h) = [0,1]\times[0,1]$.

Per un operatore $P : L^1(\mathcal{F}) \to L^1(\mathcal{F})$ si ponga

$$K(P): = \{ f\in L^1(\mathcal{F}) : fg = 0 \quad \forall g \in \mathrm{Ran}\ P \} ;$$

sarà utile considerare gli operatori $P : L^1(\mathcal{F}) \to L^1(\mathcal{F})$ che soddisfacciano alla seguente condizione

$$(6.2) \qquad P[K(P)] = \{0\}.$$

(6.3) LEMMA. Se h è una funzione peso per $\mathcal{G}$, risulta per ogni $f \in L^1(\mathcal{G})$ e per ogni $A \in \mathcal{G}$

$$(6.4) \qquad \int_A hf\,d\mu = \int_A 1_{S(h)}\, f\, d\mu\,.$$

DIM. Sia $B \in \mathcal{G}$, scende dalla (6.1.a) che

$$\int_A h\, 1_B\, d\mu = \int_{A\cap B} h\, d\mu = \int_{A\cap B} E(h/\mathcal{G})\, d\mu = \int_{A\cap B} 1_{S(h)}\, d\mu = \int_A 1_{S(h)}\, 1_B\, d\mu$$

sicché la (6.4) vale per le funzioni indicatrici e, per linearità, per le funzioni $\mathcal{G}$-semplici. Se $f \in L^1(\mathcal{G})$ è positiva esiste una successione $\{f_n\}$ di funzioni $\mathcal{G}$-semplici tali che $f_n \uparrow f$. Ora la successione $\{h\, f_n\}$ è crescente, contenuta in $L^1(\mathcal{F})$ e $hf_n \uparrow hf$; inoltre per ogni $n \in \mathbb{N}$ è

$$\int h\, f_n\, d\mu \leq \int f_n\, d\mu \leq \int f\, d\mu$$

onde $hf \in L^1(\mathcal{F})$ e per ogni $A \in \mathcal{G}$

$$\int_A hf\,d\mu = \lim_n \int_A hf_n\, d\mu = \lim_n \int_A 1_{S(h)} f_n\, d\mu = \int_A 1_{S(h)}\, f\, d\mu\,. //$$

(6.5) LEMMA. Se $\mathcal{G}$ e h sono rispettivamente una tribù contenuta in $\mathcal{F}$ e una funzione peso per $\mathcal{G}$, l'operatore $E_h^{\mathcal{G}}$ è una proiezione contrattiva e positiva che verifica la condizione (6.2).

DIM. La (6.4) dà, se $f \in L^1(\mathcal{F})$

$$\|E_h^{\mathcal{G}} f\|_1 = \int h|E^{\mathcal{G}} f|\,d\mu = \int 1_{S(h)} |E^{\mathcal{G}} f|\,d\mu \leq \int |E^{\mathcal{G}} f|\,d\mu = \|E^{\mathcal{G}} f\|_1 \leq \|f\|_1$$

ove nell'ultimo passaggio si è fatto uso del teorema (1.3.24) con p=1.

$E_h^{\mathscr{G}}$ è perciò una contrazione che è positiva grazie alla (6.1) e al teorema (1.3.1)(c). Per dimostrare che $E_h^{\mathscr{G}}$ è una proiezione si usi la (6.1.a)

$$(E_h^{\mathscr{G}})^2 f = hE^{\mathscr{G}}(hE^{\mathscr{G}}f) = h(E^{\mathscr{G}}h)(E^{\mathscr{G}}f) = h\,1_{S(h)}E^{\mathscr{G}}f = hE^{\mathscr{G}}f = E_h^{\mathscr{G}}\,f.$$

Occorre infine mostrare che $E_h^{\mathscr{G}}$ soddisfa alla (6.2). Se $f \in k(E_h^{\mathscr{G}})$ si ha necessariamente, $fh = fE_h^{\mathscr{G}}\,1 = 0$ onde $S(f) \cap S(h) = \emptyset$. D'altra parte, poiché $S(E^{\mathscr{G}}f) \subset S(f)$ si ha $S(h)\ S(E^{\mathscr{G}}f) = \emptyset$ e quindi $E_h^{\mathscr{G}} = hE^{\mathscr{G}}f = 0$ sicché $E_h^{\mathscr{G}}\ k(E_h^{\mathscr{G}}) = \{0\}$. //

(6.6) LEMMA. Sia P una proiezione contrattiva su $L^1(\mathscr{F})$. Esiste allora un un unico insieme A_o di $\mathscr{F}$ (detto <u>supporto</u> di P) tale che sia $\mu[S(f)-A_o]=0$ per ogni $f \in \text{Ran } P$ e che $K(P)=1_{A'} \cdot L^1(\mathscr{F})$. L'operatore $T:L^1(\mathscr{F}) \to L^1(\mathscr{F})$ definito da $Tf:=P(1_{A'_o}f)$ gode delle seguenti proprietà:

(a) T è una contrazione;

(b) Ran T $\subset$ Ran P;

(c) $T^2=0$;

(d) $T[1_{A_o} \cdot L^1(\mathscr{F})] = \{0\}$;

(e) P-T è una proiezione contrattiva che soddisfa alla (6.2) e tale che Ran(P-T) = Ran P.

L'unicità dell'insieme A_o deve essere intesa, al solito, a meno di insiemi trascurabili.

DIM. Si costruisca una successione $\{f_n : n \in \mathbb{Z}_+\} \subset$ Ran P per induzione. Si ponga $f_o=0$ e, supposto di aver scelto $f_o, f_1, \dots, f_{n-1}$ in Ran P si scelga f_n come segue: si prenda $f_n \in$ Ran P in maniera che sia

$\mu[S(f_n)-\bigcup_{i=o}^{n-1}S(f_i)]>1/n$ se ciò è possibile, altrimenti si ponga $f_n=0$. L'insieme $A_o:=\bigcup_{n\in\mathbf{Z}_+}S(f_n)$ è in $\mathscr{F}$. Presa, arbitrariamente, una v.a. $f\in$ Ran P, si supponga, per assurdo, che sia $\mu[S(f)-A_o]>0$; esiste allora $r\in\mathbb{N}$ tale che $\mu[S(f)-A_o]>1/r$. Si osservi che non esiste alcun indice $n\in\mathbb{N}$ tale che sia $f_n=f$ perché, se così fosse, ne seguirebbe $S(f)\subset A_o$ contrariamente alla supposizione fatta. Si può perciò scegliere $f_n\neq 0$ per ogni $n\geq r$ sicché

$$\mu(A_o)=[\bigcup_{n=0}^{\infty}S(f_n)]\geq\mu[\bigcup_{n>r}S(f_n)]=\mu[\bigcup_{n\geq r}\{S(f_n)-\bigcup_{i=o}^{n-1}S(f_i)\}]=$$

$$=\sum_{n\geq r}\mu[S(f_n)-\bigcup_{i=o}^{n-1}S(f_i)]\geq\sum_{n\geq r}1/n=+\infty$$

che è una contraddizione. Risulta perciò $\mu[S(f)-A_o]=0$ cioè $S(f)\subset A_o$ a meno di insiemi trascurabili.

E' ora facile verificare le proprietà dell'operatore T.

(a) $\|Tf\|_1\leq\|P(1_{A_o'}f\|_1\leq\|1_{A_o'}f\|_1\leq\|f\|_1$. (b) è ovvia.

(c) $T^2f=T(Tf)=\{P\ 1_{A_o'}\ P(1_{A_o'}f)\}=0$ poiché $P(A_{A_o'}f)$ è,ovviamente, in Ran P.

(d) $T(1_{A_o}f)=P(1_{A_o'},1_{A_o}f)=0\qquad(f\in L^1(\mathscr{F}))$.

(e) Si osservi, innanzi tutto, che $(P-T)f=Pf-P(1_{A_o'}f)=P(1_{A_o}f)$. Perciò $(P-T)^2f=(P-T)\{P(1_{A_o}f)\}=P\{1_{A_o}P(1_{A_o}f)\}=P^2(1_{A_o}f)=P(1_{A_o}f)=$ $=(P-T)f$ sicché P-T è una proiezione; essa è inoltre una contrazione perché $\|(P-T)f\|_1=\|P(1_{A_o}f)\|_1\leq\|1_{A_o}f\|_1\leq\|f\|_1$. Sia ora $f\in$Ran P; esiste allora $g\in L^1(\mathscr{F})$ tale che $f=Pg=Pg-T^2g$ (in virtù della (c)) e quindi $f=Pg-T^2g+PTg-Tg=(P-T)(g+Tg)$ sicché Ran P $\subset$ Ran(P-T). Ma è ovvio, dalla definizione di T, che Ran(P-T) $\subset$ Ran P e dunque è Ran P = Ran(P-T). Quest'ultima relazione implica che K(P)=K(P-T) e, di conseguenza, $K(P-T)=1_{A_o'}L^1(\mathscr{F})$. Perciò $(P-T)K(P-T) =$ $= P\{1_{A_o}K(P-T)\} = P\{1_{A_o} 1_{A_o'}L^1(\mathscr{F})\} = \{0\}$. //

L'operatore T del lemma è unico; per la dimostrazione si veda il corollario 3, p.454 in ([18]).

(6.7) **LEMMA.** Sia $\mathscr{V} \subset L^1(\mathscr{F})$, allo stesso tempo, un sottospazio chiuso e un sottoreticolo vettoriale. Esiste allora un'unica coppia $(\mathscr{G},k)$ costituita da una tribù $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ e da una funzione peso k per $\mathscr{G}$, tale che $\mathscr{V} = k\, L^1(\mathscr{G})$.

DIM. Esiste, in primo luogo, una v.a. positiva $h\in\mathscr{V}$ con la proprietà $S(f) \subset S(h)$ per ogni $f\in\mathscr{V}$; per stabilirlo si consideri, come nella dimostrazione del lemma precedente una successione $\{f_n \subset \mathscr{V}\}$ nella quale si siano scartate le v.a. che siano eventualmente nulle. Posto $h:=\Sigma_{n\in\mathbb{N}}|f_n|/2^n\|f_n\|_1$ riesce $h\in\mathscr{V}$ e, poiché $\mathscr{V}$ è chiuso, $h\in\mathscr{V}$; h ha la proprietà cercata.

Posto $\mathscr{G}(h):=\{E\in\mathscr{F} : 1_E h\in\mathscr{V}\}$, si verifica facilmente che $\mathscr{G}(h)$ è una tribù. Si stabilirà ora l'esistenza di una v.a. k di $\mathscr{V}$ che verifichi, per ogni $E\in\mathscr{G}(h)$, la relazione

$$(6.8) \qquad \int_E 1_{S(h)}\, d\mu = \int_E k\, d\mu .$$

Si osservi intanto che $E[1_{S(h)}|\mathscr{G}(h)]$ soddisfa alla (6.8) ma che questo non basta ad assicurare che essa appartenga a $\mathscr{V}$. Mediante le

$$\lambda(E):=\int_E 1_{S(h)}\,d\mu \quad e \quad \nu(E):=\int_E h\,d\mu$$

si definiscono due misure su $(\Omega,\mathcal{G}(h))$. Poiché esse sono equivalenti, cioé l'una assolutamente continua rispetto all'altra, esiste, in virtù del teorema di Radon-Nikodym, una v.a. positiva v, misurabile rispetto a $\mathcal{G}(h)$, tale che

$$\int_E 1_{S(h)}\,d\mu = \int_E v\,h\,d\mu \qquad (E\in\mathcal{G}(h)).$$

Ora v è il limite puntuale di una successione crescente $\{v_n\}$ di v.a. $\mathcal{G}(h)$-semplici positive; poiché $v_n h \leq vh$ il teorema di convergenza dominata assicura che $v_n\,h \uparrow vh$ in $L^1(\mathcal{F})$ sicché vh è in $\mathcal{V}$ perché $v_n h$ è in $\mathcal{V}$ per ogni $n\in\mathbb{N}$ e $\mathcal{V}$ è chiuso. Basta allora porre $k=vh$ per avere la (6.8). Inoltre k è una funzione peso per $\mathcal{G}(h)$ e $S(h) = S(k)$.

Si ha $\mathcal{G}(h) = \mathcal{G}(k)$. Si supponga dapprima che E sia in $S(k)$ cioè $1_E k \in \mathcal{V}$; pertanto, per ogni $n\in\mathbb{N}$ risulta, $(h-nk1_E)^+\in\mathcal{V}$. Poiché $S(h)=S(k)$ la successione $\{(h-nk1_E)^+\}$ converge in $L^1(\mathcal{F})$ a $h1_E$, che è, perciò, in $\mathcal{V}$. Così A', e dunque anche A, è in $\mathcal{G}(h)$, ciò che prova che $\mathcal{G}(k) \subset \mathcal{G}(h)$. In maniera analoga si prova l'inclusione inversa. Si può quindi scrivere $\mathcal{G}$ senza far riferimento alle v.a. h e k.

Per dimostrare l'inclusione $kL^1(\mathcal{G}) \subset \mathcal{V}$ basta considerare una v.a. f di $L^1(\mathcal{G})$ positiva perché il caso generale scende dalla decomposizione $f=f^+-f^-$. Se $f \geq 0$ essa è il limite puntuale di una successione crescente $\{f_n\}$ di v.a. $\mathcal{G}$-semplici; allora, per linearità, kf_n appartiene a $\mathcal{V}$ per ogni $n\in\mathbb{N}$. Poiché

$$\|kf_n\|_1 = \int k\, f_n\, d\mu \le \int f_n\, d\mu = \|f_n\|_1 \le \|f\|_1$$

riesce anche $kf \in L^1(\mathscr{F})$ onde $kf \in \mathscr{V}$.

Per dimostrare l'inclusione inversa, sia f una v.a. positiva di $\mathscr{V}$. Per ogni $\lambda > 0$ la successione crescente $\{v_n\} \subset \mathscr{V}$ definita da $v_n := \{n(f-\lambda k)^+\} \wedge K$ è maggiorata da k e converge, perciò, in $L^1(\mathscr{F})$ alla v.a. $v = k\, 1_{S[(f-\lambda k)^+]}$ che è in $\mathscr{V}$ sicché $S[(f-\lambda k)^+]$ è un insieme di $\mathscr{G}$. Perciò f è il limite in $L^1(\mathscr{F})$ di una successione $\{ku_n\}$ ove u_n è $\mathscr{G}$-semplice e $S(u_n) \subset S(k)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Grazie a quest'ultima inclusione e alla (6.4) vale per tutti i numeri naturali n e r

$$\|ku_n - ku_r\|_1 = \int |ku_n - ku_r|\, d\mu = \int k\,|u_n - u_r|\, d\mu = \int |u_n - u_r|\, 1_{S(k)}\, d\mu$$

$$= \int |u_n - u_r|\, d\mu = \|u_n - u_r\|_1$$

La successione $\{u_n\}$ converge, dunque, in $L^1(\mathscr{G})$ a una v.a. u di $L^1(\mathscr{G})$. Pertanto $f = ku$ vale a dire $\mathscr{V} \subset k\, L^1(\mathscr{G})$.

(6.9) LEMMA. Se P è una proiezione positiva e contrattiva allora Ran P è un reticolo vettoriale chiuso contenuto in $L^1(\mathscr{F})$.

DIM. Ran P è ovviamente un sottospazio chiuso. Per mostrare che è un reticolo, basta far vedere, in virtù dell'identità $f \vee g = (f+g+|f-g|)/2$, che f è in Ran P, vi appartiene anche f^+. Poiché P è positivo e $f^+ \ge f$ risulta $P(f^+) \ge P(f) = f$; siccome è anche $P(f^+) \ge 0$ segue che $P(f^+) \ge 0 \vee f = f^+$. Ma allora

$$0 \le \|Pf^+ - f^+\|_1 = \int Pf^+ d\mu - \int f^+ d\mu = \|Pf^+\|_1 - \|f^+\|_1 \le 0$$

sicché $Pf^+ = f^+$ onde $f^+ \in \text{Ran } P$. //

(6.10) **LEMMA.** Per un operatore lineare $P: L^1(\mathscr{F}) \to L^1(\mathscr{F})$ sono equivalenti le proprietà:

(a) P è una proiezione contrattiva e positiva che verifica la condizione (6.2);

(b) esistono una tribù $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ e una funzione peso k per $\mathscr{G}$ tali che $P = E_k^{\mathscr{G}}$.

DIM. L'implicazione (b) $\Longrightarrow$ (a) è il contenuto del lemma (6.5). (a) $\Longrightarrow$ (b). Per i lemmi (6.7) e (6.9) esistono una tribù $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ e una funzione peso k per $\mathscr{G}$ tali che Ran $P = k\, L^1(\mathscr{G})$. Poiché, d'altra parte, anche Ran $E_k^{\mathscr{G}} = K \cdot L^1(\mathscr{G})$, per stabilire l'eguaglianza $P = E_k^{\mathscr{G}}$ basta mostrare, in virtù della (6.4), che vale

$$\int_E Pf\, d\mu = \int_E E_k^{\mathscr{G}} f\, d\mu$$

per ogni f di $L^1(\mathscr{F})$ e per ogni E di $\mathscr{G}$. Inoltre, poiché sia P sia $E_k^{\mathscr{G}}$ sono continui e verificano la (6.2) e poiché $K(P) = K(E_k^{\mathscr{G}}) = 1_{S(k)'} L^1(\mathscr{F})$ basta, in effetti, far vedere che

$$\int_E P(k1_A)\, d\mu = \int_E E_k^{\mathscr{G}}(k\, 1_A)\, d\mu \tag{6.11}$$

per ogni $E \in \mathscr{G}$ e per ogni $A \in \mathscr{F}$. Infatti, se $E \in \mathscr{G}$ e $f \in L^1(\mathscr{F})$ valgono

$$\int_E Pf\, d\mu = \int_E P(f1_{S(k)})\, d\mu + \int_E P(f1_{S(k)'})\, d\mu = \int_E P(f1_{S(k)})\, d\mu$$

perché $P(1_{S(k)'} f) \in P[K(P)] = \{0\}$, e

$$\int_E E_k^{\mathscr{G}} f\, d\mu = \int_E E_k^{\mathscr{G}} (f\, 1_{S(k)})\, d\mu$$

perché $E_k^{\mathscr{G}}(f1_{S(k)'}) \in E_k^{\mathscr{G}}[K(E_k)] = \{0\}$. E' ora evidente che la (6.11) basta a dimostrare l'asserto perché ogni v.a. del tipo

$f1_{S(k)}$ è il limite di combinazioni lineari di funzioni del tipo $K1_A$ con $A\in\mathcal{F}$.

Se $E\in\mathcal{G}$ e $A\in\mathcal{F}$, l'essere P positivo dà

$$K1_E = P(K1_E) \geq P(K1_{E\cap A}) \text{ e } K1_{E'} \geq P(K1_{E'\cap A});$$

considerando anche la relazione

$$K1_{E\cap A} + K1_{E'\cap A} = K1_A \quad \text{e} \quad 0 \leq \int_E P(K1_{E'\cap A})d\mu \leq \int_E K1_{E'}\, d\mu = 0$$

si ottiene

$$\int_E P(K1_A)d\mu = \int_E P(K1_{E\cap A})d\mu$$

sicché

$$\int_E K1_A d\mu = \|K1_{E\cap A}\|_1 \geq \|P(K1_{E\cap A})\|_1 \geq \int_E P(K1_{E\cap A})d\mu = \int_E P(K1_A)d\mu \ .$$

Quindi

$$\int_E kd\mu = \int_E k1_A d\mu + \int_E k1_{A'}d\mu \geq \int_E P(k1_A)d\mu + \int_E P(k1_{A'})d\mu =$$

$$= \int_E Pk\, d\mu = \int_E k\, d\mu$$

sicché $\int_E k\, 1_A\, d\mu = \int_E P(k1_A)d\mu$ per ogni $E\in\mathcal{G}$ e per ogni $A\in\mathcal{F}$.

Segue, infine, dalla (6.4) che, se $E\in\mathcal{G}$ e $A\in\mathcal{F}$,

$$\int_E E_k^{\mathcal{G}}(k1_A)d\mu = \int_E k\, E^{\mathcal{G}}(k1_A)d\mu = \int_E E^{\mathcal{G}}(k1_A)\, 1_{S(k)}d\mu =$$

$$= \int_{E\cap S(k)} E^{\mathcal{G}}(k\, 1_A)d\mu = \int_{E\cap S(k)} k1_A d\mu = \int_E k1_A\, 1_{S(k)}d\mu =$$

$= \int_E k1_A d\mu = \int_E P(k1_A)d\mu$,

(cioè la (6.11)).//

Siamo ora in grado di dare il teorema di caratterizzazione di Douglas.

(6.12) **TEOREMA.** Per un operatore lineare $P : L^1(\mathscr{F}) \to L^1(\mathscr{F})$ sono equivalenti le proprietà

(a) P è un operatore di SC, esiste cioè una tribù $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$, tale che $P=E^{\mathscr{G}}$;

(b) P soddisfa alle seguenti condizioni

(b.1) $P^2 = P$;

(b.2) $P1 = 1$;

(b.3) $\|P\| = 1$.

DIM. L'implicazione (a) $\Longrightarrow$ (b) è banale.

(b) $\Longrightarrow$ (a). Le condizioni (b.2) e (b.3) implicano che P è positivo. Infatti sia f una v.a. di $L^1(\mathscr{F})$ con $0 \leq f \leq 1$, allora

$$1-\|f\|_1 = \int d\mu - \int f d\mu = \|1-f\|_1 \geq \|P1-Pf\|_1 \geq 1-\|Pf\|_1 \geq 1-\|f\|_1$$

sicché $\|1-Pf\|_1=1-\|Pf\|_1$ cioè $0 \leq Pf \leq 1$.

La condizione (b.2) implica il verificarsi della (6.2); grazie al lemma (6.10), esistono una tribù $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ e una funzione peso k per $\mathscr{G}$ tali che valga la rappresentazione $P = E_k^{\mathscr{G}}$. Ma ancora dalla (b.2) segue $1=P1=k\,E(1/\mathscr{G}) = k$; dunque $P=E^{\mathscr{G}}$ .//

2.7 PROBABILITA' CONDIZIONATE E MISURE VETTORIALI.

Olson ([33]) caratterizzò le probabilità condizionate come misure vettoriali a valori in $L^1(\mathcal{F})$ e sfruttò quindi tale caratterizzazione per quella delle SC.

Una misura vettoriale a valori in $L^1(\mathcal{F})$ è una funzione $\varphi : \mathcal{F} \to L^1(\mathcal{F})$, tale che (i) $\varphi(\emptyset) = 0$ e (ii) $\varphi(\bigcup_n A_n) = \Sigma\varphi(A_n)$ per ogni successione di insiemi misurabili a due a due disgiunti. Per i richiami sulle misure vettoriali rimando a [19] o a [14].

Si vedrà qui di seguito (teorema (7.1)) che se $\mathcal{G}$ è una sottotribù di $\mathcal{F}$, la probabilità condizionata $\mu^{\mathcal{G}}$ è una misura vettoriale a valori in $L^1(\mathcal{G})$.

Si dice <u>semivariazione</u> di una misura vettoriale φ l'applicazione $|||\varphi||| : \mathcal{F} \to \mathbb{R}_+$ definita da

$$|||\varphi|||(A) := \sup\{\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi(A_i)\|_1 : \alpha_i \in \mathbb{R},\ |\alpha_i| \leq 1\ (i=1,2,\dots,n),$$
$$\{A_1, A_2, \dots, A_n) \in \pi(A)\}$$

ove $\pi(A)$ è la famiglia delle partizioni finite di A in insiemi di $\mathcal{F}$.

(7.1) TEOREMA. Sia $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$. La probabilità condizionata $\mu^{\mathcal{G}}$ è una misura vettoriale a valori in $L^1(\mathcal{G})$ di semivariazione eguale a μ. Per ogni f di $L^1(\mathcal{F})$ vale inoltre la

$$E(f/\mathcal{G}) = \int f \, d\mu^{\mathcal{G}} . \tag{7.2}$$

DIM. E' noto (teorema 1.2.4) che $\mu^{\mathcal{G}}$ è a valori in $L^1(\mathcal{G})$.

