connessa compatta senza bordo M: definita la capacità di A vedremo che tale spettro coincide con quello di M se e solo se A ha capacità nulla (riferimenti: CHAVEL e FELDMAN, [8], e COURTOIS, [10]).

Considerato quindi un rivestimento riemanniano ramificato ad h fogli $\pi: (\overline{M},\overline{g}) \longrightarrow (M,g)$ vedremo nel n. 4 che se l'insieme $\overline{A}\subset\overline{M}$ dei punti di ramificazione ha capacità nulla, allora anche $A = \pi(\overline{A})$ e $\pi^{-1}(A)$ hanno capacità nulla: unitamente alle considerazioni del n. 3 cio' permetterà di ricondursi al caso di un rivestimento riemanniano non ramificato di varietà a bordo.

Nei nn. 5 e 6 dimostreremo il risultato principale sullo spettro dei rivestimenti riemanniani per i quali cap A = 0, A chiuso:

(1.3.1) $$\overline{\lambda}^*_{i(h+1)} > [8(h+1)^2]^{-1}\lambda^*_{i+1}$$

ove * sta ad indicare che ci si riferisce allo spettro di Dirichlet nel caso di varietà a bordo; inoltre si vedrà facilmente che la diseguaglianza di Kato-Tysk (1.1.2) vale ancora sotto l'ipotesi cap A = 0, A chiuso, meno restrittiva dell'ipotesi codim $\overline{A} \geq 2$.

Concluderemo nel n. 7 con un'applicazione geometrica: la stima dell'indice di una superficie minimale di $\mathbf{R}^3$ tramite la curvatura totale. Per quel che riguarda le superficie minimali, un'esauriente trattazione si può trovare nel libro [16] di LAWSON.

2. SPETTRO DI UNA VARIETA'. CARATTERIZZAZIONE VARIAZIONALE DEGLI AUTOVALORI.

2.1. Sia (M,g) una varietà riemanniana connessa, compatta, con o senza bordo. L'<u>*operatore di Laplace-Beltrami*</u> Δ_M o ꞏrevemente Δ se non vi è possibilità di confusione, è un operatore differenz ꞏeare del 2°

ordine: $\Delta: C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$

definito da:

(2.1.1) $\Delta f = -\mathrm{Div}(\mathrm{grad}\ f)$.

Il _problema spettrale_ consiste nella ricerca degli autovalori e delle autofunzioni di Δ, con opportune condizioni al contorno se $\partial M \neq \emptyset$; precisamente si hanno i seguenti problemi:

1) $\Delta f = \lambda f$, se $\partial M = \emptyset$ (_problema di una varietà chiusa_);

2) $\Delta f = \lambda f$ su $M \backslash \partial M$, $f = 0$ su ∂M , se $\partial M \neq \emptyset$ (_problema di Dirichlet_);

3) $\Delta f = \lambda f$ su $M \backslash \partial M$, $\nu \cdot f = 0$ su ∂M , se $\partial M \neq \emptyset$ (_problema di Neumann_),

ove ν è il campo dei versori normali a ∂M orientati verso l'interno.

In ciascuno di questi problemi, il risultato fondamentale è espresso dal seguente teorema (cf. [2], p. 53):

(2.1.2) TEOREMA. *Nei casi 1),2),3) si ha:*

(i) gli autovalori costituiscono una successione crescente divergente positivamente:

$$0 \leq \beta_0 < \beta_1 < \beta_2 < \ldots\ldots \uparrow +\infty ;$$

(ii) ogni autovalore β_i ha molteplicità finita, ossia il corrispondente autospazio $E(\beta_i)$ ha dimensione finita, e autospazi relativi ad autovalori distinti sono $L^2(M)$ -ortogonali (1)*;*

---

(1) $L^2(M)$ è lo spazio delle funzioni f misurabili su M tali che

$$\int_M |f(x)|^2\, dv_g(x) < +\infty ,$$

ove v_g è la misura canonica su (M,g): $L^2(M)$ è lo spazio di Hilbert completamento di $C^\infty(M)$ rispetto al prodotto scalare

$$\langle\langle f_1,f_2 \rangle\rangle_M = \int_M f_1(x) f_2(x)\, dv_g(x) ;$$

indichiamo con $\|f\|_{L^2(M)} = \langle\langle f,f \rangle\rangle_M^{1/2}$ la norma indotta da esso. Nel seguito, ove non vi sia possibilità di confusione, scriveremo più brevemente $\langle\langle f_1,f_2 \rangle\rangle = \int_M f_1 f_2$ e $\|f\|_{L^2(M)} = \int_M f^2$.

(iii) la somma diretta degli autospazi $E(\beta_i)$, $i \in \mathbf{N}^*$, è densa in $L^2(M)$ rispetto alla topologia della norma L^2 ed è densa in $C^k(M)$ per la topologia della convergenza uniforme C^k, $k=0,1,2,\dots$.

Osserviamo esplicitamente (v. [13] oppure [2]) che il primo autovalore ha molteplicità 1; nei casi 1) e 3), $\beta_0 = 0$ e le corrispondenti autofunzioni sono le funzioni costanti su M.

Nel seguito indicheremo gli autovalori del problema 1) con

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots \uparrow +\infty \tag{2.1.3}$$

intendendo di ripetere ciascun autovalore un numero di volte pari alla sua molteplicità; tale successione si dice *spettro* di M e si indica con Spec M (o con Spec^C M per uniformità di linguaggio). Analogamente si definiscono lo *spettro di Dirichlet* Spec^D M e lo *spettro di Neumann* Spec^N M.

Alla successione (2.1.3) si può associare una famiglia di autofunzioni $\{\phi_i\}_{i \in \mathbf{N}^*}$ del corrispondente problema spettrale; la terza asserzione del teorema (2.1.2) mostra che $\{\phi_i\}_{i \in \mathbf{N}^*}$ è una base ortonormale di $L^2(M)$.

Diamo ora un'idea della dimostrazione del teorema (2.1.2); per maggiori dettagli rinviamo a [2] e [18], vol.II.

Dim . Si considerino, relativamente ai problemi spettrali enunciati, gli spazi $C^\infty{}_*(M)$, $* = C,D,N$, definiti da:

1) $C^\infty{}_C(M) = C^\infty(M)$;

2) $C^\infty{}_D(M) = C^\infty{}_0(M) = \{ f \in C^\infty(M) \mid f$ a supporto compatto in $M \setminus \partial M\}$;

3) $C^\infty{}_N(M) = \{ f \in C^\infty(M) \mid \nu \cdot f = 0)$;

essi sono sottospazi di $C^\infty(M)$ *densi* ma non completi in $L^2(M)$. Per un teorema classico di teoria spettrale (cf. [18] cap. X) l'operatore Δ ristretto a $C^\infty{}_*(M)$ ha una unica estensione come operatore autoaggiunto non limitato Δ' su un opportuno sottospazio $H^1{}_*(M)$ di $L^2(M)$ contenente $C^\infty{}_*(M)$. La positività di Δ implica la positività di Δ' e quindi che lo spettro di Δ' è contenuto in $\mathbf{R}^*{}_+$ (v. anche i successivi 2.2 e 2.3). La compattezza di M implica che l'inclusione di $H^1{}_*(M)$ in $L^2(M)$ è compatta(2). Il teorema fondamentale segue allora da risultati classici della teoria spettrale degli operatori compatti e dall'*ellitticità* di Δ. _|

2.2. Sia Q una forma quadratica definita su un sottospazio W denso dello spazio di Hilbert $(H, \|\ \|)$ semi-limitata nel senso che $\exists\ c \in \mathbf{R}$ tale che

$$\forall\ \mathbf{w} \in W\ ,\quad Q(\mathbf{w}) \geq c\|\mathbf{w}\|^2.$$

(2.2.1) DEFINIZIONE. *Le successioni crescenti di $[c,+\infty)$ definite da:*

$$\mu_i(Q) = \sup\ \inf Q(\mathbf{w}) \text{ per } w \perp E_{k-1},\ \|\mathbf{w}\| = 1,$$

$$\nu_i(Q) = \inf\ \sup Q(\mathbf{w}) \text{ per } w \in E_k\ ,\ \|\mathbf{w}\| = 1,$$

ove E_j descrive l'insieme dei sottospazi j-dimensionali di W, coincidono (v. teor. XIII.1 di [18]) e si dicono spettro della forma quadratica Q.

Poniamo $\Lambda(Q) = \sup \operatorname{Spec} Q$ e $N_Q(\lambda)$ = numero dei valori dello spettro di Q che sono strettamente inferiori a λ , $\lambda \in \mathbf{R}$.

Ricordiamo che (cf. [18] vol. I, cap. VIII, in particolare teor. VIII.15, e vol. II, cap. 10, teor. X.23) se T è un operatore simmetrico positivo definito su un dominio $D(T) \subset H$ denso in H e se Q è la forma quadratica associata a T:

(2.2.2) $$Q(\mathbf{v},\mathbf{w}) = \langle T\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle \qquad \forall\ \mathbf{v}\ ,\ \mathbf{w} \in D(T),$$

---

(2)Un'applicazione $F: (H_1, \|\ \|_1) \longrightarrow (H_2, \|\ \|_2)$ di spazi di Hilbert si dice compatta se l'immagine tramite F di un sottoinsieme limitato di H_1 è relativamente compatta in H_2.

(Q è semilimitata con $c = 0$), allora Q è chiudibile e la sua chiusura Q' è la forma quadratica di un unico operatore autoaggiunto T', il quale a sua volta è l'unica estensione di T il cui dominio è contenuto nel dominio della forma Q'; lo spettro di T' coincide con quello di Q. T' si dice l'*estensione di Friedrichs* di T o anche di Q rispetto al dominio $D(T)$.

2.3. Indichiamo con g^d la metrica duale di g. La forma quadratica E_* definita su $C^\infty{}_*(M)$, $* = C,D,N$, da

$$E_*(f) = \int_M g^d(df,df) \tag{2.3.1}$$

si dice *integrale di Dirichlet o dell'energia* ; indicheremo tale forma anche con $\int_M |df|^2$ o con $\|df\|^2_{L^2(M)}$. E_* è la forma quadratica dell'operatore positivo simmetrico Δ.

Lo spazio di Sobolev $H^1{}_*(M)$ è il completamento di $C^\infty{}_*(M)$ in $L^2(M)$ rispetto alla norma

$$\|f\|^2_{H^1} := \|f\|^2_{L^2} + \|df\|^2_{L^2}. \tag{2.3.2}$$

Le inclusioni di $(H^1{}_*(M), \|\ \|_{H^1})$ in $(L^2(M), \|\ \|_{L^2})$ sono compatte ed E_* si estende canonicamente ad una forma quadratica chiusa E'_* su $H^1{}_*(M)$ associata all'operatore autoaggiunto Δ', estensione di Friedrichs di Δ. Gli spettri di Δ, E_*, E'_* coincidono: abbiamo precisamente le seguenti caratterizzazioni variazionali degli autovalori.

Per $f \in H^1{}_*(M)\setminus\{0\}$ definiamo il *quoziente di Rayleigh* $R(f)$ come:

$$R(f) = \|df\|^2_{L^2}/\|f\|^2_{L^2}. \tag{2.3.3}$$

Sia $\{\phi_i\}_{i \in \mathbf{N}^*}$ una base ortonormale di autofunzioni di Δ in $L^2(M)$, ciascuna ϕ_i essendo relativa all'autovalore $\lambda_i \in \mathrm{Spec}^* M$; allora (*I caratterizzazione variazionale degli autovalori*):

(2.3.4) $\lambda_i = \inf \{R(f) \mid f \neq 0, \langle\langle f,\phi_0 \rangle\rangle_M = 0, \ldots, \langle\langle f,\phi_{i-1} \rangle\rangle_M = 0\}$

dove $f \in H^1{}_*(M)$ o equivalentemente $f \in C^\infty{}_*(M)$. Inoltre se $\lambda_i = R(f)$ ed $f \in H^1{}_*(M)$ è L^2-ortogonale a $\phi_0, \ldots, \phi_{i-1}$, allora f è un'autofunzione relativa a λ_i (il viceversa essendo ovvio).

La *II e III caratterizzazione variazionale degli autovalori* sono note come *principio del minimax* e sono espresse da (cf. 2.2):

(2.3.5) $\lambda_i = \sup \inf R(f)$ per $f \neq 0$, $f \perp E_{i-1}$

e rispettivamente:

(2.3.6) $\lambda_i = \inf \sup R(f)$ per $f \in E_i \setminus \{0\}$

al variare di E_k fra i sottospazi di dimensione k di $H^1{}_*(M)$ oppure di $C^\infty{}_*(M)$.

Le autofunzioni ϕ_i sono in $L^2(M)$; risultati classici di teoria di regolarità delle soluzioni deboli dei problemi *ellittici* assicurano poi che gli autospazi e le autofunzioni sono in $C^\infty{}_*(M)$ (cf. ad es. [2] cap. III, ove sono dimostrate in dettaglio anche le caratterizzazioni variazionali).

(2.3.7) OSSERVAZIONE. Su una varietà (M,g) non compatta, con o senza bordo, oppure con singolarità per la metrica g, $\mathrm{Spec}^* M$ è per definizione l'insieme dei $\lambda \in \mathbf{R}$ tali che $(\Delta - \lambda \cdot \mathrm{Id})$, considerato come operatore di $D^*{}_2 =$ ={completamento di $C^\infty{}_*$ per la norma $\|f\|_{H^2(M)} = \|f\|_{L^2(M)} + \|\Delta f\|_{L^2(M)}$ in $L^2(M)$}, non ammette operatore inverso limitato. Tale spettro si decompone in due parti: lo "spettro discreto", costituito dai punti isolati dello spettro che sono autovalori di molteplicità infinita, ed il suo complementare detto "spettro essenziale". I rapporti con le forme quadratiche E_* ed E_*' sono precisati nel seguente teorema (cf. p. es. [12], [14] e [18] teor. XIII.1):

(2.3.8) TEOREMA. *Indicando con $\Gamma^* = \Gamma(\Delta, C^\infty{}_*(M))$ l'estremo inferiore dello spettro essenziale si ha:*

(i) $\qquad \Gamma^* = \Lambda(E_*) = \Lambda(E_*')$;

(ii) tutti gli elementi dello spettro situati nell'intervallo $[0,\Gamma^*[$ sono autovalori di molteplicità finita e la loro successione coincide con la parte degli spettri di E_* e di E_*' che sono contenute in $[0,\Gamma^*[$.

3. SPETTRO E CAPACITA'.

3.1. Sia (M,g) una varietà riemanniana compatta connessa senza bordo e sia $A \subset M$ un sottoinsieme qualsiasi. Indichiamo con $H^1{}_0(M \setminus A)$ il completamento in $H^1(M)$ di

$K^1{}_0(M\setminus A) = \{f \in H^1(M) \mid \exists$ un aperto U di M contenente A per cui $f|_U = 0\}$.

Allora lo <u>*spettro di Dirichlet*</u> di $M\setminus A$ è lo spettro della forma quadratica E_A restrizione ad $H^1{}_0(M\setminus A)$ di $E(f) = \|df\|^2{}_{L^2(M)}$ (cf. 2.2); tale spettro, che indicheremo con $\mathrm{Spec}^D(M\setminus A)$, è discreto (in quanto l'inclusione di $H^1{}_0(M\setminus A)$ in $L^2(M)$ è compatta) e si accumula a $+\infty$ se $H^1{}_0(M\setminus A)$ è di dimensione infinita.

Si noti che se A è compatto la definizione di $H^1{}_0(M\setminus A)$ coincide, come si puo' vedere p. es. in [10], con quella classica di completamento di

$C^\infty{}_0(M\setminus A) = \{f \in C^\infty(M) \mid$ f a supporto compatto contenuto nell'interno di $M\setminus A\}$; quest'ultima definizione risulta pero' troppo restrittiva escludendo per esempio il caso in cui A sia un insieme misurabile denso di punti di M, perché in tal caso risulterebbe $C^\infty{}_0(M\setminus A) = \{0\}$ e $\mathrm{Spec}^D(M\setminus A)$ sarebbe vuoto, contrariamente allo spettro sopra definito (cf. [10]).