(i) $\Gamma^* = \Lambda(E_*) = \Lambda(E_*')$;

(ii) tutti gli elementi dello spettro situati nell'intervallo $[0,\Gamma^*[$ sono autovalori di molteplicità finita e la loro successione coincide con la parte degli spettri di E_* e di E_*' che sono contenute in $[0,\Gamma^*[$.

3. SPETTRO E CAPACITA'.

3.1. Sia (M,g) una varietà riemanniana compatta connessa senza bordo e sia $A \subset M$ un sottoinsieme qualsiasi. Indichiamo con $H^1{}_0(M\backslash A)$ il completamento in $H^1(M)$ di

$K^1{}_0(M\backslash A) = \{f \in H^1(M) \mid \exists$ un aperto U di M contenente A per cui $f|_U = 0\}$.

Allora lo <u>*spettro di Dirichlet*</u> di $M\backslash A$ è lo spettro della forma quadratica E_A restrizione ad $H^1{}_0(M\backslash A)$ di $E(f) = \|df\|^2{}_{L^2(M)}$ (cf. 2.2); tale spettro, che indicheremo con $\mathrm{Spec}^D(M\backslash A)$, è discreto (in quanto l'inclusione di $H^1{}_0(M\backslash A)$ in $L^2(M)$ è compatta) e si accumula a $+\infty$ se $H^1{}_0(M\backslash A)$ è di dimensione infinita.

Si noti che se A è compatto la definizione di $H^1{}_0(M\backslash A)$ coincide, come si puo' vedere p. es. in [10], con quella classica di completamento di

$C^\infty{}_0(M\backslash A) = \{f \in C^\infty(M) \mid$ f a supporto compatto contenuto nell'interno di $M\backslash A\}$; quest'ultima definizione risulta pero' troppo restrittiva escludendo per esempio il caso in cui A sia un insieme misurabile denso di punti di M, perché in tal caso risulterebbe $C^\infty{}_0(M\backslash A) = \{0\}$ e $\mathrm{Spec}^D(M\backslash A)$ sarebbe vuoto, contrariamente allo spettro sopra definito (cf. [10]).

3.2. Definito $\mathrm{Spec}^D(M\setminus A)$, ci si chiede quale sia la condizione ottimale su A affinché esso coincida con Spec M: risulta, come vedremo, che l'invariante associato ad A che permette di stabilire con il suo annullarsi tale eguaglianza, è la <u>*capacità.*</u>

(3.2.1) DEFINIZIONE. *Per $u \in H^1(M)$ si definisce la u-capacità di A come*

$$\mathrm{cap}\,(A,u) = \inf E(f)$$

al variare di f nell'insieme $S_{A,u}$ ove

(3.2.2) $\quad S_{A,u} = \{f \in H^1(M) \mid \int_M f = 0\,,\ f-u \in H^1{}_0(M\setminus A)\}$;

se $S_{A,u} = \emptyset$, si pone per definizione cap (A,u) = $+\infty$. Nel caso $u = 1_M$, funzione costante uguale ad 1 su M, la 1-capacità si dice brevemente capacità di A e si indica con cap A (ad esempio cap M = cap(M,1) = $+\infty$).

L'estremo inferiore che compare nella definizione di cap (A,u) è in realtà raggiunto, infatti si ha:

(3.2.3) PROPOSIZIONE. *Per ogni $u \in H^1(M)$ esiste una ed una sola funzione $u^A \in S_{A,u}$ tale che*

$$\mathrm{cap}\,(A,u) = E(u^A);$$

risulta in particolare $u - u^A \in H^1{}_0\,(M\setminus A)$.