$\|\mu^{\mathcal{G}}(A)\|_1 = \int|\mu^{\mathcal{G}}(A)|d\mu = \int\mu^{\mathcal{G}}(A)d\mu = \int E^{\mathcal{G}}(1_A)d\mu = \mu(A)$ sicché se

$\alpha_i \in \mathbb{R}$ con $|\alpha_i| \leq 1$ $(i=1,2,\dots,n)$ e $\{A_1,A_2,\dots,A_n\}\in \pi(A)$ si ha

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu^{\mathscr{G}}(A_i)\right\|_1 \leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \; \|\mu^{\mathscr{G}}(A_i)\|_1 \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) = \mu(A)$$

onde $|||\mu^{\mathscr{G}}|||(A) \leq \mu(A)$. D'altra parte per $\alpha_1 = \alpha_2 \dots = \alpha_n = 1$ si ha

$\left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu^{\mathscr{G}}(A_i)\right\|_1 = \left\|\sum_{i=1}^{n} \mu^{\mathscr{G}}(A_i)\right\|_1 = \|\mu^{\mathscr{G}}(A)\|_1 = \mu(A)$. Perciò risulta

$$|||\mu^{\mathscr{G}}|||(A) = \mu(A) \quad \forall A\in\mathscr{F} \quad \text{cioè} \quad |||\mu^{\mathscr{G}}||| = \mu .$$

Sia ora $f\in L^1(\mathscr{F})$ e sia $\{s_n\}$ una successione di v.a. $\mathscr{F}$-semplici tale che $|s_n| \uparrow |f|$. Poiché le SC sono contrazioni (teorema (1.3.1) risulta $\|E(f/\mathscr{G})-E(s_n/\mathscr{G})\|_1 \leq \|f-s_n\|_1$ sicché si ha $E(s_n/\mathscr{G}) \to E(f/\mathscr{G})$ in $L^1(\mathscr{F})$ poiché $s_n \to f$ in $L^1(\mathscr{F})$. Ora se $s_n = \Sigma_{i=1}^{1(n)} \beta_i 1_{A_i}$ ove $\beta_i \in \mathbb{R}$, è

$$\int s_n d\mu^{\mathscr{G}} = \sum_{i=1}^{r(n)} \beta_i \mu^{\mathscr{G}}(A_i) = \sum_{i=1}^{r(n)} \beta_i \, E(1_{A_i}/\mathscr{G}) = E\Big(\sum_{i=1}^{r(n)} \beta_i 1_{A_i}/\mathscr{G}\Big) = E(s_n/\mathscr{G});$$

la (7.2) vale dunque per le v.a. semplici. Da quanto precede scende che $\int s_n d\mu^{\mathscr{G}} \to E(f/\mathscr{G})$ in $L^1(\mathscr{F})$. Ciò assicura l'integrabilità di f rispetto a $\mu^{\mathscr{G}}$ e la validità della (7.2) in base alla definizione di integrale rispetto a una misura vettoriale ([19]).//

E' interessante determinare quali tra le misure vettoriali $\varphi : \mathscr{F} \to L^1(\mathscr{F})$ siano misure di probabilità condizionate. A tale domanda risponde il seguente

(7.3) **TEOREMA.** Per una misura vettoriale $\nu : \mathscr{F} \to L^1(\mathscr{F})$ sono equivalenti le proprietà

(a) esiste una tribù $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ tale che $\nu = \mu^{\mathscr{G}}$;

(b) ν soddisfa alle seguenti condizioni:

(b.1) $\nu(A) \geq 0$ (q.c.) $\forall A \in \mathscr{F}$;

(b.2) $\nu(\Omega) = 1$ q.c.

(b.3) $\int_A \nu(B)\,\nu(C)\,d\mu = \int_B \nu(A)\,\nu(C)\,d\mu = \int_C \nu(A)\,\nu(B)\,d\mu \qquad \forall A,B,C \in \mathscr{F}.$

SC $\nu = \mu^{\mathscr{G}}$ risulta $\mathscr{G} = \{A \in \mathscr{F} : \nu(A) = 1_A \text{ q.c.}\}$.

DIM. (a) $\Longrightarrow$ (b) Le condizioni (b.1) e (b.2) sono ovvie. Per la (b.3), e $A,B,C \in \mathscr{F}$, il teorema (1.3.9) dà

$$\int_A \mu^{\mathscr{G}}(B)\,\mu^{\mathscr{G}}(C)\,d\mu = \int 1_A \mu^{\mathscr{G}}(B)\mu^{\mathscr{G}}(C)\,d\mu = \int E^{\mathscr{G}}\,[1_A\mu^{\mathscr{G}}(B)\mu^{\mathscr{G}}(C)]\,d\mu =$$

$$= \int \mu^{\mathscr{G}}(B)\,\mu^{\mathscr{G}}(C)\,E^{\mathscr{G}}(1_A)\,d\mu = \int \mu^{\mathscr{G}}(A)\mu^{\mathscr{G}}(B)\mu^{\mathscr{G}}(C)\,d\mu$$

espressione che è simmetrica in A,B,C.

(b) $\Longrightarrow$ (a) Si osservi, innanzi tutto, che $\nu(A) \in L^{\infty}(\mathscr{F})$ per ogni $A \in \mathscr{F}$, perché $0 \leq \nu(A) \leq 1$ q.c.. Perciò i prodotti che compaiono negli integrali della (b.3) sono finiti. Posto $\mathscr{G} := \{A \in \mathscr{F} : \nu(A) = 1_A \text{ q.c.}\}$, $\mathscr{G}$ è una tribù. Posto $C = \Omega$ nella (b.3) si ottiene grazie alla (b.2)

(7.4) $\int_A \nu(B)\,d\mu = \int_B \nu(A)\,d\mu$ per tutti gli insiemi $A,B \in \mathscr{F}$;

se poi $B \in \mathscr{G}$ la (7.4) dà

$$\int_B \nu(A)\,d\mu = \int_A \nu(B)\,d\mu = \int_A 1_B\,d\mu = \mu(A \cap B)$$

relazione che coincide con la (1.2.5). Tuttavia essa non consente ancora di affermare che ν sia la probabilità condizionata rispetto a $\mathcal{G}$, ma solo che ν è una classe d'equivalenza; resta da mostrare che ogni classe d'equivalenza contiene effettivamente una v.a. $\mathcal{G}$-misurabile. A tale fine posto $C(A,\alpha) := \{\nu(A) \leq \alpha\}$ basterà dimostrare che $C(A,\alpha) \in \mathcal{G}$ per ogni $A \in \mathcal{F}$ e per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

Si ponga $B = C'(A,\alpha)$ e $C = C(A,\alpha)$ nella (b.3) ottenendo

$$\int_A \nu\{C'(A,\alpha)\}\nu\{C(A,\alpha)\}\, d\mu = \int_{C(A,\alpha)} \nu(A)\nu\{C'(A,\alpha)\}\, d\mu \leq$$

$$\leq \alpha \int_{C(A,\alpha)} \nu\{C'(A,\alpha)\}\, d\mu$$

e $$\int_A \nu\{C'(A,\alpha)\}\, \nu\{C(A,\alpha)\}\, d\mu = \int_{C'(A,\alpha)} \nu(A)\nu\{C(A,\alpha)\}\, d\mu \geq$$

$$\geq \alpha \int_{C'(A,\alpha)} \nu\{C(A,\alpha)\}\, d\mu$$

onde

$$(7.5) \quad \alpha \int_{C'(A,\alpha)} \nu\{C(A,\alpha)\}\, d\mu \leq \int_A \nu\{C'(A,\alpha)\}\nu\{C(A,\alpha)\}\, d\mu \leq$$

$$\leq \int_{C(A,\alpha)} \nu\{C'(A,\alpha)\}\, d\mu\ .$$

In virtù della (7.4) il primo e l'ultimo membro della (7.5) sono eguali e perciò

$$\alpha\int_{C'(A,\alpha)} \nu\{C(A,\alpha)\}d\mu = \int_A \nu\{C'(A,\alpha)\}\ \nu\{C(A,\alpha)d\mu =$$

$$= \int_{C'(A,\alpha)} \nu(A)\nu\{C(A,\alpha)\}d\mu$$

onde

$$\int_{C'(A,\alpha)} \{\nu(A)-\alpha\}\nu\{C(A,\alpha)\}\ d\mu = 0.$$

Ora è $\nu(A)-\alpha > 0$ in $C'(A,\alpha)$ e quindi riesce $\nu\{C(A,\alpha)\} = 0$ μ-q.c. in $C'(A,\alpha)$. Ricorrendo nuovamente alla (b.3) con $A=B=\Omega$ e $C = C(A,\alpha)$ si ricava

$$\int\nu\{C(A,\alpha)\}\ d\mu = \int_{C(A,\alpha)} d\mu = \mu\{C(A,\alpha)\}.$$

D'altro canto da quanto detto sopra scende

$$\int\nu\{C(A,\alpha)\}\ d\mu = \int_{C(A,\alpha)} + \int_{C'(A,\alpha)} \nu\{C(A,\alpha)\ d\mu = \int_{C(A,\alpha)} \nu\{C(A,\alpha)\}d\mu\ .$$

Dal confronto delle ultime due relazioni segue che

$$\int_{C(A,\alpha)} \nu\{C(A,\alpha)\}\ d\mu = \int_{C(A,\alpha)} 1_{C(A,\alpha)}d\mu. \tag{7.6}$$

In $C'(A,\alpha)$ riesce $\nu\{C(A,\alpha)\} = 0 = 1_{C(A,\alpha)}$ μ-q.c., mentre, per la (b.1) e poiché in $C(A,\alpha)$ è $1_{C(A,\alpha)} = 1$, $0 \leq \nu\{C(A,\alpha)\} \leq 1$ sicché $1_{C(A,\alpha)} - \nu\{C(A,\alpha)\} \leq 0$ μ-q.c.. La (7.6) implica allora $\nu\{C(A,\alpha)\} = 1_{C(A,\alpha)}$ q.c. e quindi $C(A,\alpha) \in \mathcal{G}$, in virtù della definizone di $\mathcal{G}$ .//

Al teorema di caratterizzazione di Olson premetto un lemma che estende il lemma (4.6) e uno strumento di analisi funzionale che enuncerò come teorema.

(7.7) **LEMMA.** Sia $T : L^p(\mathscr{F}) \to L^p(\mathscr{F})$ con $p \in [1,+\infty[$ un operatore mediante, secondo la definizione (4.1); allora

$$(7.8) \quad T^*f = Tf \qquad \text{per } f \in L^\infty(\mathscr{F}).$$

DIM. Dal lemma (4.6) segue che $T^*1 = T1 = 1$. Perciò, se $g \in L^p(\mathscr{F})$

$$(7.9) \quad \int Tg\, d\mu = \int 1(Tg)d\mu = \int (T^*1)g\, d\mu = \int g\, d\mu \, .$$

Sia ora $f \in L^\infty(\mathscr{F})$. L'uso della (7.9), poiché $TL^\infty(\mathscr{F}) \subset L^\infty(\mathscr{F})$ (lemma (4.5)), e della (4.1.b) della definizione di operatore mediante, dà per ogni $A \in \mathscr{F}$

$$(7.10) \quad \int_A Tf\, d\mu = \int 1_A(Tf)d\mu = \int T[1_A(Tf)]d\mu = \int (T\, 1_A)(Tf)d\mu$$

e

$$(7.11) \quad \int_A T^*f\, d\mu = \int 1_A(T^*f)d\mu = \int (T\, 1_A)f\, d\mu = \int T[f(T1_A)]d\mu =$$

$$= \int (Tf)(T\, 1_A)d\mu \, .$$

Dal confronto della (7.10) e della (7.11) si ottiene

$$\int_A Tf\, d\mu = \int_A T^*f\, d\mu \qquad \text{per ogni } A \in \mathscr{F}$$

onde l'asserto.//

(7.12) **TEOREMA.** (Kantorovich e Vulich). Sia $(\Omega, \mathscr{F}, \lambda)$ uno spazio mensurale e sia $T : \mathscr{X} \to L^1(\Omega, \mathscr{F}, \lambda)$ un operatore lineare e continuo, ove $\mathscr{X}$ è uno spazio di Banach. Esiste allora un'unica funzione $\Psi : \mathscr{F} \to \mathscr{X}^*$ (il quale topologico di $\mathscr{X}$) tale che

(a) per ogni $x \in \mathscr{X}$ la funzione d'insieme $\psi(.)(x)$ sia assolutamente continua rispetto a λ e numerabilmente additiva;

(b) per ogni $x \in \mathscr{X}$ sia

$$(7.13) \qquad Tx = \frac{d[\Psi(.)(x)]}{d\lambda} ;$$

(c) la norma di T soddisfaccia alle diseguaglianze

$$(7.14) \quad \sup\{\|\Psi(A)\|_{\mathscr{X}^*} : A \in \mathscr{F}\} \leq \|T\| \leq 4 \sup\{\|\Psi(A)\|_{\mathscr{X}^*} : A \in \mathscr{F}\}.$$

Viceversa se $\Psi : \mathscr{F} \to \mathscr{X}^*$ soddisfa alla (a), la (7.13) definisce un operatore $T : \mathscr{X} \to L^1(\Omega, \mathscr{F}, \lambda)$ la norma del quale verifica la (7.14).

DIM. Si veda [19] pp. 498-499.//

(7.15) TEOREMA. Sia $T : L^p(\mathscr{F}) \to L^p(\mathscr{F})$ un operatore mediante con $p \in [1, +\infty[$. Esiste allora un'unica tribù $\mathscr{G}$ completa rispetto agli insiemi μ-trascurabili di $\mathscr{F}$, tale che $T = E^{\mathscr{G}}$. Risulta inoltre $\mathscr{G} = \{A \in \mathscr{F} : T1_A = 1_A\}$.

DIM. Nel teorema (7.12) si prenda $\mathscr{X} = L^p(\mathscr{F})$ (e $\mathscr{X}^* = L^q(\mathscr{F})$); perciò, per ogni $A \in \mathscr{F}$ e per ogni $f \in L^p(\mathscr{F})$

$$\int_A Tf\, d\mu = \int_A \frac{d\Psi(.)(f)}{d\mu} d\mu = \Psi(A)(f) = \int \nu(A) f\, d\mu$$

ove, nell'ultima eguaglianza, si è fatto uso del teorema di rappresentazione di Riesz e ove $\nu(A) \in L^p(\mathscr{F})$. D'altro canto, poiché T e T^* coincidono su $L^\infty(\mathscr{F})$ per il lemma (7.7), si ha

$$\int_A Tf\, d\mu = \int 1_A (Tf) d\mu = \int (T^* 1_A) f\, d\mu = \int (T1_A) f\, d\mu$$

onde per $f=1_B$ con $B \in \mathscr{F}$

$$\int_B T\,1_A\,d\mu = \int_B \nu(A)\,d\mu\ ;$$

di qui, grazie all'arbitrarietà di B, si ottiene $T\,1_A = \nu(A)$ per ogni $A\in\mathscr{F}$. Ora $\nu(\emptyset) = T\,1_\emptyset = 0$. Si supponga che $\{A_n\}$ sia una successione di insiemi disgiunti di $\mathscr{F}$ e si ponga $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Si ha

$$\Sigma_{k=1}^{n}\, 1_{A_k} \uparrow 1_A \text{ in } L^p(\mathscr{F}) \quad \text{e} \quad \Sigma_{k=1}^{n}\, \nu(A_k) = \Sigma_{k=1}^{n}\, T1_{A_k} = T(\Sigma_{k=1}^{n} 1_{A_k}) \to T1_A = \nu(A)$$

in $L^p(\mathscr{F})$. A fortiori, si ha dunque convergenza in $L^1(\mathscr{F})$; ciò significa che $\nu:\mathscr{F} \to L^1(\mathscr{F})$ è σ-additiva. Inoltre $\nu(\Omega) = T1=1$ sicché è verificata la condizione (b.2) del teorema (7.3). Per stabilire (b.1) si osservi che

$$\mu(A) = \int 1_A\,d\mu = \int (T^*1)1_A d\mu = \int T1_A d\mu = \int \nu(A)\,d\mu$$

e che

$$\int \nu(A)\,d\mu \leq \int |\nu(A)|\,d\mu = \int |T1_A|\,d\mu = \|T1_A\|_1 \leq \|T\|\ \|1_A\|_1 = \mu(A)$$

sicché le diseguaglianze dell'ultima relazione sono, in effetti, tutte eguaglianze onde

$$\int \{|\nu(A)| - \nu(A)\}\,d\mu = 0;$$

di qui segue che $\nu(A) = |\nu(A)| \geq 0$.

Siano ora A,B,C insiemi di $\mathscr{F}$; usando le proprietà di T si ha

$$\int_A \nu(B)\nu(C)\,d\mu = \int_A (T1_B)(T1_C)\,d\mu = \int 1_A(T1_B)(T1_C)\,d\mu =$$

$$= \int T[1_A(T1_B)(T1_C)]d\mu = \int (T1_A)(T1_B)(T1_C)d\mu$$

relazione simmetrica in A,B,C. Per il teorema (7.3), ν è dunque una probabilità condizionata a valori in $L^1(\mathscr{F})$, sicché vale la (7.2)

$$(7.16) \qquad E(f/\mathscr{G}) = \int f d\mu \qquad \text{per } f \in L^p(\mathscr{F}).$$

con $\mathscr{G} = \{A \in \mathscr{F} : \nu(A) = 1_A\}$. Ora se $A \in \mathscr{G}$ riesce, per la (7.16),

$1_A = E^{\mathscr{G}} 1_A = \nu(A) = T1_A$ sicché gli operatori $E^{\mathscr{G}}$ e T lineari e continui in $L^p(\mathscr{F})$ coincidono sulle funzioni indicatrici, onde $T = E^{\mathscr{G}}$ e $\mathscr{G} = \{A \in \mathscr{F} \,/\, T1_A = 1_A\}$.//

Si osservi che, benché la dimostrazione sia differente, la caratterizzazione di Olson è identica a quella di Rota (sezione 2.4).

2.8. LE SC COME PROIEZIONI IN L^P.

La caratterizzazione di Andô ([1]) riprende quella di Douglas e considera proiezioni contrattive in L^p con $p \in [1,+\infty[$ anziché in L^1, riconducendo il caso L^p a quello L^1.

Anche in questa sezione, il considerare solo v.a. reali anziché complesse, come nel lavoro di Ando, porta a qualche semplificazione.

Nel corso della trattazione torneranno utili le seguenti due diseguaglianze la cui dimostrazione non presenta difficoltà.

Se $r \in]0,1[$ e $\beta := (1-r)/(2r)$ esiste $k > 0$ tale che

$$(8.1) \qquad t^r(1+t^r)^{2\beta} \leq k(1+t) \qquad \text{per } t \geq 0 \;;$$

Se $t > 1/2$ esiste $\gamma > 0$ tale che

$$(8.2) \qquad (1+t)^{2\beta}/t \leq \gamma$$

(8.3) LEMMA. Se $P : L^p(\mathscr{F}) \to L^p(\mathscr{F})$ è una proiezione contrattiva anche l'aggiunto $P^* : L^q(\mathscr{F}) \to L^q(\mathscr{F})$ è una proiezione contrattiva. In questa sezione sarà sempre $p \in]1,+\infty[$ e $p^{-1}+q^{-1}=1$.

DIM. $\|P^*\| = \|P\| \leq 1$ sicché P^* è una contrazione. La relazione $(P^*)^2 = P^*$ scende delle relazioni valide per ogni $f \in L^p(\mathscr{F})$ e per ogni $g \in L^q(\mathscr{F})$.

$$\langle f, P^*g \rangle = \langle Pf, g \rangle = \langle P^2 f, g \rangle = \langle Pf, P^*g \rangle = \langle f, (P^*)^2 g \rangle . //$$

(8.4) LEMMA. Se $P : L^p(\mathscr{F}) \to L^p(\mathscr{F})$ è una proiezione contrattiva $f \in \operatorname{Ran} P$ se, e solo se, $(\operatorname{sign} f)|f|^{p-1} \in \operatorname{Ran} P^*$.

DIM. Si ponga $h=s|f|^{p-1}$ ove $s:=\mathrm{sign}f$. In virtù della dualità basta mostrare una sola delle due implicazioni: per esempio, basta far vedere che $P^*h=h$ tutte le volte che $Pf=f$. Si usi la diseguaglianza di Hölder, ottenendo, poiché $f\in L^p(\mathscr{F})$ equivale a $h\in L^p(\mathscr{F})$ se p e q sono indici coniugati

$$\|f\|_p^p = \int|f|^p d\mu = \int sf|f|^{p-1}d\mu = \int fh\,d\mu = \int(Pf)h\,d\mu=$$

$$= \int f(P^*h)d\mu \le \int|f|\,|P^*h|d\mu \le \|f\|_p\|P^*h\|_q \le$$

$$\le \|f\|_p\|h\|_q = \|f\|_p \;\|f^{p-1}\|_q = \|f\|_p^p$$

sicché le precedenti sono tutte eguaglianze. Ora, nella diseguaglianza di Hölder vale l'eguaglianza se, e solo se $|P^*h|^q = k|f|^p$ per un'opportuna costante $k>0$, cioè se, e solo se, $|P^*h|=k^{(p-1)/p}|f|^{p-1}$. Perciò risulta $P^*h=h$.//

Una conseguenza immediata di questo lemma è un sottospazio chiuso di $L^1(\mathscr{F})$ può essere l'immagine di una proiezione contrattiva al più.

Per un operatore lineare e <u>positivo</u> $T:L^p(\mathscr{F}) \to L^p(\mathscr{F})$ vale la diseguaglianza

(8.5) $$|Tf| \le T|f| \qquad (f\in L^p(\mathscr{F}));$$

infatti $|Tf|=|T(f^+-f^-)|=|Tf^+-Tf^-| \le Tf^++Tf^-=T|f|$.

(8.6) TEOREMA. Se $P : L^p(\mathscr{F}) \to L^p(\mathscr{F})$, con $p\in]1,+\infty[$ e $p\neq2$, è una proiezione contrattiva tale che $P1=1$, essa è una contrazione anche rispetto alla norma di L^1, cioè

(8.7) $\qquad \int |Pg|\,d\mu \leq \int |g|\,d\mu \qquad$ per ogni $g \in L^p(\mathscr{F})$.

La (8.7) vale anche nel caso $p=2$ se P è anche positivo.

DIM. (a) <u>Caso</u> $p \in]1,2[$: se $f \in \mathrm{Ran}\, P$ il lemma (8.4) assicura che $(\mathrm{sign}\, f)|f|^{p-1} \in \mathrm{Ran}\, P^*$. D'altro canto, come nel lemma (4.6) si ha $P^*1=1$ (nella dimostrazione si fa uso della sola proprietà $P1=1$), sicché è in $\mathrm{Ran}\, P^*$ per ogni $\varepsilon \in]0,1[$, anche la v.a. $1+\varepsilon h$ ove $h:= = (\mathrm{sign}\, f)|f|^{p-1}$. Invertendo i ruoli di P e di P^* si vede che $1+\varepsilon h^{1/r}$ è in $\mathrm{Ran}\, P$; qui si è posto $r:=p-1$. Si definisca $h_\varepsilon : \Omega \to \mathbb{R}$ mediante $h_\varepsilon := \{(1+\varepsilon h)^{1/r}-1\}/\varepsilon = \{(1+\varepsilon s|f|^r)^{1/2}-1\}/\varepsilon$.

Ora $(1+\varepsilon h)^{1/r} = (1+\varepsilon h)(1+\varepsilon h)^{1/r-1}$. Posto $\alpha = \alpha(\omega) := \varepsilon |f(\omega)|^r$ e $\beta = (1-r)/2r$ risulta

$$(1+\varepsilon h)^2 = (1+\varepsilon s|f|^r)^2 = (1+s\alpha)^2 = 1+2\alpha s+\alpha^2 s^2$$

sicché $(1+\varepsilon h)^{1/r} = (1+\alpha s)(1+2\alpha s+\alpha^2 s^2)^\beta$.

Perciò, tenendo conto del fatto che $s^2 = 1_{S(f)}$, si ottiene

$$h_\varepsilon = \frac{(1+\alpha s)(1+2\alpha s+\alpha^2 s^2)-1}{\varepsilon} =$$

$$= \frac{(1+2\alpha s+\alpha^2 s^2)^\beta - 1}{\varepsilon} + \frac{\alpha s}{\varepsilon}(1+2\alpha s+\alpha^2 s^2)^\beta =$$

(8.8) $$= h(1+2\alpha s+\alpha^2) + |f|^r \frac{(1+2\alpha s+\alpha^2)^\beta - 1}{\alpha} .$$

Si considerino separatamente i due termini a secondo membro della (8.8). Per il primo risulta

$$h(1+2\alpha s+\alpha^2) \le |h(1+2\alpha s+\alpha^2)^{\beta}| = |f^r(1+2\alpha s+\alpha^2)^{\beta}| \le$$

$$\le |f|^r(1+2\alpha+\alpha^2)^{\beta} = |f|^r(1+2\varepsilon|f|^r+\varepsilon^2|f|^{2r})^{\beta} =$$

$$= |f|^r(1+\varepsilon|f|^r)^{2\beta} \le |f|^r(1+|f|^r)^{2\beta} \le k(1+|f|)$$

grazie alla (8.1).

