$$= k + 2N\, C(h,N)^2.$$

Ricordando che $C(h,N) = \gamma(h)/\gamma(N)$, le proprietà della funzione γ comportano (cf. [14]) che $C(h,N)^2 \leq (2N+1/2N)(h/h+1)^{1/2}$; questa e l'ipotesi $N \geq k(h+1)$ danno allora dall'ultima diseguaglianza:

$$\int_{S^{N-1}} \|P_{\mathcal{K}}(\varpi\bar{f})\|^2_{L^2(M)}\, ds < 1 - [8(h+1)^2]^{-1}$$

e quindi la conclusione. _|

6. RISULTATI SPETTRALI SUI RIVESTIMENTI RIEMANNIANI.

6.1. Per una Varietà X indichiamo con $E^*_X(\mu^*)$ l'autospazio relativo all'autovalore $\mu^* \in \mathrm{Spec}^* X$ e con $N^*_X(\lambda)$ il numero degli autovalori μ^* tali che $\mu^* < \lambda$, $\lambda \in \mathbf{R}$ (* sta ad indicare il problema relativo ad una varietà chiusa se $\partial X = \emptyset$, il problema di Dirichlet se $\partial X \neq \emptyset$). Vogliamo dimostrare che, utilizzando le notazioni introdotte in 5.1 e sotto le ipotesi ivi considerate, risulta:

(6.1.1) TEOREMA. $\qquad N^*_{\bar{M}}(\lambda) \leq N^*_M[8(h+1)^2\lambda](h+1) - 1.$

Dim. Consideriamo i seguenti spazi:

$\mathcal{E}^* = \oplus E^*_{\bar{M}}(\bar{\lambda}^*_i)$, la somma essendo estesa a tutti i $\bar{\lambda}^*_i < \lambda$: $\mathcal{E}$ è un sottospazio vettoriale di $L^2(\bar{M})$ di dimensione $N^*_{\bar{M}}(\lambda)$;

$\mathcal{K}^* = \oplus E^*_M(\lambda^*_i)$, somma per $\lambda^*_i < 8(h+1)^2\lambda$: $\mathcal{K}$ è un sottospazio vettoriale di $L^2(M)$ di dimensione $N^*_M[8(h+1)^2\lambda]$.

Le forme quadratiche $\|df\|^2_{L^2(M)}$, $\|d\bar{f}\|^2_{L^2(\bar{M})}$ (i cui spettri coincidono con $\mathrm{Spec}^* M$ e $\mathrm{Spec}^* \bar{M}$ rispettivamente, v. 2.3) sui sottospazi $H^1{}_*(M)$ di $L^2(M)$ e $H^1{}_*(\bar{M})$ di $L^2(\bar{M})$ sono tali che:

$$\|d(\varpi\bar{f})\|^2_{L^2(M)} \leq \|d\bar{f}\|^2_{L^2(\bar{M})},$$

come si prova in modo analogo a quello usato per dimostrare la (4.1.3) (si osservi che $\varpi(H^1{}_*(\bar{M})) \subset H^1{}_*(M)$ per la definizione (5.1.1) di ϖ).

Inoltre su $\mathcal{E}^* \subset H^1{}_*(\bar{M})$, $\mathcal{K}^* \subset H^1{}_*(M)$ si ha:

a) $\|d(\varpi\bar{f})\|^2_{L^2(M)} \leq \|d\bar{f}\|^2_{L^2(\bar{M})} < \lambda \|\bar{f}\|^2_{L^2(\bar{M})} \quad \forall\ \bar{f} \in \mathcal{E}^*$,

infatti se $\bar{f} \in \mathcal{E}^*$, anche $\Delta_{\bar{M}}\bar{f} \in \mathcal{E}^*$ e risulta

$$\|d\bar{f}\|^2_{L^2(\bar{M})} = «\Delta_{\bar{M}}\bar{f},\bar{f}»_{\bar{M}} < \lambda\|\bar{f}\|^2_{L^2(\bar{M})};$$

b) $\|df\|^2_{L^2(M)} \geq [8(h+1)^2\lambda]\ \|f\|^2_{L^2(M)} \quad \forall\ f \in \mathcal{K}^{*\perp} = \oplus E^*_M(\lambda^*_i)$, somma per $\lambda^*_i \geq 8(h+1)^2\lambda$;