Dim. Sia cap A < $+\infty$, quindi $S_{A,1} \neq \emptyset$: risulta allora $S_{A,u} \neq \emptyset\ \forall\ u \in H^1(M)$ in quanto se $v \in S_{A,1}$ si ha

$$\left[\int_M u\right]\cdot(v-1) \in H^1{}_0(M\setminus A)$$

e quindi

$$u - \left[\int_M u\right]\cdot(v-1) \in S_{A,u}.$$

Inoltre $S_{A,u}$ è un sottospazio affine chiuso dello spazio di Hilbert $\overline{H}^1(M) =$

$= \{f \in H^1(M) \mid \int_M f = 0\}$ munito della norma

$$\overline{|||f|||}^2 = \int_M |df|^2;$$

la direzione S_A di $S_{A,u}$ è indipendente da u ed è $S_A = H^1{}_0(M\backslash A) \cap \bar{H}^1(M)$.

Allora cap (A,u) non è che la distanza in norma $\overline{|||\;|||}$ di 0 da $S_{A,u}$ e

cap (A,u) $= \int_M |du^A|^2$ dove u^A è la proiezione ortogonale di 0 su $S_{A,u}$ in $\bar{H}^1(M)$. _|

Con le notazioni precedentemente introdotte, abbiamo poi:

(3.2.4) PROPOSIZIONE. *Siano* $u,u' \in H^1(M)$; *allora:*

1) $S_{A,u} = S_{A,u'} \Leftrightarrow u - u' \in H^1{}_0(M\backslash A)$;

2) $u - u' \in H^1{}_0(M\backslash A) \Leftrightarrow u^A = u'^A$ e cap (A,u) = cap (A,u');

3) $u \in H^1{}_0(M\backslash A) \Leftrightarrow u^A = 0 \Leftrightarrow$ cap (A,u) = 0.

Dim. 1) Sia $f \in S_{A,u} = S_{A,u'}$: allora $f - u \in H^1{}_0(M\backslash A)$ e $f - u' \in H^1{}_0(M\backslash A)$, quindi per differenza $u - u' \in H^1{}_0(M\backslash A)$. Viceversa se $u - u' \in H^1{}_0(M\backslash A)$, sia $f \in S_{A,u}$: per definizione è $\int_M f = 0$ e $f - u \in H^1{}_0(M\backslash A)$. Ma allora $f - u' = (f - u) + (u - u')$ appartiene ad $H^1{}_0(M\backslash A)$ e quindi $f \in S_{A,u'}$, ossia abbiamo provato che $S_{A,u} \subset S_{A,u'}$. Analogamente si prova che $S_{A,u'} \subset S_{A,u}$.

2) e 3) sono allora una conseguenza immediata della proposizione (3.2.3)._|

(3.2.5) OSSERVAZIONE. Si puo' dimostrare (cf. [10]) che la capacità da noi introdotta è una capacità regolare nel senso di CHOQUET, [9], p. 154.

Vogliamo ora dimostrare·

(3.2.6) PROPOSIZIONE. cap A = 0 $\Leftrightarrow$ cap (A,f) = 0 $\forall\ f \in H^1(M)$.

A tal fine premettiamo il seguente lemma.

(3.2.7) LEMMA. *Se* $f \in C^\infty(M)$ *e* $\{v_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ *è una successione di* $H^1(M)$ *convergente a 0, allora* $\{fv_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ *converge a 0.*

Dim. Si ha:

$$\|fv_n\|^2_{H^1(M)} = \int_M f^2 v_n^2 + \int_M |df|^2 v_n^2 + \int_M |dv_n|^2 f^2 + 2\int_M f v_n\, g^d(df, dv_n);$$

posto $F = \|f\|_{L^\infty}$ ed $G = \|df\|_{L^\infty}$, risulta allora:

$$\|fv_n\|^2_{H^1(M)} \leq (F^2 + G^2)\, \|v_n\|^2_{L^2} + F^2 \|dv_n\|^2_{L^2} + 2FG\, \|v_n\|_{L^2} \cdot \|dv_n\|_{L^2} \leq$$
$$\leq (2F^2 + G^2 + 2FG)\, \|v_n\|^2_{H^1(M)}$$

donde la conclusione. _|

Dim. della proposizione (3.2.6). Basta dimostrare che cap A = 0 implica cap(A,f) = 0 $\forall$ f $\in$ $H^1(M)$. Per la 3) della proposizione (3.2.4), cap A = 0 equivale a 1 $\in$ $H^1{}_0(M \setminus A)$; per definizione di $H^1{}_0(M \setminus A)$ esistono allora una successione $\{u_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ in $H^1(M)$ ed una successione $\{U_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ di aperti di M contenenti A tali che:

$$u_{n|U_n} = 0 \quad \text{e} \quad 1 = \lim_n u_n \quad \text{per } n \longrightarrow \infty.$$

Presa $f \in C^\infty(M)$, la funzione fu_n di $H^1(M)$ è nulla su U_n ed appartiene dunque ad $H^1{}_0(M \setminus A)$; applicando il lemma (3.2.7) alla successione $\{1 - u_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ si ha per $n \longrightarrow \infty$:

$$\lim_n f \cdot (1 - u_n) = 0 \quad \text{cioè} \quad f = \lim_n fu_n$$

e pertanto $f \in H^1{}_0(M \setminus A)$ il che comporta, sempre per la 3) della proposizione (3.2.4), cap (A,f) = 0. Si è così dimostrato che

$$\text{cap } A = 0 \;\Rightarrow\; \text{cap } (A,f) = 0 \quad \forall f \in C^\infty(M).$$

La densità di $C^\infty(M)$ in $H^1(M)$ e la continuità dell'applicazione di $H^1(M)$ in **R** che manda f in cap (A,f) permettono poi di concludere che cap(A,f) = 0 $\forall$ $f \in H^1(M)$. _|

Dalla proposizione (3.2.6) e dalla 3) della propôsizione (3.2.4) si ha subito il seguente risultato:

(3.2.8) COROLLARIO. cap A = 0 $\Leftrightarrow$ $H^1{}_0(M \setminus A) = H^1(M)$.

3..3. Siamo ora in grado di dimostrare il risultato sulla coincidenza di $\mathrm{Spec}^D(M\backslash A)$ con Spec M, precisamente che:

(3.3.1) TEOREMA. $\lambda_i(M) = \lambda_i{}^D(M\backslash A) \quad \forall\, i\in \mathbf{N}^* \iff \mathrm{cap}\, A = 0$.

Dim . Se $\lambda_i{}^D(M\backslash A) = \lambda_i(M) \quad \forall\, i\in \mathbf{N}^*$, le autofunzioni associate agli autovalori $\lambda_i{}^D(M\backslash A)$ sono necessariamente uguali, per la caratterizzazione variazionale degli autospazi tramite il principio del minimax, alle autofunzioni degli autovalori $\lambda_i(M)$, quindi $H^1{}_o(M\backslash A) = H^1(M)$ e per la (3.2.8), cap $A = 0$.

Viceversa, sempre per (3.2.8), cap $A = 0$ implica $H^1{}_o(M\backslash A) = H^1(M)$ che a sua volta implica $\lambda_i{}^D(M\backslash A) = \lambda_i(M) \quad \forall\, i\in \mathbf{N}^*$. _|

Questo risultato, ottenuto da RAUCH e TAYLOR, [17], per A compatto di $\mathbf{R}^n$ e da CHAVEL e FELDMAN, [8], e COURTOIS, [10], nel caso attuale, permette di dimostrare in particolare che ogni sottovarietà N di M compatta senza bordo di codimensione ≥ 2, avendo capacità nulla (per la dimostrazione, essenzialmente tecnica, v. ad es. [10]), è tale che $\mathrm{Spec}^D(M\backslash N) = \mathrm{Spec}\, M$. Osserviamo inoltre che cap $A = 0$ implica Vol $A = 0$.

Concludiamo questa parte richiamando il seguente risultato, per la cui dimostrazione rimandiamo p. es. a [10].

(3.3.2) TEOREMA. *Sia $\{A_n\}_{n\in \mathbf{N}}$ una successione di parti di M. Allora le seguenti proprietà sono equivalenti:*

1) $\lim_n \mathrm{cap}\, A_n = 0$;

2) $\lim_n \lambda_i{}^D(M\backslash A) = \lambda_i(M) \quad \forall\ i = 0,1,2,\dots$;

3) $\lim_n \lambda_o{}^D(M\backslash A) = 0$.