Quanto al secondo termine della (8.8), posto $E := \{\alpha > 1/2\}$ si ha in E,

$$|f|^r \left| \frac{(1+2\alpha s+\alpha^2)^{\beta}-1}{\alpha} \right| \le |f|^r \frac{1+(1+2\alpha+\alpha^2)^{\beta}}{\alpha} = |f|^r \frac{(1-\alpha)^{2\beta}}{\alpha} \le \gamma |f|^r$$

ove si è fatto uso della diseguaglianza (8.2). In $E' = \{\alpha \in]0,1/2]\}$ il teorema del valor medio assicura l'esistenza di una costante $c > 0$ tale che sia

$$\left| \frac{(1+2\alpha s+\alpha^2)-1}{\alpha} \right| \le c .$$

In ogni caso, perciò, il secondo membro della (8.8) è maggiorato in modulo da $k'(1+|f|+|f|^r)$, essendo k' un'opportuna costante. Ora $|f|^r \in L^p(\mathscr{F})$; infatti, poiché $r < 1$,

$$\int |f|^{rp} d\mu = \int_{\{|f|\le 1\}} + \int_{\{|f|>1\}} |f|^{rp} d\mu \le \mu\{|f|\le 1\} + \int_{\{|f|>1\}} |f|^{rp}\, d\mu \le$$

$$\le 1 + \int_{\{|f|>1\}} |f|^p\, d\mu \le 1 + \|f\|_p^p < +\infty .$$

La v.a. h_ε è dunque maggiorata in $L^p(\mathscr{F})$ sicché

$$\lim_{\varepsilon\to 0} h_\varepsilon = \frac{1}{r} h = \frac{s}{r}|f|^{p-1}$$

è in Ran P (oltre ché in Ran P*) poiché Ran P è chiuso. Per induzione si mostra che $s|f|^{r^n}$ è in Ran P* per ogni $n\in\mathbb{N}$. La successione $\{s|f|^{r^n}\}$ è maggiorata in modulo da $1+|f|^r$; infatti in $\{|f|\le 1\}$ è $s|f|^{r^n} \le 1$ mentre in $\{|f|>1\}$ è $s|f|^{r^n} < |f|^r$. ora $1+|f|^r$ è in $L^q(\mathscr{F})$ e perciò $|f|^{r^n} \to s$ in $L^q(\mathscr{F})$.

Dato infine $g\in L^p(\mathscr{F})$ e posto $f=Pg$ riesce, per il teorema di convergenza dominata

$$\int |Pg|d\mu = \int Pg\ s\ d\mu = \lim_n \int Pg\ s\ |f|^{r^n} d\mu =$$

$$= \lim_n \int gP^*(s|f|^{r^n})d\mu = \lim_n \int g\ s|f|^{r^n} d\mu =$$

$$= \int gs\ d\mu \le \int |g|d\mu$$

vale a dire la (8.7).

(b) <u>Caso</u> $p\in]2,+\infty[$: la dimostrazione di (a) fa vedere che P* è una contrazione rispetto alla norma L^1 (poiché $P^*1=1$). P* è inoltre positivo; si supponga infatti, per assurdo, che esistano una v.a. positiva f di $L^q(\mathscr{F})$ e un naturale n tale che l'insieme $F_n := \{P^*f \le 1/n\}$ abbia probabilità strettamente positiva; allora

$$0 > \int_{F_n} P^*f\ d\mu = \int_{F_n} f\ P1\ d\mu = \int_{F_n} f\ d\mu \ge 0\ ,$$

che è una contraddizione. Perciò $P^*f \ge 0$.

Sia ora $g \in L^p(\mathscr{F})$ e si ponga $s' := \mathrm{sign}(Pg)$. la positività di P^* dà, grazie alla (8.5)

$$\int |Pg| d\mu = \int s'Pg\, d\mu = \int g\, P^*s' d\mu \leq \int |g||P^*s'| d\mu \leq \int |g|\; P^*|s'| d\mu \leq$$

$$\leq \int |g| d\mu \; .$$

(c) <u>Caso</u> $p=2$: poiché P è ora positivo per ipotesi la dimostrazione è la stessa che nel caso (b). //

(8.9) LEMMA. In ogni sottospazio chiuso $\mathscr{V}$ di $L^p(\mathscr{F})$, con $p \in]1,\infty[$, esiste una v.a. f con supporto massimale, tale cioè che $S(g) \subset S(f)$ per ogni $g \in \mathscr{V}$.

DIM. Esiste, ovviamente, una successione $\{f_n\} \subset \mathscr{V}$ tale che sia $\|f_n\|_p = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $S(g) \subset \cup_{n=1}^{\infty} S(f_n)$ per ogni g in $\mathscr{V}$.

Per induzione, si costruiscono tre successioni $\{\alpha_j\} \subset \mathbb{R}_+$, $\{\gamma_{j,k}\} \subset \mathbb{R}_+$ e $\{A_j\} \subset \mathscr{F}$ con $j \in N$ e $k \geq j+1$ a partire da $\alpha_1 = 1$, $A_o = \emptyset$ e $\gamma_{0,k} = 1$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Se $g_j := \Sigma_{k=1}^{j} \alpha_k f_k$ alle tre successioni si richiede di soddisfare alle seguenti proprietà

(a) $0 < \gamma_{j+1,k} \leq \gamma_{j,k} \leq 2^{-k}$ per $k \geq j+2$,

(b) $A_j \subset S(g_j)$ e $\mu[S(g_j) - A_j] \leq 2^{-j+2}$ per $j \geq 1$;

(c) $0 < \alpha_j \leq \gamma_{j-1,j}$ e $S(g_j) = \bigcup\limits_{k=1}^{j} S(f_k)$ per $j \geq 1$;

(d) $\sum\limits_{k=j+1}^{\infty} \gamma_{j,k} |f_k| \leq |g_j|$ q.c. in A_j per $j \geq 1$.

Si supponga di aver costruito A_j e $\gamma_{j,k}$ per $j \leq n-1$ e per $k \geq j+1$ e α_j per $j \leq n$ in modo da verificare le proprietà (a)-(d). Si prenda allora $\varepsilon \in]0,1[$ sufficientemente piccolo da avere

$$\mu[S(g_n) - \{|g_n| > \varepsilon\}] < 2^{-n}$$

e si ponga $A_n := (\bigcap_{k=n+1}^{\infty} \{|f_n| \leq 2^{k_n/p}\}) \cap \{|g_n| > \varepsilon\}$

e $\qquad \gamma_{n,k} := \min\{\gamma_{n-1,k}, 2^{-k-(nk/p)}\varepsilon\}$.

E' intanto evidente che è soddisfatta la condizione (a) e che $A_n \subset S(g_n)$. Inoltre, ricorrendo alla diseguaglianza di Markov, si ha

$$\mu[S(g_n) - A_n] \leq \mu[S(g_n) - \{|g_n| > \varepsilon\}] + \sum_{k=n+1}^{\infty} \mu\{|f_n| \leq 2^{kn/p}\} \leq$$

$$\leq 2^{-n} + \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-kn} \int |f_n|^p d\mu = 2^{-n} + \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-kn} =$$

$$= 2^{-n}\left(1 + \frac{2^{-n^2}}{1-2^{-n}}\right) \leq 2^{-n}\, 4 = 2^{-n+2} ,$$

sicché è verificata anche la (b).

Esiste almeno un numero $\alpha \in]0, \gamma_{n,n+1}[$ per il quale risulta

(8.10) $\qquad \mu[S(f_{n+1}) \cap \{g_n = -\alpha f_{n+1}\}] = 0$

(altrimenti esisterebbe una famiglia con la cardinalità del continuo di eventi di probabilità strettamente positiva). Si ponga α_{n+1} eguale ad uno di tali numeri; allora se $g_{n+1} := g_n + \alpha_{n+1} f_{n+1}$, si ha, in virtù della (8.10), $S(g_{n+1}) = S(g_n) \cup S(f_{n+1})$; è così verificata anche la (c).

Segue dalla costruzione data che, per $j \geq n+1$

$$\| \sum_{k=n+1}^{j} \gamma_{n,k} |f_k| \|_p \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-kn} = 2^{-n}$$

sicché la serie $\Sigma_{k=n+1}^{\infty} \gamma_{n,k} |f_k|$ converge q.c.. Grazie alla proprietà (a), si ha nei punti di A_n

$$|g_n| - \sum_{k=n+1}^{\infty} \gamma_{n,k} |f_k| \leq \varepsilon - \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-k} \varepsilon > 0$$

sicché è verificata anche la (d).

Si ponga, infine, $f := \Sigma_{k=1}^{\infty} \alpha_k f_k$; tale serie converge in $L^p(\mathscr{F})$ in virtù delle proprietà (a) e (c). Poiché $\mathscr{V}$ è chiuso, f è in $\mathscr{V}$. La (d) dà

$$f = \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k f_k + g_n$$

onde $f \neq 0$ in A_n e di qui,

$$\mu\left[\bigcup_{n=1} S(f_n) - S(f)\right] = \lim_n \mu\left[S(g_n) - S(f)\right] \leq$$

$$\leq \lim_n \mu\{S(g_n) - A_n\} \leq \lim_n 2^{-n+2} = 0. //$$

(8.12) TEOREMA. Per un operatore lineare $P: L^p(\mathscr{F}) \to L^p(\mathscr{F})$ con $p \in]1,\infty[$, $p \neq 2$, sono equivalenti le affermazioni:

(a) P è una proiezione contrattiva,

(b) esistono una v.a. $g \in L^p(\mathscr{F})$ e una tribù $\mathscr{G}$ di sottoinsiemi di $B := S(g)$ tali che P abbia la rappresentazione

$$Pf = g \frac{E(f\ \tilde{g}^{p-1}|\tilde{\mathscr{G}})}{E(|g|^{p-1}/\tilde{\mathscr{G}})} \qquad \text{per } f\in L^p(\mathscr{F})$$

ove $\tilde{\mathscr{G}}$ è la sottotribù di $\mathscr{F}$ generata da Ω e da $\mathscr{G}$ e $\tilde{g}^{p-1}:=$ $=(\text{sign } g)|g|^{p-1}$.

DIM. (a) $\Longrightarrow$ (b) Grazie a (8.5) esiste in Ran P una v.a. di supporto massimale; posto $B:=S(g)$ si consideri lo spazio mensurale $(B, \mathscr{F}(B), \mu_p)$ ove $\mathscr{F}(B):=\{A\cap B : A\in\mathscr{F}\}$ è la traccia di $\mathscr{F}$ su B, e la misura μ_p ha densità $|g|^p$ e base μ, cioè $\mu_p:=|g|^p\cdot\mu$. Si usi l'ovvia convenzione di identificare una funzione reale definita in Ω e di supporto contenuto in B con la restrizione a B della medesima funzione. Si definisca l'operatore T da $L^p(B,\mathscr{F}(B),\mu_p)$ in sé mediante

(8.14) $\quad Tf := \frac{P(fg)}{g} \qquad$ per $f\in L^p(B,\mathscr{F}(B),\mu_p)$.

L'operatore T così definito è una proiezione contrattiva; infatti per ogni $f\in L^p(B,\mathscr{F}(B),\mu_p)$ si ha

$$T^2f=T(Tf) = \frac{P(Tf\cdot g)}{g} = \frac{1}{g}P[P(fg)] = \frac{1}{g}P^2(fg) = \frac{1}{g}P(fg) = Tf$$

e

$$\int|Tf|^p\,d\mu_p = \int \frac{|P(f\cdot g)|^p}{|g|^p}|g|^p d\mu = \int_B |P(fg)|^p d\mu =$$

$$= \|P(fg)\|_p^p \leq \|fg\|_p^p = \int|fg|^p\,d\mu = \int|f|^p d\mu_p.$$

Inoltre T lascia invariate le costanti, cioè T1=1, poiché è Pg=g appartenendo g a Ran P. Perciò T è una proiezione contrattiva anche rispetto alla norma di $L^1(B,\mathscr{F}(B),\mu_p)$ grazie al teorema (8.6), e, in conseguenza del teorema (6.12) è un operatore di SC rispetto alla misura μ_p e ad una tribù $\mathscr{G}$ contenuta in $\mathscr{F}(B)$, sicché

$$(8.15) \qquad \int_A (Tf)|g|^p d\mu = \int_A f|g|^p \, d\mu \qquad \text{per ogni } A\in\mathscr{G} .$$

La tribù $\mathscr{G}$ può essere vista come una sottotribù di $\mathscr{F}$ avente B come elemento massimo, mentre T può essere considerato come un operatore che agisce su $L^p(\Omega,\mathscr{F}\,\mu)$ mediante

$$(8.16) \qquad Tf: = T(f1_B) \qquad \text{per } f\in L^p(\Omega,\mathscr{F},\mu).$$

Considerando la SC $E^{\mathscr{G}}$ (rispetto alla misura μ) si ha dalla (8.15)

$$E^{\mathscr{G}}\,[(Tf)|g|^p] = E^{\mathscr{G}}\,(f|g|^p)$$

onde, poiché Tf è $\mathscr{G}$-misurabile

$$(Tf)\; E^{\mathscr{G}}\,(|g|^p) = E^{\mathscr{G}}\,(f|g|^p).$$

Di qui, ricorrendo alla definizione (8.14) di T e alla (8.16) si ha per $f\in L^p(\mathscr{F})$

$$Pf = g\; T(\tfrac{f}{g}) + P(f\,1_{B'}) = g\,\frac{E(f\tilde{g}^{p-1}|\,\mathscr{G})}{E(|g|^p|\mathscr{G})} + P(f1_{B'})$$

Per $p\neq 1$, l'ultimo termine è nullo. Infatti se $h=f1_B$ riesce per ogni $\varepsilon > 0$

$$(1+\varepsilon)^p \int |Ph|^p d\mu = \int |Ph+\varepsilon Ph|^p d\mu = \int |P(Ph+ h)|^p d\mu \leq$$

$$\leq \int |Ph+\varepsilon h|^p d\mu = \int |Ph|^p d\mu + \varepsilon^p \int |h|^p d\mu$$

ove l'ultima eguaglianza deriva dal fatto che h ha supporto in B' mentre Ph l'ha in B. L'ultima relazione è allora possibile solo quando $\int |Ph|^p d\mu = 0$ cioè $Ph=0$.

(b) $\Longrightarrow$ (a) Ricordando che una SC è un operatore positivo e che vale la diseguaglianza di Hölder, si ottiene

$$|E(f\tilde{g}^{p-1}|\tilde{\mathscr{G}})| \leq E(|f|\,|g|^{p-1}|\tilde{\mathscr{G}}) \leq E^{1/p}(|f|^p/\tilde{\mathscr{G}})E^{1/q}(|g|^p/\tilde{\mathscr{G}})$$

sicché

$$\int |Pf|^p d\mu = \int_B \frac{|g|^p |E(f\tilde{g}^{p-1}/\tilde{\mathscr{G}})|^p}{E^p(|g|^{p-1}/\tilde{\mathscr{G}})} d\mu =$$

$$= \int_B E^{\mathscr{G}} \left(\left| \frac{|g|\; E(f\tilde{g}^{p-1}/\mathscr{G})}{E(|g|^{p-1}/\mathscr{G})}\right|^p\right) d\mu \leq$$

$$\leq \int_B E(|g|^p/\mathscr{G}) \left| \frac{E(f\tilde{g}^{p-1}/\mathscr{G})}{E(|g|^p/\mathscr{G})}\right|^p d\mu$$

$$\leq \int_B E(|g|^p/\mathscr{G}) \frac{E(|f|^p/\mathscr{G})E^{p-1}(|g|^p/\mathscr{G})}{E^p(|g|^p/\mathscr{G})} d\mu =$$

$$= \int_B E(|f|^p/\mathscr{G})d\mu = \int_B |f|^p d\mu \leq \int |f|^p d\mu \quad ,$$

ciò che dimostra che P è una contrazione. Rimane da dimostrare che P è idempotente:

$$P^2 f = \frac{g}{E(|g|^{p-1}/\tilde{\mathcal{G}})} E^{\tilde{\mathcal{G}}}[(Pf)\tilde{g}^{p-1}] =$$

$$= \frac{g}{E(|g|^{p-1}/\tilde{\mathcal{G}})} E(|g|^p/\tilde{\mathcal{G}}) \frac{E(fg^{p-1}/\tilde{\mathcal{G}})}{E(|g|^p/\tilde{\mathcal{G}})} = Pf. \quad //$$

(8.17) COROLLARIO. Un operatore lineare $P : L^p(\mathcal{F}) \to L^p(\mathcal{F})$ con $p\in]1,+\infty[$ è una proiezione contrattiva positiva tale che $P1=1$ se e solo se è una SC.

DIM. Basta stabilire la necessità della condizione. Se $p\neq 2$, P ha la rappresentazione (8.13) nella quale g può essere presa positiva grazie al corollario (8.11). Ma allora $P1=g$ sicché $g=1$ e $Pf=E(f/\mathcal{G})$ per ogni $f\in L^1(\mathcal{F})$. Se, invece, $p=2$ il risultato è dato dal corollario (2.3).//

Si osservi che rispetto alla caratterizzazione di Douglas (sezione 2.6) per le proiezioni in $L^1(\mathcal{F})$ è stata aggiunta l'ipotesi che T sia positivo.

2.9 INVARIANZA DELLA MEDIA.

Pfanzagl ([35]) propose due caratterizzazioni della SC più vicine a considerazioni di teoria delle probabilità e di statistica; entrambe poggiano sulla proprietà d'invarianza della media.

Sia $\mathscr{H} \subset L^1(\mathscr{F})$ una famiglia arbitraria (per il momento) di v.a. e sia $T : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ un operatore (non necessariamente lineare) che goda delle seguenti proprietà

(9.1) $E(Tf) = E(f)$ per ogni f di $\mathscr{H}$ (invarianza della media);

(9.2) Se f,g sono in $\mathscr{H}$ e $f \leq g$ allora $Tf \leq Tg$ (isotonia).

(9.3) LEMMA. Se $T : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ verifica le proprietà (9.1) e (9.2) esso passa al limite lungo le successioni monotone (cioè se f_n, $f \in \mathscr{H}$ e $f_n \uparrow f$ oppure $f_n \downarrow f$ allora $Tf_n \uparrow Tf$ o $Tf_n \downarrow Tf$ rispettivamente).

DIM. Basterà considerare il solo caso di successioni crescenti, l'altro trattandosi in maniera analoga. Si supponga allora $f_n \uparrow f$; in virtù di (9.2) la successione $\{Tf_n\}$ è crescente e, poiché $Tf_1 \leq Tf_n \leq Tf$, limitata; essa ammette perciò limite q.c. e riesce $\lim_n Tf_n \leq Tf$ (q.c.). Il teorema di convergenza dominata (o quello di convergenza monotona) dà insieme alla (9.1)

$$E(\lim_n Tf_n) = \lim_n E(Tf_n) = \lim_n E(f_n) = E(f) = E(Tf)$$

onde $\lim_n Tf_n = Tf$. //

Si postuli ora che la famiglia $\mathscr{H}$ goda altresì delle proprietà

(9.4) $\mathscr{H}$ contiene le v.a. costanti ($K \in \mathscr{H}$ per ogni $K \in \mathbb{R}$);

(9.5) $f_1, f_2 \in \mathscr{H}$, $A_1, A_2 \in \mathscr{F}$ e $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ implicano $f_1 1_{A_1} + f_2 1_{A_2} \in \mathscr{H}$.

Il seguente lemma è evidente.

(9.6) LEMMA. Se la famiglia $\mathscr{H} \subset L^1(\mathscr{F})$ soddisfa alla (9.4) e alla (9.5) essa contiene le v.a. $\mathscr{F}$-semplici.

(9.7) TEOREMA. Siano $\mathscr{H} \subset L^1(\mathscr{F})$ una famiglia di v.a. che verificano la (9.4) e la (9.5), $\mathscr{G}$ una tribù contenuta in $\mathscr{F}$ e $T\ \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ un operatore che goda delle proprietà (9.1),(9.2) e inoltre delle

(9.8) $\mathrm{Ran}T \subset \mathscr{H}_0 := \mathscr{H} \cap L^1(\mathscr{G})$ (cioè Tf è $\mathscr{G}$-misurabile);

(9.9) $Tf = f$ se $f \in \mathscr{H}_0$.

Allora vale

$$T(1_A f) = 1_A\, Tf \qquad (f \in \mathscr{H}, A \in \mathscr{G}). \tag{9.10}$$

DIM. Si può dare la dimostrazione in due passi, stabilendo dapprima (a) che se la (9.10) vale per ogni f di $\mathscr{H}$ limitata, cioè per $f \in \mathscr{H} \cap L^\infty(\mathscr{F})$, essa è valida in $\mathscr{H}$; e quindi (b) che la (9.10) è effettivamente verificata da ogni v.a. f di $\mathscr{H} \cap L^\infty(\mathscr{F})$.

(a) Si supponga dunque che la (9.10) valga per ogni A di $\mathscr{G}$ e per ogni f di $\mathscr{H} \cap L^\infty(\mathscr{F})$. Sia f una v.a. di $\mathscr{H}$ limitata inferiormente; posto $A(f) := \{f \geq 0\}$ è, evidentemente, $A(f), A'(f) \in \mathscr{F}$. Per la (9.5) $f^+ = 1_{A(f)} f$ è in $\mathscr{H}$. Sia ora $\{s_n\}$ una successione crescente di v.a. $\mathscr{F}$-semplici positive convergente a f^+; allora $f_n := 1_{A'(f)} f + 1_{A(f)} s_n$ è una v.a. limitata di $\mathscr{H}$. In virtù dell'ipotesi fatta è $T(1_A f_n) = 1_A T f_n$ per ogni $n \in N$ e per ogni $A \in \mathscr{G}$. Ora $f_n \uparrow f$ e $1_A f_n \uparrow 1_A f$ sicché il lemma (9.3) dà $T(1_A f) = 1_A Tf$. La (9.10) vale dunque anche per v.a. che siano solo limitate inferiormente. Se ora f è una v.a. arbitraria di $\mathscr{H}$ si ponga $g_n := 1_{A_n} f - 1_{A'_n}$ ove $A_n := \{f \geq -n\} \in \mathscr{F}$; intanto

g_n è, per ogni $n \in \mathbb{N}$, in $\mathscr{H}$, e inoltre è limitata inferiormente ($g_n \geq -n$). Poiché $g_n \downarrow f$ e $1_A f_n \downarrow 1_A f$ per ogni $A \in \mathscr{G}$, il lemma (9.3) implica la (9.10) per ogni f di $\mathscr{H}$.

(b) Sia $f \in \mathscr{H} \cap L^\infty(\mathscr{F})$ e si supponga $k_1 \leq f \leq k_2$. Si scelga un insieme A in $\mathscr{G}$ in guisa che risulti $1_{A'} f \in \mathscr{H}_0$ (un tale insieme di $\mathscr{G}$ esiste senz'altro: per esempio $A=\Omega$). Posto $f_i := 1_A k_i + 1_{A'} f$ $(i=1,2)$ si ha $f_i \in \mathscr{H}_0$ $(i=1,2)$ e $f_1 \leq f \leq f_2$ onde, ricorrendo alla (9.9), $f_1 = Tf_1 \leq Tf \leq Tf_2 = f_2$; inoltre $1_{A'} f_i = 1_{A'} f$ $(i=1,2)$ sicché $1_{A'} f = 1_{A'} f_1 \leq 1_{A'} Tf \leq 1_{A'} f_2 = 1_{A'} f$, cioè

(9.11) $$1_{A'} f = 1_{A'}\, Tf.$$

Ora, per la (9.1), $E(1_A\, Tf)+E(1_{A'} Tf) = E(Tf)=E(f)=E(1_A f) + E(1_{A'} f)$ e di qui, in virtù della (9.11)

(9.12) $$E(1_A\, Tf) = E(1_A f).$$

Siano h_1 e h_2 due v.a. limitate di $\mathscr{H}$ con $k_1 \leq h_i \leq k_2$ $(i=1,2)$ e si supponga che esista in $\mathscr{G}$ un insieme A tale che $1_A h_1 = 1_A h_2$, $1_{A'} h_1 \leq 1_{A'} h_2$ mentre $1_{A'} f_i \in \mathscr{H}_0$ $(i=1,2)$; allora è

(9.13) $$1_A\, Th_1 = 1_A\, Th_2.$$

Infatti da $h_1 \leq h_2$ scende $Th_1 \leq Th_2$ sicché quest'ultima diseguaglianza e la (9.12) scritta prima per $f=h_1$ e poi per $f=h_2$ danno la (9.13):

$$E(1_A\, Th_1) \geq E(1_A Th_1) \text{ e } E(1_A Th_2) = E(1_A h_2)=E(1_A h_1)=E(1_A Th_1).$$

Se f e g sono due v.a. di $\mathscr{H}$ entrambe limitate dalle costanti k_1 e k_2 e se l'insieme A di $\mathscr{G}$ è tale che $1_A f = 1_A g$ allora riesce

$$(9.14) \qquad 1_A \, Tf = 1_A \, Tg.$$

Posto, infatti, $f_i := 1_A f + 1_{A'} \, k_i$ $(1=1,2)$ si ha $f_1 \leq f \wedge g \leq f \vee g \leq f_2$. La (9.14) è ora un'immediata conseguenza della (9.13).

Infine si scelgano arbitrariamente una v.a. limitata f in $\mathcal{H}$ e un insieme A in $\mathcal{G}$ e si applichi la (9.14) a f e a $g := 1_A f$; si ottiene così $1_A Tf = 1_A T(1_A f)$. Applicando la (9.11) a $1_A f$ anziché a f si ha $1_{A'} T(1_A f) = 0$ sicché in definitiva vale $1_A \, Tf = 1_A \, T(1_A f) = 1_A \, T(1_A f) + 1_{A'} T(1_A f) = T(1_A f)$ vale a dire la (9.10).//

Il teorema (9.7) costituisce già una caratterizzazione delle SC; infatti se T è la restrizione di $E(./\mathcal{G})$ a $\mathcal{H}$ riesce

$$E(1_A f/\mathcal{G}) = 1_A \, E(f/\mathcal{G}) \qquad (A \in \mathcal{G},\ f \in \mathcal{H})$$

relazione che è un caso particolare della (1.3.10). Viceversa se T soddisfa alla (9.10) si ha, in virtù della (9.1),

$$\int_A Tf \, d\mu = E(1_A \, Tf) = E[T(1_A f)] = E(1_A f) = \int_A f \, d\mu$$

che è proprio la definizione della SC $E(./\mathcal{G})$.

Per dare condizioni sufficienti affinché valgano la (9.4) e la (9.5) si consideri una famiglia di v.a. $\mathcal{H} \subset L^1(\mathcal{F})$ che soddisfaccia alle

(9.15) $kf \in \mathcal{H}$ per ogni $k \in \mathbb{R}$ e per ogni $f \in \mathcal{H}$;

(9.16) $1 + f \in \mathcal{H}$ per ogni $f \in \mathcal{H}$;

(9.17) $f \wedge g \in \mathcal{H}$ quali che siano f e g in $\mathcal{H}$;

(9.18) se $f_n \downarrow f$ ove $f_n \in \mathcal{H}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $f \in L^1(\mathcal{F})$ allora $f \in \mathcal{H}$.

Si osservi che la (9.15) e la (9.16) danno $a+bf\in\mathscr{H}$ per ogni $f\in\mathscr{H}$ e comunque si scelgano a e b in $\mathbb{R}$; inoltre anche $f\vee g$ è in $\mathscr{H}$ (per la (9.15)) .

(9.19) **LEMMA.** Se la famiglia $\mathscr{H}\subset L^1(\mathscr{F})$ non è vuota e verifica le (9.15)-(9.18) allora $\mathscr{F}^*:=\{A\in\mathscr{F} : 1_A\in\mathscr{H}\}$ è una tribù tale che $\mathscr{H} = L^1(\mathscr{F}^*)$.

DIM. Poiché $\mathscr{H}\neq\emptyset$ la (9.15) e la (9.16) implicano che 1 apparten- ga a $\mathscr{H}$ sicché $\Omega\in\mathscr{F}^*$. Se A appartiene a $\mathscr{F}^*$ vi appartiene anche A' perché $1_{A'} = 1-1_A$. Sia ora $\{A_n\}$ una successione di insiemi di $\mathscr{F}^*$; allora 1_{A_n} è in $\mathscr{H}$ per ogni $n\in\mathbb{N}$ e pertanto la (9.17) assicura che $f_n:=1_{A_2}\wedge 1_{A_2}\wedge \dots\wedge 1_{A_n}$ sia in $\mathscr{H}$. Poiché $f_n\downarrow 1_{\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n}$ la (9.18) dà $\cap_{n\in\mathbb{N}}A_n \in\mathscr{F}^*$ sicché $\mathscr{F}^*$ è una tribù.

Rimane da far vedere che ogni v.a. di $\mathscr{H}$ è $\mathscr{F}^*$-misurabile. A tal fine, si ponga $\mathscr{S}:=\{f^{-1}([a,+\infty[) : a\in\mathbb{R}, f\in\mathscr{H}\}$. Dato che f è in $\mathscr{H}$ se, e solo se, vi è anche f-(a-1) si può scrivere $\mathscr{S}=\{f^{-1}([1,+\infty[):f\in\mathscr{H}\}$; e poiché f è in $\mathscr{H}$ se, e solo se, vi è anche $0\vee(1\wedge f)$ si può scrivere ancora $\mathscr{S}=\{f^{-1}\{1\}:f\in\mathscr{H}\ 0 \le f \le 1\}$. Sia dunque f una v.a. di $\mathscr{H}$ con $0\le f\le 1$; per ogni $n\in\mathbb{N}$ è perciò in $\mathscr{H}$ la v.a. $f_n:=1-\{1\wedge n(1-f)\}$. E' facile vedere che $f_n\downarrow f_\infty$ ove f_∞ è un indicatore tale che $f_\infty^{-1}\{1\} = f^{-1}\{1\}$. Si può, perciò, scrive- re $\mathscr{S}$ in un'altra maniera, come $\mathscr{S}=\{f^{-1}\{1\}: f\in\mathscr{H}, f=1_A, A\in\mathscr{F}\}$; ma allora $\mathscr{S}=\mathscr{F}^*$.

Siccome la famiglia di sottoinsiemi di R, $\{[a,+\infty[:a\in\mathbb{R}\}$ genera la tribù di Borel $\mathscr{B}$, tutte le v.a. di $\mathscr{H}$ sono misurabili rispetto a $\mathscr{F}^*$, sicché $\mathscr{H} \subset L^1(\mathscr{F}^*)$. Per dimostrare l'inclusione inversa si osservi che appartiene a $\mathscr{H}$ ogni v.a. $\mathscr{F}^*$-semplice positiva $\Sigma_{i=1}^n a_i 1_{A_i} = V_{i=1}^n a_i 1_{A_i'}$ ($a_i \in \mathbb{R}_+$, $A_i \in \mathscr{F}^*$ per $i=1,2,\ldots,n$; $A_i \cap A_j = \emptyset$ se $i \neq j$). Se $f \geq 0$ è in $L^1(\mathscr{F}^*)$ è il limite puntuale di una successione crescente di v.a. $\mathscr{F}^*$-semplici, che in virtù della (9.15) e della (9.18) appartiene a $\mathscr{H}$. Sia infine f una v.a. arbitraria di $L^1(\mathscr{F}^*)$; allora $(f+n)^+$ è $\mathscr{F}^*$-misurabile, positiva e integrabile onde, per quanto appena visto, $(f+n)^* \in \mathscr{H}$. Ma anche $(f+n)^+ - n \in \mathscr{H}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e siccome $(f+n)^+ - n \downarrow f$, che è ovviamente una v.a. di $L^1(\mathscr{F})$, la (9.18) dà $f \in \mathscr{H}$. Dunque $L^1(\mathscr{F}^*) \subset \mathscr{H}$.//

Ecco, quindi, la prima caratterizzazione proposta da Pfanzagl

(9.20) TEOREMA. Siano $\mathscr{H}$ una famiglia non vuota di v.a. di $L^1(\mathscr{F})$ che verifichi le proprietà (9.15)-(9.18), $\mathscr{H}_0$ un sottoinsieme di $\mathscr{H}$ che soddisfaccia alle stesse proprietà e $T : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ un operatore che goda delle proprietà (9.1),(9.2)

(9.21) Ran T $\subset \mathscr{H}_0$;

(9.22) $Tf = f$ se $f \in \mathscr{H}_0$.

Allora $\mathscr{G} := \{A \in \mathscr{F} : 1_A \in \mathscr{H}_0\}$ è una tribù e T è la restrizione a $\mathscr{H}$ dell'operatore di SC $E(./\mathscr{G})$.

DIM. La dimostrazione scende immediatamente dall'osservazione che, per il lemma (9.19), si ha $\mathscr{H} = L^1(\mathscr{F}^*)$ e $\mathscr{H}_0 = L^1(\mathscr{G})$ e che, di conseguenza, sono verificate le ipotesi del teorema (9.7).//

La condizione d'invarianza (9.22) è piuttosto forte. Phanzagl dette nello stesso lavoro [35] un'altra caratterizzazione che la evita ricorrendo invece all'idempotenza che è un'immediata conseguenza della (9.21) e della (9.22). All'operatore T saranno anche richieste le seguenti proprietà

(9.23) (omogeneità) $T(kf)=kTf$ per tutte le v.a. $f \in \mathscr{H}$ e per tutti i $k \in \mathbb{R}$ per i quali l'espressione abbia senso.

(9.24) (invarianza per traslazioni) $T(1+f)=1+Tf$ per ogni $f \in \mathscr{H}$ per la quale l'espressione abbia senso.

Il lemma che segue stabilisce i legami con il lavoro di Šidak presentato nella sezione 2.3.

(9.25) LEMMA. Sia $\mathscr{H} \subset L^1(\mathscr{F})$ una famiglia di v.a. che contiene le costanti e che sia stabile rispetto alla formazione del max(v). Se $T : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ verifica alla (9.1) e alla (9.2) e se preserva le costanti ($Tk=k \quad \forall k \in \mathbb{R}$) sono equivalenti le affermazioni:

(a) T è idempotente ($T^2 = T$);

(b) T soddisfa $T(Tf \vee Tg) = Tf \vee Tg \qquad (f,g \in \mathscr{H})$.

DIM. (a) $\Rightarrow$ (b) L'isotonia (9.2) dà $T(f \vee g) \geq Tf \vee Tg$, diseguaglianza che scritta per Tf e Tg anziché per f e g dà, in virtù dell'idempotenza, $T(Tf \vee Tg) \geq Tf \vee Tg$; (b) segue ora dalla (9.1).

(a) $\Rightarrow$ (b) $\{T\, Tf \vee (-n)\} = Tf \vee (-n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Il lemma (9.3) dà ora $T^2 f = Tf$. //

(9.26) LEMMA. Se $\mathscr{H} \subset L^1(\mathscr{F})$ soddisfa alle proprietà (9.15)-(9.18) e se $T : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ è idempotente e gode delle proprietà (9.1), (9.2), (9.23) e (9.24), anche la famiglia $\mathscr{H}_0 := \{f \in \mathscr{H} : Tf=f\}$ gode delle proprietà (9.15) e inoltre è $\mathscr{H}_0 = \text{Ran}\, T$.

DIM. La relazione Ran T = $\mathscr{H}_0$ è una conseguenza ovvia dell'idempotenza.

Le proprietà (9.15),(9.16) e (9.18) di $\mathscr{H}_0$ scendono dalla (9.23), dalla (9.24) e dal lemma (9.3) rispettivamente. Per stabilire la (9.17) si osservi che l'isotonia (9.2) di T dà per f e g in $\mathscr{H}_0$: $T(f\wedge g) \leq Tf\wedge Tg = f\wedge g$ e che, ricorrendo alla (9.1), da questa ultima diseguaglianza segue $T(f\wedge g) = f\wedge g$.//

(9.27) TEOREMA. Nelle stesse ipotesi e con la stessa notazione del lemma (9.26) vale la (9.10) con $\mathscr{G} := \{A\in\mathscr{F} : 1_A \in \mathscr{H}_0\}$, sicché T è la restrizione a $\mathscr{H}$ di $E(./\mathscr{G})$.

DIM. $\mathscr{H}_0$ gode delle proprietà (9.15)-(9.18), per il lemma (9.26) e della proprietà (9.32) per definizione. Quanto alla (9.21) essa scende immediatamente dall'idempotenza di T. L'asserto è così conseguenza del teorema (9.20).//

Quest'ultima caratterizzazione migliora quella di Bahadur presentata nella sezione 2. Intanto, mentre nel teorema (9.27), alla famiglia $\mathscr{H}$ si richiede di soddisfare alle condizioni (9.15)-(9.18), Bahadur specificava che dovesse essere $\mathscr{H} = L^2(\mathscr{F}_1)$ con $\mathscr{F}_1$ un'opportuna tribù. Ho già osservato che l'invarianza della media (9.1) è una conseguenza degli assiomi di Bahadur. l'isotonia (9.2) segue dalla positività e dalla linearità di T. Anche le stesse ipotesi di Pfanzagl sono implicate da quelle di Bahadur, sicché il teorema (9.27) migliora il teorema di Bahadur.

L'ipotesi dell'invarianza della media può essere usata in congiunzione con altre, già incontrate, per dare una diversa caratterizzazione delle SC. Vale il seguente teorema, per la dimostrazione del quale rimando a [32] I-2-13.

(9.28) **TEOREMA.** Per un operatore lineare e continuo $T : L^p(\mathscr{F}) \to L^p(\mathscr{F})$ con $p \in [1, +\infty[$ sono equivalenti le affermazioni:

(a) T soddisfa alle due relazioni:

$$E(Tf) = E(f), \quad T(g\, Tf) = (Tf)(Tg) \qquad (f \in L^p(\mathscr{F}),\ g \in L^\infty(\mathscr{F}));$$

(b) T è la restrizione a $L^p(\mathscr{F})$ di un operatore $E^{\mathscr{G}}$, con $\mathscr{G}$ sottotribù di $\mathscr{F}$.

2.10 GLI OPERATORI MARKOVIANI.

Il lavoro di Letta ([27]) che qui espongo è leggermente differente in ispirito da quelli che ho illustrato sino a questo momento. In breve, nel lavoro in questione, anziché immaginare che sia assegnato uno spazio di probabilità, è data una successione di operatori definiti sopra un assegnato spazio misurabile e soddisfacenti ad opportune condizioni; si dà allora una condizione necessaria e sufficiente affinché esista una misura di probabilità sullo spazio assegnato rispetto al quale gli operatori dati siano (versioni di) SC.

(10.1) DEFINIZIONE. Siano $(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$ $(i=1,2)$ spazî misurabili e sia $B(\Omega_i, \mathcal{F}_i)$ lo spazio vettoriale delle funzioni $f:\Omega_i \to \mathbb{R}$ limitate e $\mathcal{F}_i$-misurabili. Un operatore lineare $T:B(\Omega_1,\mathcal{F}_1)\to B(\Omega_2,\mathcal{F}_2)$ si dice <u>markoviano</u> se verifica le seguenti condizioni

(a) $T1=1$;

(b) T è positivo ($Tf \geq 0$ se $f \geq 0$);

(c) T è sequenzialmente continuo (cioè se $\{f_n\} \subset B(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ è una successione tale che $\inf_n f_n = 0$ risulta $\inf_n Tf_n = 0$.

(10.2) TEOREMA. Siano $(\Omega,\mathcal{F})$ uno spazio misurabile e $\{\mathcal{F}_n : n\in\mathbb{Z}_+\}$ una successione crescente di tribù contenute in $\mathcal{F}$ con $\mathcal{F}_0=\{\Omega,\emptyset\}$ e tale che $\mathcal{F}= \vee_n \mathcal{F}_n$. Per ogni $n\in\mathbb{Z}_+$, sia $T_n:B(\Omega,\mathcal{F}_{n+1}) \to B(\Omega,\mathcal{F}_n)$ un operatore markoviano che goda delle seguenti proprietà

(10.3) $\quad T_n(fg) = g\, T_n f \quad$ se $f\in B(\Omega,\mathcal{F}_{n+1})$ e $g\in B(\Omega,\mathcal{F}_n)$.

Sono allora equivalenti le affermazioni:

(a) esiste una misura di probabilità μ (necessariamente unica) su $(\Omega,\mathscr{F})$ tale che $T_n = E^{\mathscr{F}_n}$;

(b) per ogni successione limitata $\{f_n\}$ di v.a. positive di $B(\Omega,\mathscr{F})$ che sia adattata alla successione di tribù $\{\mathscr{F}_n : n\in\mathbb{Z}_+\}$ e che verifichi le relazioni

(10.4) $$f_n = T_n\, f_{n+1} \quad (n\in\mathbb{Z}_+), \qquad \lim_n f_n = 0,$$

si ha $f_o = 0(f_o(\omega) = 0$ per ogni $\omega\in\Omega$).

DIM. (a) $\Longrightarrow$ (b) Sia $\{f_n\}$ una successione con le proprietà richieste da (b).
Il teorema di convergenza dominata dà $\lim_n E(f_n) = 0$. D'altra parte poiché, rispetto alla probabilità μ, riesce $T_n f=E(f/\mathscr{F}_n)$ per ogni $f\in B(\Omega,\mathscr{F}_{n+1})$ si ha

$E(f_n)=E(T_n(f_{n+1})=E(E^{\mathscr{F}_n} f_{n+1})=E(f_{n+1})$ per ogni $n\in\mathbb{Z}_+$ sicché $E(f_n) =$ $= E(f_o)$ per ogni $n\in\mathbb{Z}_+$ e dunque $E(f_o) = 0$, onde $f_o=0$ μ-q.c.. Ma f_o è costante in quanto misurabile rispetto a $\{\Omega,\emptyset\}$ e perciò $f_o(\omega) = 0$ per ogni $\omega\in\Omega$.

(b) $\Longrightarrow$ (a) Si definisca l'operatore lineare $U_n : \bigcup_{k\geq n+1} B(\Omega,\mathscr{F}_k) \to B(\Omega,\mathscr{F}_n)$ mediante

$$U_n\, f = T_n\, T_{n+1}\ldots T_{k-1} f \quad \text{se} \quad f\in B(\Omega,\mathscr{F}_k) \text{ con } k \geq n + 1.$$

Poiché si possono identificare $B(\Omega,\mathscr{F}_o)$ e $\mathbb{R}$, $\mathscr{U}_o$ è un funzionale lineare e positivo su $U_{n\in N} B(\Omega , \mathscr{F}_n)$. Inoltre $\mathscr{U}_o$ passa al limite lungo le successioni monotone (soddisfa, cioè, alla (c) della definizione (10.1)). Se, infatti, $\{g_n : n\in N\} \subset U_{n\in N} B(\Omega,\mathscr{F}_n)$ è una

successione decrescente tale che $\inf_k g_k = 0$, si definisca una nuova successione $\{f_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ mediante $f_n := \inf\{U_n g_k : k \geq n\}$. La successione $\{f_n\}$ soddisfa alle condizioni di (b); infatti $T_n f_{n+1} =$
$= T_n (\inf_{k \geq n+1} \mathscr{U}_{n+1} g_k) = \inf_{k \geq n+1} T_n U_{n+1} g_k = \inf_{k \geq n} U_n g_k = f_n$

in virtù della (10.1.c) e perché $\{g_n\}$ è decrescente e $\lim_n f_n =$
$= \lim_n \inf_{k \geq n} U_n g_k = 0$. Perciò $f_o = 0$. Sfruttando la linearità di $\mathscr{U}_o$ e la (b) si può costruire un'unica misura di probabilità μ su $(\Omega, \mathscr{F})$, rispetto alla quale riesca $E(f) = U_o f$ per ogni $f \in U_{n \in N} (\Omega, \mathscr{F}_n)$: basta partire dalle funzioni indicatrici 1_A con $A \in \mathscr{F}_n$ ponendo $\mu(A) := U_o 1_A$). Allora se $f \in B(\Omega, \mathscr{F}_{n+1})$ e $g \in B(\Omega, \mathscr{F}_n)$, onde $fg \in B(\Omega, \mathscr{F}_n) \subset B(\Omega, \mathscr{F}_{n+1})$, nello spazio di probabilità $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ risulta, per la (10.3)

$$(10.5) \qquad E(gT_n f) = E[T_n(fg)] = U_o T_n(fg) = T_o T_1 \ldots T_{n-1}[T_n(fg)] =$$
$$= U_o(fg) = E(fg).$$

Nella (10.5) si prenda $g = 1_A$ con $A \in \mathscr{F}_n$ ottenendo così

$$\int_A T_n f \, d\mu = \int_A f d\mu$$

onde, per l'arbitrarietà di A, $T_n f = E(F/\mathscr{F}_n)$.//

In questo teorema si può facilmente ottenere un teorema di C. Ionescu.-Tulcea ([27]) sulle probabilità di transizione.

2.11. SINOSSI DEI RISULTATI.

Questa sezione raccoglie, per comodità del lettore, gli assiomi usati dai varî autori per caratterizzare un operatore T come una SC o come la restrizione di una SC.

1. Moy (1954)

(M.0) $T : L^p(\mathscr{F}) \to L^p(\mathscr{F})$ con $p \in [1, +\infty[$;

(M.1) T è lineare;

(M.2) $TL^\infty(\mathscr{F}) \subset L^\infty(\mathscr{F})$;

(M.3) $T(f\ Tg) = (Tf)(Tg)$ $(f, g \in L^\infty(\mathscr{F}))$;

(M.4) T è una contrazione in $L^1(\mathscr{F})$: $\|Tf\|_1 \leq \|f\|_1$ $(f \in L^p(\mathscr{F}))$.

(M.5) $T1 = 1$

2. Bahadur (1955)

(B.0) $T: L^2(\mathscr{F}) \to L^2(\mathscr{F})$;

(B.1) T è lineare;

(B.2) T è idempotente $T^2=T$;

(B.3) T è autoaggiunto;

(B.4) T è positivo;

(B.5) $T1 = 1$.

3. Šidák (1957)

(Š.0) $T : L^2(\mathscr{F}) \to L^2(\mathscr{F})$;

(Š.1) T è lineare;

($\check{S}$.2) T è idempotente;

($\check{S}$.3) T è autoaggiunto;

($\check{S}$.4) $T1 = 1$;

($\check{S}$.5) $T(Tf \vee Tg) = Tf \vee Tg$ $\quad (f, g \in L^2(\mathscr{F})$.

4. Rota (1960)

(Ro.0) $T : L^p(\mathscr{F}) \to L^p(\mathscr{F})$, $\quad p \in [1, +\infty[$;

(Ro.1) T è lineare;

(Ro.2) $\|Tf\|_p \leq \|f\|_p \quad (f \in L^p(\mathscr{F}))$;

(Ro.3) $T1 = 1$;

(Ro.4) $T(g\, Tf) = (Tf)(Tg) \quad (f \in L^p(\mathscr{F}), g \in L^\infty(\mathscr{F}))$.

5.Rao (1965)

(Ra.0) $T : L^\varphi(\mathscr{F}) \to L^\varphi(\mathscr{G})$ con φ funzione di Young continua e moderata;

(Ra.1) T è lineare;

(Ra.2) T è idempotente;

(Ra.3') $\|T\| \leq 1$ e la funzione di Young complementare Ψ è continua;

oppure

(Ra.3") $T^*f = f \quad (f \in L^\infty(\mathscr{G}))$.

6. Douglas (1965)

(D.0) $T : L^1(\mathscr{F}) \to L^1(\mathscr{F})$;

(D.1) T è lineare;

(D.2) T è idempotente;

(D.3) $T1 = 1$;

(D.4) $\|T\| = 1$

7. Olson (1965): ipotesi identiche a quelle di Rota.

8. Ando (1966)

(A.0.) $T : L^p(\mathscr{F}) \to L^p(\mathscr{F})$ con $p \in]1,+\infty[$;

(A.1) T è lineare;

(A.2) $T^2 = T$;

(A.3) $T1 = 1$;

(A.4) $\|T\| = 1$;

(A.5) T è positivo.

9. Pfanzagl (1967)

(P.0) $T : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ con $\mathscr{H} \subset L^1(\mathscr{F})$ ove $\mathscr{H}$ gode delle seguenti proprietà:

(a) $K \in \mathbb{R},\ f \in \mathscr{H} \implies kf \in \mathscr{H}$; (b) $f \in \mathscr{H} \implies 1+f \in \mathscr{H}$;

(c) $f, g \in \mathscr{H} \implies f \wedge g \in \mathscr{H}$; (d) $\{f_n\} \subset \mathscr{H},\ f_n \downarrow f,\ f \in L^1(\mathscr{F}) \implies f \in \mathscr{H}$;

(P.1) $E(Tf) = E(f) \qquad (f \in \mathscr{H})$;

(P.2) T è isotono: $f \leq g,\ f, g \in \mathscr{H} \implies Tf \leq Tg$;

(P.3) $T(kf) = k\, Tf \quad (k \in \mathbb{R},\ f \in \mathscr{H})$;

(P.4) $T(1+f) = 1 + Tf \quad (f \in \mathscr{H})$.