ramificato ad h fogli della varietà riemanniana connessa compatta senza bordo (M,g), con insieme di ramificazione $\bar{A}\subset\bar{M}$, e se $A=\pi(\bar{A})$ è chiuso ed ha capacità nulla, anche $\pi^{-1}(A)$ ha capacità nulla per (4.1.5); allora, per il teorema (3.3.1), si ha coincidenza fra $\mathrm{Spec}^D(M\backslash A)$ e Spec M ed anche tra $\mathrm{Spec}^D(\bar{M}\backslash\pi^{-1}(A))$ e Spec $\bar{M}$.

Per essere più precisi, $\forall\ \varepsilon > 0$ consideriamo un aperto E_ε di M, con bordo C^∞ a tratti, contenente A con cap $E_\varepsilon < \varepsilon$; allora $\pi^{-1}(E_\varepsilon)$ è un aperto di $\bar{M}$ contenente $\pi^{-1}(A)$ con cap $\pi^{-1}(E_\varepsilon) < h\varepsilon$ per (4.2.1).

π: $(\bar{M}\backslash\pi^{-1}(E_\varepsilon),\bar{g}) \longrightarrow (M\backslash E_\varepsilon,g)$ è un rivestimento riemanniano non ramificato ad h fogli di varietà *con bordo* del tipo considerato in (4.1.4). Considerando percio' gli spettri di Dirichlet, si ha per (4.2.3) e (3.3.2) che per $\varepsilon \longrightarrow 0$:

$$\lim \mathrm{Spec}^D(\bar{M}\backslash\pi^{-1}(E_\varepsilon)) = \mathrm{Spec}\ \bar{M},$$

$$\lim \mathrm{Spec}^D(M\backslash E_\varepsilon) = \mathrm{Spec}\ M.$$

Siamo quindi ricondotti, nello studio dei legami fra Spec $\bar{M}$ e Spec M, allo studio dei legami fra gli spettri corrispondenti di rivestimenti riemanniani non ramificati di varietà con bordo.

5. RISULTATI HILBERTIANI PER RIVESTIMENTI RIEMANNIANI.

5.1. Per tutti i nn. 5 e 6 intendiamo che π: $(\bar{M},\bar{g}) \longrightarrow (M,g)$ sia un rivestimento riemanniano non ramificato ad h fogli di varietà riemanniane connesse compatte; nel caso di varietà a bordo supponiamo che la restrizione di π a $\partial\bar{M}$ sia ancora un rivestimento riemanniano non ramificato ad h fogli di ∂M (cf. 4.3).

Per qualsiasi $\bar{f}$: $\bar{M} \longrightarrow \mathbf{R}$ (tale che $\bar{f}|_{\partial\bar{M}} = 0$ se $\partial\bar{M} \neq \emptyset$) definiamo la funzione $\varpi\bar{f}$: $M \longrightarrow \mathbf{R}$ ponendo:

(5.1.1) $(\varpi\bar{f})(x) := \left[\Sigma_{y\in \,^{-1}(x)} \ (\bar{f}(y))^2\right]^{1/2} = \left[\Sigma_p \ (\bar{f}\circ s_p(x))^2\right]^{1/2} \quad \forall\ x\in M,$

ove s_p, $p=1,\dots,h$, sono le funzioni definite in 4.1 (è $\varpi\bar{f}|_{\partial M} = 0$ se $\partial M \neq \emptyset$).

L'applicazione (non lineare) ϖ porta $L^2(\bar{M})$ in $L^2(M)$ in quanto per il teorema di Fubini si ha:

(5.1.2) $\|\varpi\bar{f}\|^2_{L^2(M)} = \int_M [(\varpi\bar{f})(x)]^2 dv_g(x) = \int_{\bar{M}} (\bar{f}(y))^2 dv_{\bar{g}}(y) = \|\bar{f}\|^2_{L^2(\bar{M})}.$

Ebbene, vogliamo dimostrare che, sotto le ipotesi e con le notazioni precedentemente introdotte, si ha:

(5.1.3) TEOREMA. *Siano $\mathcal{E},\mathcal{K}$ sottospazi di $L^2(\bar{M})$,$L^2(M)$ di dimensione finita N,k rispettivamente, e sia $P_{\mathcal{K}} : L^2(M) \longrightarrow \mathcal{K}$ la proiezione L^2-ortogonale. Allora:*

(i) se $N > h$ $\exists\ \bar{f}\in \mathcal{E}\setminus(0)$ tale che:

$$\|\varpi\bar{f}\|_{L^1(M)} \leq C(h,N)(\mathrm{Vol}\ M)^{1/2}\ \|\bar{f}\|_{L^2(\bar{M})}$$

essendo $C(h,N)$ una costante <1 che dipende da h e da N;

(ii) se $N \geq k(h+1)$ $\exists\ \bar{f}\in \mathcal{E}\setminus(0)$ tale che:

$$\|P_{\mathcal{K}}(\varpi\bar{f})\|^2_{L^2(M)} < [1-(8(h+1)^2)^{-1}]\ \|\bar{f}\|^2_{L^2(\bar{M})}.$$

Prima di dimostrare questo teorema, notiamo esplicitamente che:

(5.1.4) OSSERVAZIONE. La (ii) si puo' rienunciare dicendo che, posto

$$P_{\mathcal{K}}(\varpi\bar{f})^{\perp} = \varpi\bar{f} - P_{\mathcal{K}}(\varpi\bar{f}),$$

nelle ipotesi del teorema risulta, tenuto conto di (5.1.2):

$$\|P_{\mathcal{K}}(\varpi\bar{f})^{\perp}\|^2_{L^2(M)} > [8(h+1)^2]^{-1}\ \|\bar{f}\|^2_{L^2(\bar{M})}$$

per almeno una funzione $\bar{f}\in \mathcal{E}\setminus(0)$. Pertanto *se per tutte le funzioni $\bar{f}\in \mathcal{E}$ risulta:*

$$\|P_{\mathcal{K}}(\varpi\bar{f})^{\perp}\|^2_{L^2(M)} \leq [8(h+1)^2]^{-1}\ \|\bar{f}\|^2_{L^2(\bar{M})},$$

allora deve essere $N < k(h+1)$.

(5.1.5) OSSERVAZIONE. La dimensione ottimale N per cui valga (ii) va cercata fra kh+1 e k(h+1), infatti per N = kh è possibile dare il seguente controesempio.

(5.1.6) ESEMPIO. Siano $U_1,\dots,U_k$ aperti disgiunti in M tali che per ogni $i=1,\dots,k$, $\pi^{-1}(U_i)$ sia unione disgiunta di aperti $U_i^1,\dots,U_i^h$ in $\bar{M}$ (è $U_i^p=s_p(U_i)$ $\forall$ p=1,...,h). Se $\mathcal{K}$ è il sottospazio generato in $L^2(M)$ dalle funzioni caratteristiche degli U_i, per cui dim $\mathcal{K}$ = k, e se $\mathcal{E}$ è il sottospazio generato in $L^2(\bar{M})$ dalle funzioni caratteristiche degli U_i^p, allora dim $\mathcal{E}$ = N = kh, e chiaramente si ha:

$$\|P_{\mathcal{K}}(\varpi\bar{f})\|_{L^2(M)} = \|\bar{f}\|_{L^2(\bar{M})} \qquad \forall\, \bar{f}\in\mathcal{E}.$$

5.2. In questo n. 5.2 diamo la dimostrazione del teorema (5.1.3); a tal fine si utilizza il seguente risultato, dimostrato in [14]:

(5.2.1) LEMMA. *Se Q è una forma quadratica non negativa su $\mathbf{R}^N$, di rango $h\leq N$, indicata con (S^{N-1},can) la sfera unitaria di $\mathbf{R}^N$ munita della metrica canonica indotta, si ha:*

$$\left[(\mathrm{Vol}\, S^{N-1})^{-1}\int_{S^{N-1}} (Q(s))^{1/2}ds\right]^2 \leq [\gamma(h)/\gamma(N)]^2(\mathrm{Vol}\, S^{N-1})^{-1}\int_{S^{N-1}} Q(s)ds$$

dove $\gamma(x) = \sqrt{2/x}\,\dfrac{\Gamma((x+1)/2)}{\Gamma(x/2)}$, $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt.$

(5.2.2) OSSERVAZIONE. Il risultato del lemma è non banale se h<N in quanto la funzione γ è crescente.

Dimostrazione del teorema (5.1.3),(i). $\forall\, x\in M$ la forma quadratica Q_x definita su $\mathcal{E}$ ponendo

$$Q_x(\bar{f}) = [(\varpi\bar{f})(x)]^2$$

ha rango h, essendo h il numero di fogli del rivestimento. Applicando a Q_x il lemma (5.2.1), in cui S^{N-1} è la sfera unitaria di $\mathcal{E}$ rispetto alla norma di $L^2(\bar{M})$, ed integrando su M si ha:

$$\int_M \left[(\mathrm{Vol}\ S^{N-1})^{-1}\int_{S^{N-1}} (\varpi\bar{f})(x)ds\right]^2 dv_g(x) \leq$$

$$\leq \int_M \left(C(h,N)^2 (\mathrm{Vol}\ S^{N-1})^{-1}\int_{S^{N-1}} [(\varpi\bar{f})(x)]^2 ds\right) dv_g(x)$$

avendo posto $C(h,N) = \gamma(h)/\gamma(N)$. Per la diseguaglianza di Cauchy-Schwarz si ottiene:

$$\left[(\mathrm{Vol}\ S^{N-1})^{-1}\int_{S^{N-1}}\left(\int_M (\varpi\bar{f})(x)\ dv_g(x)\right)ds\right]^2 \leq$$

$$\leq C(h,N)^2\ \mathrm{Vol}\ M\ (\mathrm{Vol}\ S^{N-1})^{-1}\int_{S^{N-1}}\left[\int_M ((\varpi\bar{f})(x))^2 dv_g(x)\right]ds$$

cioè per la (5.1.2) ed essendo $||\bar{f}||^2_{L^2(\bar{M})} = 1$ su S^{N-1}:

$$\left[(\mathrm{Vol}\ S^{N-1})^{-1}\int_{S^{N-1}} ||\varpi\bar{f}||_{L^1(M)} ds\right]^2 \leq C(h,N)^2\ \mathrm{Vol}\ M$$

e quindi

$$||\varpi\bar{f}||_{L^1(M)} \leq C(h,N)\ (\mathrm{Vol}\ M)^{1/2}$$

per almeno una $\bar{f}\in S^{N-1}$, donde la conclusione, ove si osservi che per ogni $\bar{f}\in \mathcal{E}\backslash\{0\}$ è $\bar{f}/||\bar{f}||_{L^2(\bar{M})}\in S^{N-1}$ e che

$$\varpi(\bar{f}/||\bar{f}||_{L^2(\bar{M})}) = \varpi\bar{f}/||\bar{f}||_{L^2(\bar{M})} = \varpi\bar{f}/||\varpi\bar{f}||_{L^2(M)}$$

per le (5.1.1),(5.1.2). _|

Dimostrazione del teorema (5.1.3),(ii). Per semplificare i calcoli supponiamo di aver moltiplicato la misura canonica di S^{N-1} per un fattore tale che $\mathrm{Vol}\ S^{N-1} = 1$.

Consideriamo, per $\varepsilon > 0$, la variazione $(\varpi\bar{f})_\varepsilon$ di $\varpi\bar{f}$ data da:

$$(\varpi\bar{f})_\varepsilon(x) = ([(\varpi\bar{f})(x)]^2 + \varepsilon^2)^{1/2}.$$

Per $f\in L^2(M)$ arbitraria, l'applicazione $\Phi_{\varepsilon,f} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbf{R}$ definita da:

(5.2.3) $$\Phi_{\varepsilon,f}(\bar{f}) = \langle\langle f,(\varpi\bar{f})_\varepsilon\rangle\rangle_M$$

è differenziabile. Scelta infatti una base $(\bar{f}_1,...,\bar{f}_N)$ $L^2(\bar{M})$-ortonormale in $\mathcal{E}$

per cui $\bar{f} = \Sigma_i z^i \bar{f}_i$, i=1,...,N, risulta, indicando con s_p , p=1,...,ł

› funzioni di cui in 4.1:

$$[(\varpi\bar{f})(x)]^2 + \varepsilon^2 = \Sigma_p \Sigma_{i,j} z^i z^j \bar{f}_i(s_p(x))\bar{f}_j(s_p(x)) + \varepsilon^2$$

e quindi:

$$\left(\frac{\partial\phi_{\varepsilon,f}}{\partial z^r}\right)(\bar{f}) = \int_{\bar{M}} \frac{(f\circ\pi)(y)}{[(\varpi\bar{f})_\varepsilon\circ\pi](y)} \bar{f}(y)\bar{f}_r(y)\, dv_{\bar{g}}(y) = \left\langle\!\left\langle \frac{f\circ\pi}{(\varpi\bar{f})_\varepsilon\circ\pi} \bar{f}, \bar{f}_r \right\rangle\!\right\rangle_{\bar{M}} .$$

Pertanto

$$(\text{grad } \Phi_{\varepsilon,f})(\bar{f}) = [(f\circ\pi)/(\varpi\bar{f})_\varepsilon\circ\pi]\, \bar{f},$$

da cui

$$(5.2.4)\quad \|(\text{grad } \Phi_{\varepsilon,f})(\bar{f})\|^2_{L^2(\bar{M})} = \int_{\bar{M}}\Big(\big[(f\circ\pi)(y)/((\varpi\bar{f})_\varepsilon\circ\pi)(y)\big]\, \bar{f}(y)\Big)^2 dv_{\bar{g}}(y) =$$

$$= \int_M \Big(f(x)\, [(\varpi\bar{f})(x)/(\varpi\bar{f})_\varepsilon(x)]\Big)^2 dv_g(x) \leq$$

$$\leq \|f\|^2_{L^2(M)}.$$

Restringiamo da ora le nostre considerazioni a funzioni $\bar{f}$ appartenenti alla sfera S^{N-1} di $\mathscr{E}$. Indicando con $\nabla\Phi_{\varepsilon,f}(\bar{f})$ la componente di $(\text{grad } \Phi_{\varepsilon,f})(\bar{f})$ tangente ad S^{N-1} e con $(\nabla\Phi_{\varepsilon,f}(\bar{f}))^\perp$ la componente radiale lungo $\bar{f}\in S^{N-1}$, risulta:

$$(\nabla\Phi_{\varepsilon,f}(\bar{f}))^\perp = \langle\!\langle(\text{grad } \Phi_{\varepsilon,f})(\bar{f}),\bar{f}\rangle\!\rangle^2_{\bar{M}}\, \bar{f}$$

quindi

$$\|(\nabla\Phi_{\varepsilon,f}(\bar{f}))^\perp\|^2_{L^2(\bar{M})} = \langle\!\langle(\text{grad } \Phi_{\varepsilon,f})(\bar{f}),\bar{f}\rangle\!\rangle^2_{\bar{M}} = \langle\!\langle f,(\varpi\bar{f})^2/(\varpi\bar{f})_\varepsilon\rangle\!\rangle^2_M$$

e pertanto, tenuto conto di (5.2.4):

$$(5.2.5)\quad \|\nabla\Phi_{\varepsilon,f}(\bar{f})\|^2_{L^2(\bar{M})} = \|(\text{grad } \Phi_{\varepsilon,f})(\bar{f})\|^2_{L^2(\bar{M})} - \|(\nabla\Phi_{\varepsilon,f}(\bar{f}))^\perp\|^2_{L^2(\bar{M})} \leq$$

$$\leq \|f\|^2_{L^2(M)} - \langle\!\langle f,(\varpi\bar{f})^2/(\varpi\bar{f})_\varepsilon\rangle\!\rangle^2_M.$$

Poiché ϖ è pari: $\varpi(-\bar{f})=\varpi\bar{f}$, è pari anche $\Phi_{\varepsilon,f}$, e pertanto si puo' passare al quoziente di S^{N-1} rispetto all'applicazione antipodale; il principio del minimax (2.3.6) insieme alla diseguaglianza di Cauchy-Schwarz (ricordiamo che Vol $S^{N-1}=1$) dà quindi:

$$\lambda_1(P^{N-1}(\mathbf{R}))\left[\int_{S^{N-1}} (\Phi_{\varepsilon,f}(\bar{f}))^2 ds - \left(\int_{S^{N-1}} \Phi_{\varepsilon,f}(\bar{f}) ds\right)^2\right] \leq$$

$$\leq \int_{S^{N-1}} \|\nabla\Phi_{\varepsilon,f}(\bar{f})\|^2_{L^2(\bar{M})} ds$$

ove $\lambda_1(P^{N-1}(\mathbf{R}))$ è il primo autovalore non nullo dello spazio proiettivo $(P^{N-1}(\mathbf{R}),\mathrm{can})$, che vale 2N (cf. [4], p. 166). Pertanto, tenendo conto di (5.2.3) e (5.2.5) si ha, per $\varepsilon \longrightarrow 0$:

$$(2N+1)\int_{S^{N-1}} \langle\langle f,\varpi\bar{f}\rangle\rangle^2_M ds - 2N \left(\int_{S^{N-1}} \left[\int_M f(x)(\varpi\bar{f})(x) dv_g(x)\right] ds\right)^2 \leq \|f\|^2_{L^2(M)}$$

In altri termini abbiamo provato che per ogni $f\in L^2(M)$ risulta:

$$(5.2.6) \qquad (2N+1) \int_{S^{N-1}} \langle\langle f,\varpi\bar{f}\rangle\rangle^2_M ds \leq \|f\|^2_{L^2(M)} + 2N \langle\langle f,S\rangle\rangle^2_M$$

ove $\bar{f}$ percorre S^{N-1} e dove si è posto

$$(5.2.7) \qquad S(x) = \int_{S^{N-1}} (\varpi\bar{f})(x)\, ds.$$

Presa una base $(f_1,\ldots,f_k)$ $L^2(M)$-ortonormale in $\mathcal{K}$, applicando la (5.2.6) a ogni f_i e sommando per $i=1,\ldots,k$ si ha:

$$(5.2.8) \qquad (2N+1) \sum_i \int_{S^{N-1}} \langle\langle f_i,\varpi\bar{f}\rangle\rangle^2_M ds \leq k + 2N \sum_i \langle\langle f_i,S\rangle\rangle^2_M.$$

D'altra parte si ha:

$$\|P_{\mathcal{K}} S\|^2_{L^2(M)} = \sum_i \langle\langle f_i,S\rangle\rangle^2_M \leq \|S\|^2_{L^2(M)}$$

e, per il lemma (5.2.1),

$$\|S\|^2_{L^2(M)} = \int_M \left[\int_{S^{N-1}} (\varpi\bar{f})(x) ds\right]^2 dv_g(x) \leq$$

$$\leq C(h,N)^2 \int_M \left[\int_{S^{N-1}} [(\varpi\bar{f})(x)]^2 ds\right] dv_g(x).$$

Quindi in definitiva la (5.2.8) dà

$$(2N+1)\int_{S^{N-1}} \|P_{\mathcal{K}}(\varpi\bar{f})\|^2_{L^2(M)} ds \leq k + 2N\, C(h,N)^2 \int_{S^{N-1}} \|\varpi\bar{f}\|^2_{L^2(M)} ds =$$

$$= k + 2N\, C(h,N)^2.$$

Ricordando che $C(h,N) = \gamma(h)/\gamma(N)$, le proprietà della funzione γ comportano (cf. [14]) che $C(h,N)^2 \leq (2N+1/2N)(h/h+1)^{1/2}$; questa e l'ipotesi $N \geq k(h+1)$ danno allora dall'ultima diseguaglianza:

$$\int_{S^{N-1}} \|P_{\mathcal{K}}(\varpi \bar{f})\|^2_{L^2(M)}\, ds < 1 - [8(h+1)^2]^{-1}$$

e quindi la conclusione. _|

6. RISULTATI SPETTRALI SUI RIVESTIMENTI RIEMANNIANI.

6.1. Per una Varietà X indichiamo con $E^*_X(\mu^*)$ l'autospazio relativo all'autovalore $\mu^* \in \mathrm{Spec}^* X$ e con $N^*_X(\lambda)$ il numero degli autovalori μ^* tali che $\mu^* < \lambda$, $\lambda \in \mathbf{R}$ (* sta ad indicare il problema relativo ad una varietà chiusa se $\partial X = \emptyset$, il problema di Dirichlet se $\partial X \neq \emptyset$). Vogliamo dimostrare che, utilizzando le notazioni introdotte in 5.1 e sotto le ipotesi ivi considerate, risulta:

(6.1.1) TEOREMA. $\quad N^*_{\bar{M}}(\lambda) \leq N^*_M[8(h+1)^2\lambda](h+1) - 1.$

Dim. Consideriamo i seguenti spazi:

$\mathcal{E}^* = \oplus E^*_{\bar{M}}(\bar{\lambda}^*_i)$, la somma essendo estesa a tutti i $\bar{\lambda}^*_i < \lambda$: $\mathcal{E}$ è un sottospazio vettoriale di $L^2(\bar{M})$ di dimensione $N^*_{\bar{M}}(\lambda)$;

$\mathcal{K}^* = \oplus E^*_M(\lambda^*_i)$, somma per $\lambda^*_i < 8(h+1)^2\lambda$: $\mathcal{K}$ è un sottospazio vettoriale di $L^2(M)$ di dimensione $N^*_M[8(h+1)^2\lambda]$.

Le forme quadratiche $\|df\|^2_{L^2(M)}$, $\|d\bar{f}\|^2_{L^2(\bar{M})}$ (i cui spettri coincidono con $\mathrm{Spec}^* M$ e $\mathrm{Spec}^* \bar{M}$ rispettivamente, v. 2.3) sui sottospazi $H^1{}_*(M)$ di $L^2(M)$ e $H^1{}_*(\bar{M})$ di $L^2(\bar{M})$ sono tali che:

$$\|d(\varpi \bar{f})\|^2_{L^2(M)} \leq \|d\bar{f}\|^2_{L^2(\bar{M})},$$

come si prova in modo analogo a quello usato per dimostrare la (4.1.3) (si