c) se $f \in L^2(M)$ è $L^2(M)$-ortogonale a $\mathcal{K}^*$, allora f è anche ortogonale a $\mathcal{K}^*$ rispetto alla forma quadratica $\|df\|^2_{L^2(M)}$, infatti se $\phi \in \mathcal{K}^*, f \in \mathcal{K}^{*\perp}$ si ha $\Delta_M\phi \in \mathcal{K}^*, \Delta_M f \in \mathcal{K}^{*\perp}$ e quindi

$$\|d(\phi+f)\|^2_{L^2(M)} = «\Delta_M(\phi+f),\phi+f»_M = «\Delta_M\phi,\phi»_M + «\Delta_M f,f»_M =$$
$$= \|d\phi\|^2_{L^2(M)} + \|df\|^2_{L^2(M)}.$$

Ma allora, considerata la proiezione $L^2(M)$-ortogonale $P_{\mathcal{K}^*}: L^2(M) \longrightarrow \mathcal{K}^*$, si ha $\varpi\bar{f} - P_{\mathcal{K}^*}(\varpi\bar{f}) \in \mathcal{K}^{*\perp} \quad \forall \bar{f} \in \mathcal{E}^*$ e quindi, applicando successivamente b),c) ed a):

$$[8(h+1)^2\lambda]\ \|\varpi\bar{f} - P_{\mathcal{K}^*}(\varpi\bar{f})\|^2_{L^2(M)} \leq \|d(\varpi\bar{f} - P_{\mathcal{K}^*}(\varpi\bar{f})\|^2_{L^2(M)} =$$
$$= \|d(\varpi\bar{f})\|^2_{L^2(M)} - \|d(P_{\mathcal{K}^*}(\varpi\bar{f})\|^2_{L^2(M)} \leq \lambda\|\bar{f}\|^2_{L^2(\bar{M})}$$

cioè, ricordando la (5.1.2):

$$8(h+1)^2\left(\|\bar{f}\|^2_{L^2(\bar{M})} - \|P_{\mathcal{K}^*}(\varpi\bar{f})\|^2_{L^2(M)}\right) \leq \|\bar{f}\|^2_{L^2(\bar{M})}$$

da cui

$$\|P_{\mathcal{K}^*}(\varpi\bar{f})\|^2_{L^2(M)} \geq [1 - (8(h+1)^2)^{-1}]\ \|\bar{f}\|^2_{L^2(\bar{M})}$$

e la conclusione per l'osservazione (5.1.4) al teorema (5.1.3). _|

Come conseguenza immediata del teorema (6.1.1) abbiamo allora la stima degli autovalori di $\bar{M}$ tramite gli autovalori di M:

$$(6.1.2) \qquad \bar{\lambda}^*_{i(h+1)} > [8(h+1)^2]^{-1}\lambda^*_{i+1} \quad \forall \quad i \in \mathbf{N}.$$

6.2. Diamo ora una dimostrazione, differente da quella data da TYSK in [19], della diseguaglianza di Kato. Precisamente, dato un rivestimento riemanniano $\pi: (\bar{M},\bar{g}) \longrightarrow (M,g)$ ad h fogli non ramificato della varietà riemanniana connessa compatta (M,g), e considerati gli spettri $Spec^* \bar{M} = \{\bar{\lambda}^*_i\}_{i\in \mathbf{N}^*}$, $Spec^* M = \{\lambda^*_i\}_{i\in \mathbf{N}^*}$ (* sta ad indicare il problema senza bordo o rispettivamente di Dirichlet se $\partial M \neq \emptyset$) dimostriamo che:

(6.2.1) TEOREMA. $\sum_{0}^{\infty}{}_i\, e^{-\bar{\lambda}_i^* t} \leq h \sum_{0}^{\infty}{}_i\, e^{-\lambda_i^* t} \quad \forall\ t>0.$

Dim. Sia $k^*(t,x,x')$ il nucleo dell'equazione del calore su M cioè (cf. [2], p.98-99, e [7] per il caso a bordo) l'unica funzione continua su $\mathbf{R}_+ xMxM$, con le opportune condizioni di annullamento sul bordo se $\partial M \neq \emptyset$, di classe C^1 rispetto a t e C^2 rispetto ad x , che sia soluzione dell'equazione del calore:

(6.2.2) $\quad \partial/\partial t + \Delta_x = 0 \qquad$ (con condizioni di Dirichlet se $\partial M \neq \emptyset$)

per la quale si abbia, per $t \longrightarrow 0^+$:

$$\lim k^*(t,x,x') = \delta_x(x') \qquad \text{(massa di Dirac)}$$

nel senso che $\forall\ \phi \in C^{\infty}{}_*(M)$ risulti

(6.2.3) $\quad \lim \int_M k^*(t,x,x')\, \phi(x')\, dv_g(x') = \phi(x) \qquad$ per $t \longrightarrow 0^+$.

Indichiamo con $\bar{k}^*(t,y,y')$ il nucleo dell'equazione del calore su $\bar{M}$. Fissato $\bar{y} = s_{i_0}(x) \in \pi^{-1}(x)$, poniamo:

(6.2.4) $\quad f^*(t,x,x') = \Sigma_p\, \bar{k}^*(t, s_{i_0}(x), s_p(x'))$

essendo s_p le funzioni definite in 4.1, p=1,...,h; osserviamo che $f^*(t,x,x')$ non dipende dalla scelta di $\bar{y}$ in $\pi^{-1}(x)$ essendo M ed $\bar{M}$ localmente isometriche. La funzione f^* è continua su $\mathbf{R}_+ xMxM$, nulla sull'eventuale bordo, C^1 rispetto a t e C^2 rispetto ad x per costruzione; f^* verifica l'equazione (6.2.2) in quanto, tenuto conto che $\Delta_x = \bar{\Delta}_{\bar{y}}$ essendo $M,\bar{M}$

isometriche, si ha:

$$(\partial/\partial t + \Delta_x) f^*(t,x,x') = \Sigma_p (\partial/\partial t + \bar{\Delta}_{\bar{y}}) \bar{k}^*(t,\bar{y},s_p(x')) = 0;$$

infine risulta $\forall\ \phi \in C^{\infty}_*(M)$, per il teorema di Fubini:

$$\int_M f^*(t,x,x')\, \phi(x')\, dv_g(x') = \int_{\bar{M}} \bar{k}^*(t,\bar{y},y')(\phi\circ\pi)(y')\, dv_{\bar{g}}(y')$$

che tende a $(\phi\circ\pi)(\bar{y}) = \phi(x)$ per $t \longrightarrow 0^+$.

Per l'unicità del nucleo del calore si ha quindi:

$$f^*(t,x,x') = k^*(t,x,x').$$

Ma allora per $x' = x$ si ha, considerata la positività di $\bar{k}^*$:

$$\bar{k}^*(t,\bar{y},\bar{y}) \le \Sigma_{y'\in\pi^{-1}(x)} \bar{k}^*(t,\bar{y},y') = k^*(t,x,x)$$

e quindi (cf. [2], p.100):

$$\sum_{0}^{\infty}{}_i\, e^{-\bar{\lambda}^*_i t} = \int_{\bar{M}} \bar{k}^*(t,\bar{y},\bar{y})\, dv_{\bar{g}}(\bar{y}) = \int_M \Sigma_{\bar{y}\in\pi^{-1}(x)} \bar{k}^*(t,\bar{y},\bar{y})\, dv_g(x) \le$$

$$\le h \int_M k^*(t,x,x)\, dv_g(x) = \sum_{0}^{\infty}{}_i\, e^{-\lambda_i^* t}.\ \_|$$

6.3. In base alle osservazioni del n. 4.3 possiamo concludere che *i risultati ottenuti, in particolare (6.1.2) e (6.2.1), valgono anche per rivestimenti riemanniani ramificati ad h fogli il cui insieme di ramificazione abbia capacità nulla* (si noti che in base all'osservazione al teorema (3.3.1) quest'ipotesi è meno restrittiva di quella usata in [19] di codimensione ≥ 2 per dimostrare (6.2.1)).

7. UN'APPLICAZIONE ALLE SUPERFICIE MINIMALI DI R^3.

7.1. Sia M una superficie in $\mathbf{R}^3$ ed indichiamone con A la II forma quadratica fondamentale e con k la curvatura gaussiana. Se K è un compatto in M, l'*indice* di K è il numero degli autovalori negativi relativi al problema di Dirichlet: