PREMESSA

Queste note riflettono ed ampliano il contenuto di alcuni seminari da me svolti all'Università degli Studi di Lecce nell'aprile 1988. Gli argomenti esposti riguardano lo spettro di spazi fibrati e costituiscono lo sviluppo di uno studio iniziato durante un mio soggiorno presso l'Università di Chambery e l'Institut Fourier dell'Università di Grenoble effettuato dalla metà di settembre alla metà di dicembre del 1987.

Nella prima parte di questo lavoro ho cercato (n.1) di mettere a fuoco lo stato della ricerca alla fine del 1987 sulle questioni riguardanti i legami fra lo spettro dello spazio totale di una fibrazione (fibrati vettoriali, submersioni e rivestimenti riemanniani) e lo spettro della varietà base, nonché di indicare (nn. 2 e 3) gli strumenti principali che si utilizzano in questo tipo di studi. La seconda parte consiste (nn. 4,5 e 6) nella esposizione dei risultati da me ottenuti per rivestimenti riemanniani ramificati e (n. 7) in un'applicazione alle superficie minimali di R3. Tali risultati sono stati oggetto di una relazione [6] da me tenuta all'International Conference on Differential Geometry and Applications svoltasi nel giugno-luglio 1988 a Dubrovnik, Yugoslavia.

Colgo l'occasione per esprimere il mio ringraziamento al Prof. S. Gallot dell'Università di Chambery per le stimolanti conversazioni avute e per il suo incoraggiamento, nonché ai Proff. G. BeSson e G. Courtois con i quali ho avuto proficui scambi di idee in occasione della mia permanenza all'Institut Fourier.

Ringrazio altresì i colleghi dell'Università di Lecce dell'invito rivoltomi, ed in particolare il Prof. G. De Cecco per la più che amichevole accoglienza.

Questo lavoro è stato finanziato dal Ministero della Pubblica Istruzione, fondi del 60% e 40%.

Grenoble, dicembre 1988

INDICE

1. SPETTRO DI FIBRATI VETTORIALI, RIVESTIMENTI E SUBMERSIONI RIEMANNIANI.

1.1. Data una varietà riemanniana connessa compatta senza bordo (M,g) di dimensione n, indichiamone con $\Delta = \Delta_M$ l'operatore di Laplace-Beltrami e con Spec $M = \{\lambda_i\}_{i\in \mathbf{N}^*}$, $\mathbf{N}^* = \mathbf{N} \cup \{0\}$, l'insieme degli autovalori di Δ. Consideriamo le seguenti fibrazioni su M:

a) un fibrato vettoriale riemanniano $\pi: E \longrightarrow M$ di rango h, dotato di connessione D;

b) un rivestimento riemanniano ad h fogli $\pi: (\overline{M},\overline{g}) \longrightarrow (M,g)$;

c) una submersione riemanniana $\pi: (\overline{M},\overline{g}) \longrightarrow (M,g)$.

Nello spirito del "problema inverso" della geometria spettrale, che consiste nel cercare di ricavare informazioni geometriche dalla conoscenza dello spettro di una varietà, è naturale chiedersi quali legami possano stabilirsi fra lo spettro di uno spazio fibrato e lo spettro della sua base M. In questo contesto si possono cercare risultati di due tipi:

I. Risultati asintotici, concernenti cioè la traccia $Z_M(t) = \sum_{0}^{\infty}{}_i e^{-\lambda_i t}$ dell'operatore $e^{-\Delta t}$ e quella corrispondente per lo spazio totale;

II. Risultati sui singoli autovalori.

Il problema I è stato risolto da vari autori con lo stabilire <u>*diseguaglianze alla Kato*</u> ; precisamente, con riferimento ai tre casi presi in considerazione:

a) Se si indica con $\overline{\Delta} = D^*D$ il cosiddetto "laplaciano bruto" agente sulle sezioni del fibrato $\pi : E \longrightarrow M$, e con $\{\overline{\lambda}_i\}_{i\in \mathbf{N}^*}$ i suoi autovalori, posto $\overline{Z}(t) = \sum_{0}^{\infty}{}_i e^{-\overline{\lambda}_i t}$ si ha (HESS, SCHRADER e UHLENBROCK, [15], 1980):

(1.1.1) $\qquad \bar{Z}_E(t) \leq \bar{Z}_{M\times\mathbf{R}^h}(t) = hZ_M(t) \quad \forall\, t > 0,$

ove $M\times\mathbf{R}^h$ indica il fibrato banale di rango h su M. Osserviamo esplicitamente che $\bar{\Delta}$ ha spettro discreto, contrariamente all'operatore di Laplace-Beltrami Δ_E (E non è compatto!); numerose proprietà geometriche di E possono però essere ricavate già dalla considerazione di $\bar{\Delta}$ (cf. [3] e [14]).

b) Indicato con $\bar{A}\subset\bar{M}$ l'insieme dei punti di ramificazione del rivestimento ad h fogli $\bar{M}$ di M, se codim $\bar{A} \geq 2$ si ha (TYSK, [19], 1986):

(1.1.2) $\qquad Z_{\bar{M}}(t) \leq hZ_M(t) \quad \forall\, t > 0.$

c) Se π: $(\bar{M},\bar{g}) \longrightarrow (M,g)$ è una submersione riemanniana *a fibre totalmente geodetiche* e si indica con F la fibra tipo, allora (BERARD e GALLOT, [3], 1983 e, per via diversa, BESSON, [5], 1986):

(1.1.3) $\qquad Z_{\bar{M}}(t) \leq Z_{M\times F}(t) = Z_M(t)\cdot Z_F(t) \qquad \forall\, t > O$

ove l'eguaglianza si ha se e solo se la submersione è quella banale MxF.

Osserviamo che i risultati richiamati permettono la stima di un numero finito di autovalori di una delle due varietà prese in considerazione di volta in volta, solo a partire dalla conoscenza dell'intero spettro dell'altra.

1.2. La situazione si presenta ben diversa quando si vuole confrontare i singoli autovalori degli spettri in esame.

Nel caso a) GALLOT e MEYER hanno dimostrato ([14], 1987) che $\forall\, i\in\mathbf{N}$ si ha:

(1.2.1) $\qquad \bar{\lambda}_{i(h+1)} \geq [8(h+1)^2]^{-1}\lambda_{i+1}$

essendo h il rango del fibrato.

Nel caso di una submersione riemanniana a fibre totalmente geodetiche sono noti solo risultati parziali (BERARD-BERGERY e BOURGUIGNON, [1], 1982), in base ai quali un autovalore dello spazio totale è sempre somma di un autovalore della fibra e di un autovalore del cosiddetto "laplaciano orizzontale" (il cui spettro in generale contiene lo spettro della base ma non coincide con esso); non si sa però quali fra tali somme siano effettivamente ammissibili, dipendendo tale scelta dalla geometria delle varietà. Ancor meno è noto nel caso che le fibre siano varietà minimali dello spazio totale.

Per quanto riguarda il caso b) del quale ci occuperemo in particolare, dimostreremo nel n. 6 una diseguaglianza generale fra gli autovalori del rivestimento $\bar{M}$ e quelli della base M. Rimandando al successivo 1.3 per un'esposizione del piano di lavoro, limitiamoci per ora alla seguente osservazione riguardo al tipo di risultato che si può sperare di ottenere. Poiché la diseguaglianza (1.1.2) diviene un'eguaglianza se il rivestimento è quello banale $\bar{M}_0$ = unione disgiunta di h copie di M, ci si può domandare se ad essa corrispondono diseguaglianze come $\bar{\lambda}_{hi}(\bar{M}) \geq \bar{\lambda}_{hi}(\bar{M}_0) = h\lambda_i(M)$ fra i singoli autovalori. In generale ciò è da escludere, come mostra il seguente esempio.

(1.2.2) ESEMPIO. La sfera unitaria di $\mathbf{R}^{n+1}$ dotata della metrica canonica indotta (S^n, can) è un rivestimento riemanniano a 2 fogli dello spazio proiettivo $(\mathbf{P}^n(\mathbf{R}), can)$. Se $i \leq (n+1)/2$ abbiamo da [4], p. l59 e seg.:

$$\bar{\lambda}_{2i}(S^n) = n < \lambda_i(\mathbf{P}^n(\mathbf{R})) = 2(n+1).$$

1.3. Nel seguito (n. 2) daremo alcuni richiami sullo spettro di una varietà riemanniana compatta, con o senza bordo (nel caso a bordo le condizioni al contorno saranno le condizioni di Dirichlet oppure di Neumann) e sulla caratterizzazione variazionale degli autovalori: per questa parte un riferimento molto valido e ormai classico è il libro [4] di BERGER, GAUDUCHON e MAZET; una esposizione chiara ed aggiornata si trova nel libro [2] di BERARD.

Daremo poi nel n. 3 la definizione dello spettro di Dirichlet di M\A, essendo A un sottoinsieme qualunque di una varietà riemanniana connessa compatta senza bordo M: definita la capacità di A vedremo che tale spettro coincide con quello di M se e solo se A ha capacità nulla (riferimenti: CHAVEL e FELDMAN, [8], e COURTOIS, [10]).

Considerato quindi un rivestimento riemanniano ramificato ad h fogli π: $(\overline{M},\overline{g}) \longrightarrow (M,g)$ vedremo nel n. 4 che se l'insieme $\overline{A}\subset\overline{M}$ dei punti di ramificazione ha capacità nulla, allora anche $A = \pi(\overline{A})$ e $\pi^{-1}(A)$ hanno capacità nulla: unitamente alle considerazioni del n. 3 cio' permetterà di ricondursi al caso di un rivestimento riemanniano non ramificato di varietà a bordo.

Nei nn. 5 e 6 dimostreremo il risultato principale sullo spettro dei rivestimenti riemanniani per i quali cap A = 0, A chiuso:

(1.3.1) $$\overline{\lambda}^*_{i(h+1)} > [8(h+1)^2]^{-1}\lambda^*_{i+1}$$

ove * sta ad indicare che ci si riferisce allo spettro di Dirichlet nel caso di varietà a bordo; inoltre si vedrà facilmente che la diseguaglianza di Kato-Tysk (1.1.2) vale ancora sotto l'ipotesi cap A = 0, A chiuso, meno restrittiva dell'ipotesi codim $\overline{A} \geq 2$.

Concluderemo nel n. 7 con un'applicazione geometrica: la stima dell'indice di una superficie minimale di $\mathbf{R}^3$ tramite la curvatura totale. Per quel che riguarda le superficie minimali, un'esauriente trattazione si può trovare nel libro [16] di LAWSON.

2. SPETTRO DI UNA VARIETA'. CARATTERIZZAZIONE VARIAZIONALE DEGLI AUTOVALORI.

2.1. Sia (M,g) una varietà riemanniana connessa, compatta, con o senza bordo. L'<u>*operatore di Laplace-Beltrami*</u> Δ_M o brevemente Δ se non vi è possibilità di confusione, è un operatore differenz[iale li]neare del 2°

ordine: $\Delta: C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$

definito da:

(2.1.1) $\Delta f = -\mathrm{Div}(\mathrm{grad}\, f)$.

Il *problema spettrale* consiste nella ricerca degli autovalori e delle autofunzioni di Δ, con opportune condizioni al contorno se $\partial M \neq \emptyset$; precisamente si hanno i seguenti problemi:

1) $\Delta f = \lambda f$, se $\partial M = \emptyset$ (*problema di una varietà chiusa*);

2) $\Delta f = \lambda f$ su $M \backslash \partial M$, $f = 0$ su ∂M , se $\partial M \neq \emptyset$ (*problema di Dirichlet*);

3) $\Delta f = \lambda f$ su $M \backslash \partial M$, $\nu \cdot f = 0$ su ∂M , se $\partial M \neq \emptyset$ (*problema di Neumann*),

ove ν è il campo dei versori normali a ∂M orientati verso l'interno.

In ciascuno di questi problemi, il risultato fondamentale è espresso dal seguente teorema (cf. [2], p. 53):

(2.1.2) TEOREMA. *Nei casi 1),2),3) si ha:*

(i) gli autovalori costituiscono una successione crescente divergente positivamente:

$$0 \leq \beta_0 < \beta_1 < \beta_2 < \ldots\ldots \uparrow +\infty ;$$

(ii) ogni autovalore β_i ha molteplicità finita, ossia il corrispondente autospazio $E(\beta_i)$ ha dimensione finita, e autospazi relativi ad autovalori distinti sono $L^2(M)$ -ortogonali (1)*;*

---

(1) $L^2(M)$ è lo spazio delle funzioni f misurabili su M tali che

$$\int_M |f(x)|^2 \, dv_g(x) < +\infty ,$$

ove v_g è la misura canonica su (M,g): $L^2(M)$ è lo spazio di Hilbert completamento di $C^\infty(M)$ rispetto al prodotto scalare

$$\langle\langle f_1,f_2 \rangle\rangle_M = \int_M f_1(x) f_2(x) \, dv_g(x) ;$$

indichiamo con $\|f\|_{L^2(M)} = \langle\langle f,f \rangle\rangle_M^{1/2}$ la norma indotta da esso. Nel seguito, ove non vi sia possibilità di confusione, scriveremo più brevemente $\langle\langle f_1,f_2 \rangle\rangle = \int_M f_1 f_2$ e $\|f\|_{L^2(M)} = \int_M f^2$.

(iii) la somma diretta degli autospazi $E(\beta_i)$, $i \in \mathbf{N}^*$, è densa in $L^2(M)$ rispetto alla topologia della norma L^2 ed è densa in $C^k(M)$ per la topologia della convergenza uniforme C^k, $k=0,1,2,...$.

Osserviamo esplicitamente (v. [13] oppure [2]) che il primo autovalore ha molteplicità 1; nei casi 1) e 3), $\beta_0 = 0$ e le corrispondenti autofunzioni sono le funzioni costanti su M.

Nel seguito indicheremo gli autovalori del problema 1) con

(2.1.3) $$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \uparrow +\infty$$

intendendo di ripetere ciascun autovalore un numero di volte pari alla sua molteplicità; tale successione si dice *spettro* di M e si indica con Spec M (o con Spec^C M per uniformità di linguaggio). Analogamente si definiscono lo *spettro di Dirichlet* Spec^D M e lo *spettro di Neumann* Spec^N M.

Alla successione (2.1.3) si può associare una famiglia di autofunzioni $\{\phi_i\}_{i \in \mathbf{N}^*}$ del corrispondente problema spettrale; la terza asserzione del teorema (2.1.2) mostra che $\{\phi_i\}_{i \in \mathbf{N}^*}$ è una base ortonormale di $L^2(M)$.

Diamo ora un'idea della dimostrazione del teorema (2.1.2); per maggiori dettagli rinviamo a [2] e [18], vol.II.

Dim . Si considerino, relativamente ai problemi spettrali enunciati, gli spazi $C^\infty_*(M)$, $* = C,D,N$, definiti da:

1) $C^\infty_C(M) = C^\infty(M)$;

2) $C^\infty_D(M) = C^\infty_0(M) = \{ f \in C^\infty(M) \mid f$ a supporto compatto in $M \setminus \partial M\}$;

3) $C^\infty_N(M) = \{ f \in C^\infty(M) \mid \nu \cdot f = 0)$;

essi sono sottospazi di $C^\infty(M)$ *densi* ma non completi in $L^2(M)$. Per un teorema classico di teoria spettrale (cf. [18] cap. X) l'operatore Δ ristretto a $C^\infty_*(M)$ ha una unica estensione come operatore autoaggiunto non limitato Δ' su un opportuno sottospazio $H^1{}_*(M)$ di $L^2(M)$ contenente $C^\infty{}_*(M)$. La positività di Δ implica la positività di Δ' e quindi che lo spettro di Δ' è contenuto in $\mathbf{R}^*{}_+$ (v. anche i successivi 2.2 e 2.3). La compattezza di M implica che l'inclusione di $H^1{}_*(M)$ in $L^2(M)$ è compatta(2). Il teorema fondamentale segue allora da risultati classici della teoria spettrale degli operatori compatti e dall'*ellitticità* di Δ. _|

2.2. Sia Q una forma quadratica definita su un sottospazio W denso dello spazio di Hilbert $(H, \| \ \|)$ semi-limitata nel senso che $\exists\, c \in \mathbf{R}$ tale che

$$\forall\, \mathbf{w} \in W\,,\quad Q(\mathbf{w}) \geq c\|\mathbf{w}\|^2.$$

(2.2.1) DEFINIZIONE. *Le successioni crescenti di $[c,+\infty)$ definite da:*

$$\mu_i(Q) = \sup\ \inf Q(\mathbf{w}) \text{ per } w \perp E_{k-1},\ \|\mathbf{w}\| = 1,$$

$$\nu_i(Q) = \inf\ \sup Q(\mathbf{w}) \text{ per } w \in E_k\,,\ \|\mathbf{w}\| = 1,$$

ove E_j descrive l'insieme dei sottospazi j-dimensionali di W, coincidono (v. teor. XIII.1 di [18]) e si dicono spettro della forma quadratica Q.

Poniamo $\Lambda(Q) = \sup \operatorname{Spec} Q$ e $N_Q(\lambda)$ = numero dei valori dello spettro di Q che sono strettamente inferiori a λ, $\lambda \in \mathbf{R}$.

Ricordiamo che (cf. [18] vol. I, cap. VIII, in particolare teor. VIII.15, e vol. II, cap. 10, teor. X.23) se T è un operatore simmetrico positivo definito su un dominio $D(T) \subset H$ denso in H e se Q è la forma quadratica associata a T:

(2.2.2) $$Q(\mathbf{v},\mathbf{w}) = \langle T\mathbf{v},\mathbf{w}\rangle \qquad \forall\, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in D(T),$$

---

(2)Un'applicazione $F: (H_1, \| \ \|_1) \longrightarrow (H_2, \| \ \|_2)$ di spazi di Hilbert si dice compatta se l'immagine tramite F di un sottoinsieme limitato di H_1 è relativamente compatta in H_2.

(Q è semilimitata con $c = 0$), allora Q è chiudibile e la sua chiusura Q' è la forma quadratica di un unico operatore autoaggiunto T', il quale a sua volta è l'unica estensione di T il cui dominio è contenuto nel dominio della forma Q'; lo spettro di T' coincide con quello di Q. T' si dice l'*estensione di Friedrichs* di T o anche di Q rispetto al dominio D(T).

2.3. Indichiamo con g^d la metrica duale di g. La forma quadratica E_* definita su $C^\infty_*(M)$, $* = C,D,N$, da

(2.3.1) $$E_*(f) = \int_M g^d(df,df)$$

si dice *integrale di Dirichlet o dell'energia* ; indicheremo tale forma anche con $\int_M |df|^2$ o con $||df||^2_{L^2(M)}$. E_* è la forma quadratica dell'operatore positivo simmetrico Δ.

Lo spazio di Sobolev $H^1{}_*(M)$ è il completamento di $C^\infty{}_*(M)$ in $L^2(M)$ rispetto alla norma

(2.3.2) $$||f||^2_{H^1} := ||f||^2_{L^2} + ||df||^2_{L^2}.$$

Le inclusioni di $(H^1{}_*(M),||\ ||_{H^1})$ in $(L^2(M),||\ ||_{L^2})$ sono compatte ed E_* si estende canonicamente ad una forma quadratica chiusa E'_* su $H^1{}_*(M)$ associata all'operatore autoaggiunto Δ', estensione di Friedrichs di Δ. Gli spettri di Δ, E_*, E'_* coincidono: abbiamo precisamente le seguenti caratterizzazioni variazionali degli autovalori.

Per $f \in H^1{}_*(M)\backslash\{0\}$ definiamo il *quoziente di Rayleigh* R(f) come:

(2.3.3) $$R(f) = ||df||^2_{L^2}/||f||^2_{L^2}.$$

Sia $\{\phi_i\}_{i \in \mathbf{N}^*}$ una base ortonormale di autofunzioni di Δ in $L^2(M)$, ciascuna ϕ_i essendo relativa all'autovalore $\lambda_i \in \mathrm{Spec}^*M$; allora (*I caratterizzazione variazionale degli autovalori*):

(2.3.4) $\lambda_i = \inf \{R(f) \mid f \neq 0, «f,\phi_0»_M = 0, \dots, «f,\phi_{i-1}»_M = 0\}$

dove $f \in H^1{}_*(M)$ o equivalentemente $f \in C^\infty{}_*(M)$. Inoltre se $\lambda_i = R(f)$ ed $f \in H^1{}_*(M)$ è L^2-ortogonale a $\phi_0, \dots, \phi_{i-1}$, allora f è un'autofunzione relativa a λ_i (il viceversa essendo ovvio).

La *II e III caratterizzazione variazionale degli autovalori* sono note come *principio del minimax* e sono espresse da (cf. 2.2):

(2.3.5) $\lambda_i = \sup \inf R(f)$ per $f \neq 0$, $f \perp E_{i-1}$

e rispettivamente:

(2.3.6) $\lambda_i = \inf \sup R(f)$ per $f \in E_i \setminus \{0\}$

al variare di E_k fra i sottospazi di dimensione k di $H^1{}_*(M)$ oppure di $C^\infty{}_*(M)$.

Le autofunzioni ϕ_i sono in $L^2(M)$; risultati classici di teoria di regolarità delle soluzioni deboli dei problemi *ellittici* assicurano poi che gli autospazi e le autofunzioni sono in $C^\infty{}_*(M)$ (cf. ad es. [2] cap. III, ove sono dimostrate in dettaglio anche le caratterizzazioni variazionali).

(2.3.7) OSSERVAZIONE. Su una varietà (M,g) non compatta, con o senza bordo, oppure con singolarità per la metrica g, $\mathrm{Spec}^* M$ è per definizione l'insieme dei $\lambda \in \mathbf{R}$ tali che $(\Delta - \lambda \cdot \mathrm{Id})$, considerato come operatore di $D^*_2 =$ ={completamento di $C^\infty{}_*$ per la norma $||f||_{H^2(M)} = ||f||_{L^2(M)} + ||\Delta f||_{L^2(M)}$ in $L^2(M)$}, non ammette operatore inverso limitato. Tale spettro si decompone in due parti: lo "spettro discreto", costituito dai punti isolati dello spettro che sono autovalori di molteplicità infinita, ed il suo complementare detto "spettro essenziale". I rapporti con le forme quadratiche E_* ed E_*' sono precisati nel seguente teorema (cf. p. es. [12], [14] e [18] teor. XIII.1):

(2.3.8) TEOREMA. *Indicando con $\Gamma^* = \Gamma(\Delta, C^\infty{}_*(M))$ l'estremo inferiore dello spettro essenziale si ha:*

(i) $\Gamma^* = \Lambda(E_*) = \Lambda(E_*')$;

(ii) tutti gli elementi dello spettro situati nell'intervallo $[0,\Gamma^*[$ sono autovalori di molteplicità finita e la loro successione coincide con la parte degli spettri di E_* e di E_*' che sono contenute in $[0,\Gamma^*[$.

3. SPETTRO E CAPACITA'.

3.1. Sia (M,g) una varietà riemanniana compatta connessa senza bordo e sia $A\subset M$ un sottoinsieme qualsiasi. Indichiamo con $H^1_0(M\setminus A)$ il completamento in $H^1(M)$ di

$K^1_0(M\setminus A) = \{f\in H^1(M) \mid \exists$ un aperto U di M contenente A per cui $f|_U = 0\}$.

Allora lo <u>*spettro di Dirichlet*</u> di $M\setminus A$ è lo spettro della forma quadratica E_A restrizione ad $H^1_0(M\setminus A)$ di $E(f) = \|df\|^2_{L^2(M)}$ (cf. 2.2); tale spettro, che indicheremo con $Spec^D(M\setminus A)$, è discreto (in quanto l'inclusione di $H^1_0(M\setminus A)$ in $L^2(M)$ è compatta) e si accumula a $+\infty$ se $H^1_0(M\setminus A)$ è di dimensione infinita.

Si noti che se A è compatto la definizione di $H^1_0(M\setminus A)$ coincide, come si puo' vedere p. es. in [10], con quella classica di completamento di

$C^\infty_0(M\setminus A) = \{f\in C^\infty(M) \mid f$ a supporto compatto contenuto nell'interno di $M\setminus A\}$; quest'ultima definizione risulta pero' troppo restrittiva escludendo per esempio il caso in cui A sia un insieme misurabile denso di punti di M, perché in tal caso risulterebbe $C^\infty_0(M\setminus A) = \{0\}$ e $Spec^D(M\setminus A)$ sarebbe vuoto, contrariamente allo spettro sopra definito (cf. [10]).

3.2. Definito $\mathrm{Spec}^D(M\setminus A)$, ci si chiede quale sia la condizione ottimale su A affinché esso coincida con Spec M: risulta, come vedremo, che l'invariante associato ad A che permette di stabilire con il suo annullarsi tale eguaglianza, è la <u>*capacità*</u>.

(3.2.1) DEFINIZIONE. *Per $u \in H^1(M)$ si definisce la u-capacità di A come*

$$\mathrm{cap}\,(A,u) = \inf E(f)$$

al variare di f nell'insieme $S_{A,u}$ ove

$$(3.2.2) \qquad S_{A,u} = \{f \in H^1(M) \mid \int_M f = 0\ ,\ f-u \in H^1{}_0(M\setminus A)\};$$

se $S_{A,u} = \emptyset$, si pone per definizione cap $(A,u) = +\infty$. Nel caso $u = 1_M$, funzione costante uguale ad 1 su M, la 1-capacità si dice brevemente capacità di A e si indica con cap A (ad esempio cap M = cap(M,1) = $+\infty$).

L'estremo inferiore che compare nella definizione di cap (A,u) è in realtà raggiunto, infatti si ha:

(3.2.3) PROPOSIZIONE. *Per ogni $u \in H^1(M)$ esiste una ed una sola funzione $u^A \in S_{A,u}$ tale che*

$$\mathrm{cap}\,(A,u) = E(u^A);$$

risulta in particolare $u - u^A \in H^1{}_0(M\setminus A)$.

Dim. Sia cap A < $+\infty$, quindi $S_{A,1} \neq \emptyset$: risulta allora $S_{A,u} \neq \emptyset\ \forall\ u \in H^1(M)$ in quanto se $v \in S_{A,1}$ si ha

$$\left[\int_M u\right]\cdot(v-1) \in H^1{}_0(M\setminus A)$$

e quindi

$$u - \left[\int_M u\right]\cdot(v-1) \in S_{A,u}.$$

Inoltre $S_{A,u}$ è un sottospazio affine chiuso dello spazio di Hilbert $\overline{H}^1(M) =$

$= \{f \in H^1(M) \mid \int_M f = 0\}$ munito della norma

$$\overline{|||} f \overline{|||}^2 = \int_M |df|^2;$$

la direzione S_A di $S_{A,u}$ è indipendente da u ed è $S_A = H^1{}_0(M\backslash A) \cap \bar{H}^1(M)$.

Allora cap (A,u) non è che la distanza in norma $\overline{|||}\ \overline{|||}$ di 0 da $S_{A,u}$ e

cap (A,u) $= \int_M |du^A|^2$ dove u^A è la proiezione ortogonale di 0 su $S_{A,u}$ in $\bar{H}^1(M)$. _|

Con le notazioni precedentemente introdotte, abbiamo poi:

(3.2.4) PROPOSIZIONE. *Siano* $u, u' \in H^1(M)$; *allora:*

1) $S_{A,u} = S_{A,u'} \Leftrightarrow u - u' \in H^1{}_0(M\backslash A)$;

2) $u - u' \in H^1{}_0(M\backslash A) \Leftrightarrow u^A = u'^A$ e cap (A,u) = cap (A,u');

3) $u \in H^1{}_0\,(M\backslash A) \Leftrightarrow u^A = 0 \Leftrightarrow$ cap (A,u) = 0.

Dim. 1) Sia $f \in S_{A,u} = S_{A,u'}$: allora $f - u \in H^1{}_0(M\backslash A)$ e $f - u' \in H^1{}_0(M\backslash A)$, quindi per differenza $u - u' \in H^1{}_0(M\backslash A)$. Viceversa se $u - u' \in H^1{}_0(M\backslash A)$, sia $f \in S_{A,u}$: per definizione è $\int_M f = 0$ e $f - u \in H^1{}_0(M\backslash A)$. Ma allora $f - u' =$ $= (f - u) + (u - u')$ appartiene ad $H^1{}_0(M\backslash A)$ e quindi $f \in S_{A,u'}$, ossia abbiamo provato che $S_{A,u} \subset S_{A,u'}$. Analogamente si prova che $S_{A,u'} \subset S_{A,u}$.

2) e 3) sono allora una conseguenza immediata della proposizione (3.2.3)._|

(3.2.5) OSSERVAZIONE. Si puo' dimostrare (cf. [10]) che la capacità da noi introdotta è una capacità regolare nel senso di CHOQUET, [9], p. 154.

Vogliamo ora dimostrare·

(3.2.6) PROPOSIZIONE. cap A = 0 $\Leftrightarrow$ cap (A,f) = 0 $\forall\ f \in H^1(M)$.

A tal fine premettiamo il seguente lemma.

(3.2.7) LEMMA. *Se* $f \in C^\infty(M)$ *e* $\{v_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ *è una successione di* $H^1(M)$ *convergente a 0, allora* $\{fv_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ *converge a 0.*

Dim. Si ha:

$$\|fv_n\|^2_{H^1(M)} = \int_M f^2 v_n^2 + \int_M |df|^2 v_n^2 + \int_M |dv_n|^2 f^2 + 2\int_M f v_n\, g^d(df, dv_n);$$

posto $F = \|f\|_{L^\infty}$ ed $G = \|df\|_{L^\infty}$, risulta allora:

$$\|fv_n\|^2_{H^1(M)} \leq (F^2 + G^2)\, \|v_n\|^2_{L^2} + F^2 \|dv_n\|^2_{L^2} + 2FG\, \|v_n\|_{L^2} \cdot \|dv_n\|_{L^2} \leq$$

$$\leq (2F^2 + G^2 + 2FG)\, \|v_n\|^2_{H^1(M)}$$

donde la conclusione. ⌋

Dim. della proposizione (3.2.6). Basta dimostrare che cap A = 0 implica $cap(A,f) = 0\ \forall f \in H^1(M)$. Per la 3) della proposizione (3.2.4), cap A = 0 equivale a $1 \in H^1{}_o(M \backslash A)$; per definizione di $H^1{}_o(M \backslash A)$ esistono allora una successione $\{u_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ in $H^1(M)$ ed una successione $\{U_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ di aperti di M contenenti A tali che:

$$u_{n|U_n} = 0 \qquad e \qquad 1 = \lim_n u_n \quad \text{per } n \longrightarrow \infty.$$

Presa $f \in C^\infty(M)$, la funzione fu_n di $H^1(M)$ è nulla su U_n ed appartiene dunque ad $H^1{}_o(M \backslash A)$; applicando il lemma (3.2.7) alla successione $\{1 - u_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ si ha per $n \longrightarrow \infty$:

$$\lim_n f \cdot (1 - u_n) = 0 \quad \text{cioè} \quad f = \lim_n fu_n$$

e pertanto $f \in H^1{}_o(M \backslash A)$ il che comporta, sempre per la 3) della proposizione (3.2.4), cap (A,f) = 0. Si è così dimostrato che

$$cap\, A = 0 \quad \Rightarrow \quad cap\,(A,f) = 0 \quad \forall f \in C^\infty(M).$$

La densità di $C^\infty(M)$ in $H^1(M)$ e la continuità dell'applicazione di $H^1(M)$ in $\mathbf{R}$ che manda f in cap (A,f) permettono poi di concludere che $cap(A,f) = 0\ \forall f \in H^1(M)$. ⌋

Dalla proposizione (3.2.6) e dalla 3) della propôsizione (3.2.4) si ha subito il seguente risultato:

(3.2.8) COROLLARIO. cap A = 0 $\Leftrightarrow$ $H^1{}_o(M \backslash A) = H^1(M)$.

3..3. Siamo ora in grado di dimostrare il risultato sulla coincidenza di $\mathrm{Spec}^D(M\setminus A)$ con Spec M, precisamente che:

(3.3.1) TEOREMA. $\lambda_i(M) = \lambda_i^D(M\setminus A) \quad \forall\, i \in \mathbf{N}^* \iff \mathrm{cap}\, A = 0$.

Dim . Se $\lambda_i^D(M\setminus A) = \lambda_i(M) \quad \forall\, i \in \mathbf{N}^*$, le autofunzioni associate agli autovalori $\lambda_i^D(M\setminus A)$ sono necessariamente uguali, per la caratterizzazione variazionale degli autospazi tramite il principio del minimax, alle autofunzioni degli autovalori $\lambda_i(M)$, quindi $H^1{}_0(M\setminus A) = H^1(M)$ e per la (3.2.8), cap A = 0.

Viceversa, sempre per (3.2.8), cap A = 0 implica $H^1{}_0(M\setminus A) = H^1(M)$ che a sua volta implica $\lambda_i^D(M\setminus A) = \lambda_i(M) \quad \forall\, i \in \mathbf{N}^*$. _|

Questo risultato, ottenuto da RAUCH e TAYLOR, [17], per A compatto di $\mathbf{R}^n$ e da CHAVEL e FELDMAN, [8], e COURTOIS, [10], nel caso attuale, permette di dimostrare in particolare che ogni sottovarietà N di M compatta senza bordo di codimensione ≥ 2, avendo capacità nulla (per la dimostrazione, essenzialmente tecnica, v. ad es. [10]), è tale che $\mathrm{Spec}^D(M\setminus N) = \mathrm{Spec}\, M$. Osserviamo inoltre che cap A = 0 implica Vol A = 0.

Concludiamo questa parte richiamando il seguente risultato, per la cui dimostrazione rimandiamo p. es. a [10].

(3.3.2) TEOREMA. *Sia $\{A_n\}_{n\in \mathbf{N}}$ una successione di parti di M. Allora le seguenti proprietà sono equivalenti:*

1) $\lim_n \mathrm{cap}\, A_n = 0$;

2) $\lim_n \lambda_i^D(M\setminus A) = \lambda_i(M) \quad \forall\; i = 0,1,2,\dots$;

3) $\lim_n \lambda_0^D(M\setminus A) = 0$.

4. SPETTRO DI UN RIVESTIMENTO RIEMANNIANO: RIDUZIONE AL CASO NON RAMIFICATO.

4.1. Sia $\pi: (\bar{M},\bar{g}) \longrightarrow (M,g)$ un rivestimento riemanniano ramificato ad h fogli di una varietà riemanniana connessa compatta senza bordo (M,g), di cui indichiamo con $\bar{A}\subset\bar{M}$ l'insieme dei punti di ramificazione; poniamo $A=\pi(\bar{A})\subset M$ sicché $\pi^{-1}(A)\supset\bar{A}$.

(4.1.1) LEMMA. *Con le notazioni precedenti, supponiamo che Vol A = 0. Se* $f\in H^1(M)$*, allora* $f\circ\pi\in H^1(\bar{M})$ *e risulta*

$$\|f\circ\pi\|^2_{H^1(\bar{M})} = h\,\|f\|^2_{H^1(M)}.$$

Dim. Per ogni $x\in M\setminus A$ consideriamo una carta di dominio U contenente x e contenuto in un dominio fondamentale del rivestimento, per cui sia $\pi^{-1}(U)=U^1\cup...\cup U^h$, unione disgiunta di aperti di $\bar{M}$, e poniamo $y_p=\pi^{-1}(x)\cap U^p$, $p=1,...,h$. La funzione $s_p: U \longrightarrow U^p$ definita da $s_p(x)=y_p$ è un'isometria tra U ed U^p $\forall p$ e risulta:

$$\|f\circ\pi\|^2_{L^2(\bar{M})} = h\,\|f\|^2_{L^2(M)}. \tag{4.1.2}$$

Infatti, osservato che Vol A = 0 implica Vol $\pi^{-1}(A) = 0$, si ha per il teorema di Fubini:

$$\|f\circ\pi\|^2_{L^2(\bar{M})} = \int_{\bar{M}}[(f\circ\pi)(y)]^2 dv_{\bar{g}}(y) = \int_M \sum_{y\in\pi^{-1}(x)}[f(x)]^2 dv_g(x) = h\,\|f\|^2_{L^2(M)}.$$

Risulta anche:

$$\|d(f\circ\pi)\|^2_{L^2(\bar{M})} = h\,\|df\|^2_{L^2(M)}. \tag{4.1.3}$$

Infatti considerata una base mobile ortonormale $(X_1,...,X_n)$, $n = \dim M$, su U, i vettori $X_1{}^p = s_{p*}X_1$, . . . , $X_n{}^p = s_{p*}X_n$ costituiscono una base mobile ortonormale su U^p. Risulta allora, con riferimento alle basi mobili duali, anch'esse ortonormali:

$$(d(f\circ\pi)(y_p))^i = (d(f\circ\pi)(y_p))(X_i{}^p) = (X_i{}^p)_{y_p}(f\circ\pi) = ((s_{p*})X_i)(f\circ\pi) =$$
$$= (X_i f)(x) = (df(x))^i$$

$\forall\ i=1,\dots,n$, quindi

$$|d(f\circ\pi)(y_p)|^2 = |df(x)|^2 \qquad \forall\ p=1,\dots,h$$

e di conseguenza, sempre per il teorema di Fubini, la (4.1.3). Le (4.1.2) e (4.1.3) danno, per la definizione (2.3.2) della norma in H^1, la conclusione._|

(4.1.4) OSSERVAZIONE. Il lemma (4.1.1) così come le (4.1.2) e (4.1.3) continuano ad essere valide se si considera un rivestimento riemanniano ad h fogli di una varietà *con bordo*, pur di sostituire gli spazi H^1 con gli spazi $H^1{}_D$ corrispondenti: la dimostrazione del lemma procede infatti inalterata considerando $f\in H^1{}_D(M)$ e punti $x\in M\backslash(\partial M\cup A)$. L'utilità della considerazione di tali rivestimenti apparirà chiara nei successivi nn. 4.3 e 6.3.

4.2. Con le notazioni introdotte in 4.1 abbiamo allora:

(4.2.1) TEOREMA. *Se E è una parte qualsiasi di M, risulta:*

$$\text{cap}\ \pi^{-1}(E) \le h\ \text{cap}\ E.$$

Dim. Sia infatti u^E l'unica funzione che realizza la capacità di E: risulta allora (v. proposizione (3.2.3))

$$\text{cap}\ E = \|du^E\|^2{}_{L^2(M)}$$

ove u^E è caratterizzata da:

a) $u^E\in H^1(M)$;

b) $\int_M u^E dv_g = 0$;

c) $u^E-1_M\in H^1{}_0(M\backslash E)$, cioè $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ f_\varepsilon\in C^\infty{}_0(M\backslash E)$ per cui:

i) $f_\varepsilon\in H^1(M)$;

ii) $f_\varepsilon|_U = 0$, essendo U un aperto di M contenente E;

iii) $\|f_\varepsilon-(u^E-1_M)\|^2{}_{H^1(M)} < \varepsilon$.

Ma allora la funzione $u^E\circ\pi$ è tale che:

a') $u^E \circ \pi \in H^1(\bar{M})$ per il lemma (4.1.1);

b') $\int_{\bar{M}} (u^E \circ \pi)(y) dv_{\bar{g}}(y) = h \int_M u^E(x) dv_g(x) = 0$ per il teorema di Fubini;

c') la funzione $f_\varepsilon \circ \pi$ è tale che:

i') $f_\varepsilon \circ \pi \in H^1(\bar{M})$ per il lemma (4.1.1);

ii') $f_\varepsilon \circ \pi |_{\pi^{-1}(U)} = 0$ per ii), e $\pi^{-1}(U)$ è un aperto di $\bar{M}$ contenente $\pi^{-1}(E)$;

iii') risulta, sempre per il lemma (4.1.1) e per iii):

$$\|f_\varepsilon \circ \pi - (u^E \circ \pi - 1_M \circ \pi)\|^2_{H^1(\bar{M})} = h \, \|f_\varepsilon - (u^E - 1_M)\|^2_{H^1(M)} < h\varepsilon$$

il che vuol dire che $u^E \circ \pi - 1_{\bar{M}} \in H^1{}_0(\bar{M} \setminus \pi^{-1}(E))$.

Pertanto $u^E \circ \pi \in S_{\pi^{-1}(E)}$ e per la (4.1.3) si ha allora la conclusione:

$$\text{cap}\, \pi^{-1}(E) \leq \|d(u^E \circ \pi)\|^2_{L^2(\bar{M})} = h \, \|du^E\|^2_{L^2(M)} = h \text{ cap } E. \_|$$

Il teorema ora dimostrato ammette due importanti corollari.

(4.2.2) COROLLARIO. *Se B è un sottoinsieme di M per cui cap $B = 0$, allora cap $\pi^{-1}(B) = 0$.*

(4.2.3) COROLLARIO. *Se $\{E_k\}_{k \in \mathbf{N}}$ è una successione di parti di M tale che per $k \longrightarrow \infty$ sia lim cap $E_k = 0$, allora $\{\pi^{-1}(E_k)\}_{k \in \mathbf{N}}$ è una successione di parti di $\bar{M}$ per cui lim cap $\pi^{-1}(E_k) = 0$.*

Dim. $\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\ k_\varepsilon$ tale che cap $E_k < \varepsilon$ per $k > k_\varepsilon$; allora per $k > k_\varepsilon$ è cap $\pi^{-1}(E_k) < h\varepsilon$ per il teorema (4.2.1). _|

4.3. Il teorema (4.2.1) ed i suoi corollari, insieme ai risultati di 3.3, permettono in pratica, per quel che riguarda i problemi spettrali, di ridursi a rivestimenti non ramificati.

In effetti se $\pi: (\bar{M}, \bar{g}) \longrightarrow (M, g)$ è un rivestimento riemanniano ramificato ad h fogli della varietà riemanniana connessa compatta senza bordo (M,g), con insieme di ramificazione $\bar{A} \subset \bar{M}$, e se $A=\pi(\bar{A})$ è chiuso ed ha capacità nulla, anche $\pi^{-1}(A)$ ha capacità nulla per (4.1.5); allora, per il teorema (3.3.1), si ha coincidenza fra $\mathrm{Spec}^D(M \setminus A)$ e Spec M ed anche tra $\mathrm{Spec}^D(\bar{M} \setminus \pi^{-1}(A))$ e Spec $\bar{M}$.

Per essere più precisi, $\forall\ \varepsilon > 0$ consideriamo un aperto E_ε di M, con bordo C^∞ a tratti, contenente A con cap $E_\varepsilon < \varepsilon$; allora $\pi^{-1}(E_\varepsilon)$ è un aperto di $\bar{M}$ contenente $\pi^{-1}(A)$ con cap $\pi^{-1}(E_\varepsilon) < h\varepsilon$ per (4.2.1).

$\pi: (\bar{M} \setminus \pi^{-1}(E_\varepsilon), \bar{g}) \longrightarrow (M \setminus E_\varepsilon, g)$ è un rivestimento riemanniano non ramificato ad h fogli di varietà <u>*con bordo*</u> del tipo considerato in (4.1.4). Considerando percio' gli spettri di Dirichlet, si ha per (4.2.3) e (3.3.2) che per $\varepsilon \longrightarrow 0$:

$$\lim \mathrm{Spec}^D(\bar{M} \setminus \pi^{-1}(E_\varepsilon)) = \mathrm{Spec}\ \bar{M},$$

$$\lim \mathrm{Spec}^D(M \setminus E_\varepsilon) = \mathrm{Spec}\ M.$$

Siamo quindi ricondotti, nello studio dei legami fra Spec $\bar{M}$ e Spec M, allo studio dei legami fra gli spettri corrispondenti di rivestimenti riemanniani non ramificati di varietà con bordo.

5. RISULTATI HILBERTIANI PER RIVESTIMENTI RIEMANNIANI.

5.1. Per tutti i nn. 5 e 6 intendiamo che $\pi: (\bar{M}, \bar{g}) \longrightarrow (M,g)$ sia un rivestimento riemanniano non ramificato ad h fogli di varietà riemanniane connesse compatte; nel caso di varietà a bordo supponiamo che la restrizione di π a $\partial\bar{M}$ sia ancora un rivestimento riemanniano non ramificato ad h fogli di ∂M (cf. 4.3).

Per qualsiasi $\bar{f}: \bar{M} \longrightarrow \mathbf{R}$ (tale che $\bar{f}|_{\partial\bar{M}} = 0$ se $\partial\bar{M} \neq \emptyset$) definiamo la funzione $\varpi\bar{f}: M \longrightarrow \mathbf{R}$ ponendo:

$$(5.1.1)\quad (\varpi\bar{f})(x) := \Big[\sum_{y\in{}^{-1}(x)} (\bar{f}(y))^2\Big]^{1/2} = \Big[\sum_p (\bar{f}\circ s_p(x))^2\Big]^{1/2} \qquad \forall\, x\in M,$$

ove s_p, $p=1,\dots,h$, sono le funzioni definite in 4.1 (è $\varpi\bar{f}|_{\partial M} = 0$ se $\partial M \neq \emptyset$).

L'applicazione (non lineare) ϖ porta $L^2(\bar{M})$ in $L^2(M)$ in quanto per il teorema di Fubini si ha:

$$(5.1.2)\qquad \|\varpi\bar{f}\|^2_{L^2(M)} = \int_M [(\varpi\bar{f})(x)]^2 dv_g(x) = \int_{\bar{M}} (\bar{f}(y))^2 dv_{\bar{g}}(y) = \|\bar{f}\|^2_{L^2(\bar{M})}.$$

Ebbene, vogliamo dimostrare che, sotto le ipotesi e con le notazioni precedentemente introdotte, si ha:

(5.1.3) TEOREMA. *Siano $\mathcal{E},\mathcal{K}$ sottospazi di $L^2(\bar{M}), L^2(M)$ di dimensione finita N,k rispettivamente, e sia $P_{\mathcal{K}} : L^2(M) \longrightarrow \mathcal{K}$ la proiezione L^2-ortogonale. Allora:*

(i) se $N > h$ $\exists\, \bar{f}\in \mathcal{E}\setminus(0)$ tale che:

$$\|\varpi\bar{f}\|_{L^1(M)} \leq C(h,N)(\mathrm{Vol}\, M)^{1/2}\, \|\bar{f}\|_{L^2(\bar{M})}$$

essendo $C(h,N)$ una costante <1 che dipende da h e da N;

(ii) se $N \geq k(h+1)$ $\exists\, \bar{f}\in \mathcal{E}\setminus(0)$ tale che:

$$\|P_{\mathcal{K}}(\varpi\bar{f})\|^2_{L^2(M)} < [1-(8(h+1)^2)^{-1}]\, \|\bar{f}\|^2_{L^2(\bar{M})}.$$

Prima di dimostrare questo teorema, notiamo esplicitamente che:

(5.1.4) OSSERVAZIONE. La (ii) si puo' rienunciare dicendo che, posto

$$P_{\mathcal{K}}(\varpi\bar{f})^{\perp} = \varpi\bar{f} - P_{\mathcal{K}}(\varpi\bar{f}),$$

nelle ipotesi del teorema risulta, tenuto conto di (5.1.2):

$$\|P_{\mathcal{K}}(\varpi\bar{f})^{\perp}\|^2_{L^2(M)} > [8(h+1)^2]^{-1}\, \|\bar{f}\|^2_{L^2(\bar{M})}$$

per almeno una funzione $\bar{f}\in \mathcal{E}\setminus(0)$. Pertanto *se per tutte le funzioni $\bar{f}\in \mathcal{E}$ risulta:*

$$\|P_{\mathcal{K}}(\varpi\bar{f})^{\perp}\|^2_{L^2(M)} \leq [8(h+1)^2]^{-1}\, \|\bar{f}\|^2_{L^2(\bar{M})},$$

allora deve essere $N < k(h+1)$.

(5.1.5) OSSERVAZIONE. La dimensione ottimale N per cui valga (ii) va cercata fra kh+1 e k(h+1), infatti per $N = kh$ è possibile dare il seguente controesempio.

(5.1.6) ESEMPIO. Siano $U_1,\dots,U_k$ aperti disgiunti in M tali che per ogni $i=1,\dots,k$, $\pi^{-1}(U_i)$ sia unione disgiunta di aperti $U_i^1,\dots,U_i^h$ in $\bar{M}$ (è $U_i^p=s_p(U_i)$ $\forall\ p=1,\dots,h$). Se $\mathcal{K}$ è il sottospazio generato in $L^2(M)$ dalle funzioni caratteristiche degli U_i, per cui dim $\mathcal{K} = k$, e se $\mathcal{E}$ è il sottospazio generato in $L^2(\bar{M})$ dalle funzioni caratteristiche degli U_i^p, allora dim $\mathcal{E} = N = kh$, e chiaramente si ha:

$$\|P_{\mathcal{K}}(\varpi\bar{f})\|_{L^2(M)} = \|\bar{f}\|_{L^2(\bar{M})} \qquad \forall\ \bar{f}\in\mathcal{E}.$$

5.2. In questo n. 5.2 diamo la dimostrazione del teorema (5.1.3); a tal fine si utilizza il seguente risultato, dimostrato in [14]:

(5.2.1) LEMMA. *Se Q è una forma quadratica non negativa su* $\boldsymbol{R}^N$*, di rango* $h\le N$*, indicata con* (S^{N-1},can) *la sfera unitaria di* $\boldsymbol{R}^N$ *munita della metrica canonica indotta, si ha:*

$$\left[(\mathrm{Vol}\,S^{N-1})^{-1}\int_{S^{N-1}} (Q(s))^{1/2}ds\right]^2 \le [\gamma(h)/\gamma(N)]^2(\mathrm{Vol}\,S^{N-1})^{-1}\int_{S^{N-1}} Q(s)ds$$

dove $\gamma(x) = \sqrt{2/x}\,\dfrac{\Gamma((x+1)/2)}{\Gamma(x/2)}$, $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt.$

(5.2.2) OSSERVAZIONE. Il risultato del lemma è non banale se $h<N$ in quanto la funzione γ è crescente.

Dimostrazione del teorema (5.1.3),(i). $\forall\ x\in M$ la forma quadratica Q_x definita su $\mathcal{E}$ ponendo

$$Q_x(\bar{f}) = [(\varpi\bar{f})(x)]^2$$

ha rango h, essendo h il numero di fogli del rivestimento. Applicando a Q_x il lemma (5.2.1), in cui S^{N-1} è la sfera unitaria di $\mathcal{E}$ rispetto alla norma di $L^2(\bar{M})$, ed integrando su M si ha:

$$\int_M \Big[(\mathrm{Vol}\ S^{N-1})^{-1}\int_{S^{N-1}} (\varpi\bar{f})(x)ds\Big]^2 dv_g(x) \le$$

$$\le \int_M \Big(C(h,N)^2(\mathrm{Vol}\ S^{N-1})^{-1}\int_{S^{N-1}} [(\varpi\bar{f})(x)]^2 ds\Big)dv_g(x)$$

avendo posto $C(h,N) = \gamma(h)/\gamma(N)$. Per la diseguaglianza di Cauchy-Schwarz si ottiene:

$$\Big[(\mathrm{Vol}\ S^{N-1})^{-1}\int_{S^{N-1}}\Big(\int_M (\varpi\bar{f})(x)\ dv_g(x)\Big)ds\Big]^2 \le$$

$$\le C(h,N)^2\ \mathrm{Vol}\ M\ (\mathrm{Vol}\ S^{N-1})^{-1}\int_{S^{N-1}}\Big[\int_M((\varpi\bar{f})(x))^2 dv_g(x)\Big]ds$$

cioè per la (5.1.2) ed essendo $||\bar{f}||^2_{L^2(\bar{M})} = 1$ su S^{N-1}:

$$\Big[(\mathrm{Vol}\ S^{N-1})^{-1}\int_{S^{N-1}} ||\varpi\bar{f}||_{L^1(M)}ds\Big]^2 \le C(h,N)^2\ \mathrm{Vol}\ M$$

e quindi

$$||\varpi\bar{f}||_{L^1(M)} \le C(h,N)\ (\mathrm{Vol}\ M)^{1/2}$$

per almeno una $\bar{f}\in S^{N-1}$, donde la conclusione, ove si osservi che per ogni $\bar{f}\in \mathcal{E}\backslash\{0\}$ è $\bar{f}/||\bar{f}||_{L^2(\bar{M})}\in S^{N-1}$ e che

$$\varpi(\bar{f}/||\bar{f}||_{L^2(\bar{M})}) = \varpi\bar{f}/||\bar{f}||_{L^2(\bar{M})} = \varpi\bar{f}/||\varpi\bar{f}||_{L^2(M)}$$

per le (5.1.1),(5.1.2). _|

Dimostrazione del teorema (5.1.3),(ii). Per semplificare i calcoli supponiamo di aver moltiplicato la misura canonica di S^{N-1} per un fattore tale che $\mathrm{Vol}\ S^{N-1} = 1$.

Consideriamo, per $\varepsilon > 0$, la variazione $(\varpi\bar{f})_\varepsilon$ di $\varpi\bar{f}$ data da:

$$(\varpi\bar{f})_\varepsilon(x) = ([(\varpi\bar{f})(x)]^2 + \varepsilon^2)^{1/2}.$$

Per $f\in L^2(M)$ arbitraria, l'applicazione $\Phi_{\varepsilon,f} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbf{R}$ definita da:

(5.2.3) $$\Phi_{\varepsilon,f}(\bar{f}) = «f,(\varpi\bar{f})_\varepsilon»_M$$

è differenziabile. Scelta infatti una base $(\bar{f}_1,...,\bar{f}_N)$ $L^2(\bar{M})$-ortonormale in $\mathcal{E}$

per cui $\bar{f} = \sum_i z^i \bar{f}_i$, i=1,...,N, risulta, indicando con s_p , p=1,...,r le funzioni di cui in 4.1:

$$[(\varpi\bar{f})(x)]^2 + \varepsilon^2 = \sum_p \sum_{i,j} z^i z^j \bar{f}_i(s_p(x))\bar{f}_j(s_p(x)) + \varepsilon^2$$

e quindi:

$$\left(\frac{\partial\phi_{\varepsilon,f}}{\partial z^r}\right)(\bar{f}) = \int_{\bar{M}} \frac{(f\circ\pi)(y)}{[(\varpi\bar{f})_\varepsilon\circ\pi](y)}\, \bar{f}(y)\bar{f}_r(y)\, dv_{\bar{g}}(y) = \left\langle\!\left\langle \frac{f\circ\pi}{(\varpi\bar{f})_\varepsilon\circ\pi}\bar{f}, \bar{f}_r \right\rangle\!\right\rangle_{\bar{M}} .$$

Pertanto

$$(\mathrm{grad}\, \Phi_{\varepsilon,f})(\bar{f}) = [(f\circ\pi)/(\varpi\bar{f})_\varepsilon\circ\pi]\,\bar{f},$$

da cui

$$(5.2.4) \quad \|(\mathrm{grad}\, \Phi_{\varepsilon,f})(\bar{f})\|^2_{L^2(\bar{M})} = \int_{\bar{M}}\Big(\big[(f\circ\pi)(y)/((\varpi\bar{f})_\varepsilon\circ\pi)(y)\big]\,\bar{f}(y)\Big)^2 dv_{\bar{g}}(y) =$$

$$= \int_M \Big(f(x)\,[(\varpi\bar{f})(x)/(\varpi\bar{f})_\varepsilon(x)]\Big)^2 dv_g(x) \leq$$

$$\leq \|f\|^2_{L^2(M)}.$$

Restringiamo da ora le nostre considerazioni a funzioni $\bar{f}$ appartenenti alla sfera S^{N-1} di $\mathcal{E}$. Indicando con $\nabla\Phi_{\varepsilon,f}(\bar{f})$ la componente di $(\mathrm{grad}\, \Phi_{\varepsilon,f})(\bar{f})$ tangente ad S^{N-1} e con $(\nabla\Phi_{\varepsilon,f}(\bar{f}))^\perp$ la componente radiale lungo $\bar{f}\in S^{N-1}$, risulta:

$$(\nabla\Phi_{\varepsilon,f}(\bar{f}))^\perp = \langle\!\langle(\mathrm{grad}\, \Phi_{\varepsilon,f})(\bar{f}),\bar{f}\rangle\!\rangle^2_{\bar{M}}\, \bar{f}$$

quindi

$$\|(\nabla\Phi_{\varepsilon,f}(\bar{f}))^\perp\|^2_{L^2(\bar{M})} = \langle\!\langle(\mathrm{grad}\, \Phi_{\varepsilon,f})(\bar{f}),\bar{f}\rangle\!\rangle^2_{\bar{M}} = \langle\!\langle f,(\varpi\bar{f})^2/(\varpi\bar{f})_\varepsilon\rangle\!\rangle^2_M$$

e pertanto, tenuto conto di (5.2.4):

$$(5.2.5) \quad \|\nabla\Phi_{\varepsilon,f}(\bar{f})\|^2_{L^2(\bar{M})} = \|(\mathrm{grad}\, \Phi_{\varepsilon,f})(\bar{f})\|^2_{L^2(\bar{M})} - \|(\nabla\Phi_{\varepsilon,f}(\bar{f}))^\perp\|^2_{L^2(\bar{M})} \leq$$

$$\leq \|f\|^2_{L^2(M)} - \langle\!\langle f,(\varpi\bar{f})^2/(\varpi\bar{f})_\varepsilon\rangle\!\rangle^2_M.$$

Poiché ϖ è pari: $\varpi(-\bar{f})=\varpi\bar{f}$, è pari anche $\Phi_{\varepsilon,f}$, e pertanto si puo' passare al quoziente di S^{N-1} rispetto all'applicazione antipodale; il principio del minimax (2.3.6) insieme alla diseguaglianza di Cauchy-Schwarz (ricordiamo che Vol $S^{N-1}=1$) dà quindi:

$$\lambda_1(P^{N-1}(\mathbf{R}))\Big[\int_{S^{N-1}} (\Phi_{\varepsilon,f}(\bar{f}))^2 ds - \Big(\int_{S^{N-1}} \Phi_{\varepsilon,f}(\bar{f})ds\Big)^2\Big] \leq$$

$$\leq \int_{S^{N-1}} \|\nabla\Phi_{\varepsilon,f}(\bar{f})\|^2_{L^2(\bar{M})}ds$$

ove $\lambda_1(P^{N-1}(\mathbf{R}))$ è il primo autovalore non nullo dello spazio proiettivo $(P^{N-1}(\mathbf{R}),can)$, che vale 2N (cf. [4], p. 166). Pertanto, tenendo conto di (5.2.3) e (5.2.5) si ha, per $\varepsilon \longrightarrow 0$:

$$(2N+1)\int_{S^{N-1}} «f,\varpi\bar{f}»^2_M\, ds - 2N \Big(\int_{S^{N-1}}\Big[\int_M f(x)(\varpi\bar{f})(x)dv_g(x)\Big]ds\Big)^2 \leq \|f\|^2_{L^2(M)}$$

In altri termini abbiamo provato che per ogni $f \in L^2(M)$ risulta:

(5.2.6) $$(2N+1) \int_{S^{N-1}} «f,\varpi\bar{f}»^2_M\, ds \leq \|f\|^2_{L^2(M)} + 2N\, «f,S»^2_M$$

ove $\bar{f}$ percorre S^{N-1} e dove si è posto

(5.2.7) $$S(x) = \int_{S^{N-1}} (\varpi\bar{f})(x)\, ds.$$

Presa una base $(f_1,\ldots,f_k)$ $L^2(M)$-ortonormale in $\mathcal{K}$, applicando la (5.2.6) a ogni f_i e sommando per $i=1,\ldots,k$ si ha:

(5.2.8) $$(2N+1) \sum_i \int_{S^{N-1}} «f_i,\varpi\bar{f}»^2_M\, ds \leq k + 2N \sum_i «f_i,S»^2_M.$$

D'altra parte si ha:

$$\|P_{\mathcal{K}} S\|^2_{L^2(M)} = \sum_i «f_i,S»^2_M \leq \|S\|^2_{L^2(M)}$$

e, per il lemma (5.2.1),

$$\|S\|^2_{L^2(M)} = \int_M\Big[\int_{S^{N-1}} (\varpi\bar{f})(x)ds\Big]^2 dv_g(x) \leq$$

$$\leq C(h,N)^2\int_M\Big[\int_{S^{N-1}} [(\varpi\bar{f})(x)]^2 ds\Big]dv_g(x).$$

Quindi in definitiva la (5.2.8) dà

$$(2N+1)\int_{S^{N-1}} \|P_{\mathcal{K}}(\varpi\bar{f})\|^2_{L^2(M)}ds \leq k + 2N\, C(h,N)^2\int_{S^{N-1}} \|\varpi\bar{f}\|^2_{L^2(M)}ds =$$

$$= k + 2N\, C(h,N)^2.$$

Ricordando che $C(h,N) = \gamma(h)/\gamma(N)$, le proprietà della funzione γ comportano (cf. [14]) che $C(h,N)^2 \leq (2N+1/2N)(h/h+1)^{1/2}$; questa e l'ipotesi $N \geq k(h+1)$ danno allora dall'ultima diseguaglianza:

$$\int_{S^{N-1}} \|P_{\mathcal{K}}(\varpi\bar{f})\|^2_{L^2(M)}\, ds < 1 - [8(h+1)^2]^{-1}$$

e quindi la conclusione. _|

6. RISULTATI SPETTRALI SUI RIVESTIMENTI RIEMANNIANI.

6.1. Per una Varietà X indichiamo con $E^*_X(\mu^*)$ l'autospazio relativo all'autovalore $\mu^* \in \mathrm{Spec}^* X$ e con $N^*_X(\lambda)$ il numero degli autovalori μ^* tali che $\mu^* < \lambda$, $\lambda \in \mathbf{R}$ (* sta ad indicare il problema relativo ad una varietà chiusa se $\partial X = \emptyset$, il problema di Dirichlet se $\partial X \neq \emptyset$). Vogliamo dimostrare che, utilizzando le notazioni introdotte in 5.1 e sotto le ipotesi ivi considerate, risulta:

(6.1.1) TEOREMA. $\qquad N^*_{\bar{M}}(\lambda) \leq N^*_M[8(h+1)^2\lambda](h+1) - 1.$

Dim. Consideriamo i seguenti spazi:

$\mathcal{E}^* = \oplus E^*_{\bar{M}}(\bar{\lambda}^*_i)$, la somma essendo estesa a tutti i $\bar{\lambda}^*_i < \lambda$: $\mathcal{E}$ è un sottospazio vettoriale di $L^2(\bar{M})$ di dimensione $N^*_{\bar{M}}(\lambda)$;

$\mathcal{K}^* = \oplus E^*_M(\lambda^*_i)$, somma per $\lambda^*_i < 8(h+1)^2\lambda$: $\mathcal{K}$ è un sottospazio vettoriale di $L^2(M)$ di dimensione $N^*_M[8(h+1)^2\lambda]$.

Le forme quadratiche $\|df\|^2_{L^2(M)}$, $\|d\bar{f}\|^2_{L^2(\bar{M})}$ (i cui spettri coincidono con $\mathrm{Spec}^* M$ e $\mathrm{Spec}^* \bar{M}$ rispettivamente, v. 2.3) sui sottospazi $H^1_*(M)$ di $L^2(M)$ e $H^1_*(\bar{M})$ di $L^2(\bar{M})$ sono tali che:

$$\|d(\varpi\bar{f})\|^2_{L^2(M)} \leq \|d\bar{f}\|^2_{L^2(\bar{M})},$$

come si prova in modo analogo a quello usato per dimostrare la (4.1.3) (si osservi che $\varpi(H^1{}_*(\bar{M}))\subset H^1{}_*(M)$ per la definizione (5.1.1) di ϖ).

Inoltre su $\mathcal{E}^*\subset H^1{}_*(\bar{M})$, $\mathcal{K}^*\subset H^1{}_*(M)$ si ha:

a) $||d(\varpi\bar{f})||^2{}_{L^2(M)} \le ||d\bar{f}||^2{}_{L^2(\bar{M})} < \lambda||\bar{f}||^2{}_{L^2(\bar{M})} \quad \forall\ \bar{f}\in \mathcal{E}^*$,

infatti se $\bar{f}\in \mathcal{E}^*$, anche $\Delta_{\bar{M}}\bar{f}\in \mathcal{E}^*$ e risulta

$$||d\bar{f}||^2{}_{L^2(\bar{M})} = «\Delta_{\bar{M}}\bar{f},\bar{f}»_{\bar{M}} < \lambda||\bar{f}||^2{}_{L^2(\bar{M})};$$

b) $||df||^2{}_{L^2(M)} \ge [8(h+1)^2\lambda]\ ||f||^2{}_{L^2(M)} \quad \forall\ f\in \mathcal{K}^{*\perp} = \oplus\ E^*{}_M(\lambda^*{}_i)$, somma per $\lambda^*{}_i \ge 8(h+1)^2\lambda$;

c) se $f\in L^2(M)$ è $L^2(M)$-ortogonale a $\mathcal{K}^*$, allora f è anche ortogonale a $\mathcal{K}^*$ rispetto alla forma quadratica $||df||^2{}_{L^2(M)}$, infatti se $\phi\in \mathcal{K}^*, f\in \mathcal{K}^{*\perp}$ si ha $\Delta_M\phi\in \mathcal{K}^*, \Delta_M f\in \mathcal{K}^{*\perp}$ e quindi

$$||d(\phi+f)||^2{}_{L^2(M)} = «\Delta_M(\phi+f),\phi+f»_M = «\Delta_M\phi,\phi»_M + «\Delta_M f,f»_M =$$
$$= ||d\phi||^2{}_{L^2(M)} + ||df||^2{}_{L^2(M)}.$$

Ma allora, considerata la proiezione $L^2(M)$-ortogonale $P_{\mathcal{K}^*}: L^2(M) \longrightarrow \mathcal{K}^*$, si ha $\varpi\bar{f} - P_{\mathcal{K}^*}(\varpi\bar{f}) \in \mathcal{K}^{*\perp} \quad \forall \bar{f}\in \mathcal{E}^*$ e quindi, applicando successivamente b),c) ed a):

$$[8(h+1)^2\lambda]\ ||\varpi\bar{f} - P_{\mathcal{K}^*}(\varpi\bar{f})||^2{}_{L^2(M)} \le ||d(\varpi\bar{f} - P_{\mathcal{K}^*}(\varpi\bar{f})||^2{}_{L^2(M)} =$$
$$= ||d(\varpi\bar{f})||^2{}_{L^2(M)} - ||d(P_{\mathcal{K}^*}(\varpi\bar{f})||^2{}_{L^2(M)} \le \lambda||\bar{f}||^2{}_{L^2(\bar{M})}$$

cioè, ricordando la (5.1.2):

$$8(h+1)^2\Big(||\bar{f}||^2{}_{L^2(\bar{M})} - ||P_{\mathcal{K}^*}(\varpi\bar{f})||^2{}_{L^2(M)}\Big) \le ||\bar{f}||^2{}_{L^2(\bar{M})}$$

da cui

$$||P_{\mathcal{K}^*}(\varpi\bar{f})||^2{}_{L^2(M)} \ge [1 - (8(h+1)^2)^{-1}]\ ||\bar{f}||^2{}_{L^2(\bar{M})}$$

e la conclusione per l'osservazione (5.1.4) al teorema (5.1.3). _|

Come conseguenza immediata del teorema (6.1.1) abbiamo allora la stima degli autovalori di $\bar{M}$ tramite gli autovalori di M:

$$(6.1.2) \qquad \bar{\lambda}^*{}_{i(h+1)} > [8(h+1)^2]^{-1}\lambda^*{}_{i+1} \quad \forall \quad i\in \mathbf{N}.$$

6.2. Diamo ora una dimostrazione, differente da quella data da TYSK in [19], della diseguaglianza di Kato. Precisamente, dato un rivestimento riemanniano π: $(\bar{M},\bar{g}) \longrightarrow (M,g)$ ad h fogli non ramificato della varietà riemanniana connessa compatta (M,g), e considerati gli spettri $\mathrm{Spec}^* \bar{M} = \{\bar{\lambda}^*_i\}_{i\in \mathbf{N}^*}$, $\mathrm{Spec}^* M = \{\lambda^*_i\}_{i\in \mathbf{N}^*}$ (* sta ad indicare il problema senza bordo o rispettivamente di Dirichlet se $\partial M \neq \emptyset$) dimostriamo che:

(6.2.1) TEOREMA. $\qquad \sum_{0}^{\infty}{}_i\, e^{-\bar{\lambda}_i^* t} \leq h \sum_{0}^{\infty}{}_i\, e^{-\lambda_i^* t} \qquad \forall\ t>0.$

Dim. Sia $k^*(t,x,x')$ il nucleo dell'equazione del calore su M cioè (cf. [2], p.98-99, e [7] per il caso a bordo) l'unica funzione continua su $\mathbf{R}_+ xMxM$, con le opportune condizioni di annullamento sul bordo se $\partial M \neq \emptyset$, di classe C^1 rispetto a t e C^2 rispetto ad x , che sia soluzione dell'equazione del calore:

(6.2.2) $\qquad \partial/\partial t + \Delta_x = 0 \qquad$ (con condizioni di Dirichlet se $\partial M \neq \emptyset$)

per la quale si abbia, per $t \longrightarrow 0^+$:

$$\lim k^*(t,x,x') = \delta_x(x') \qquad \text{(massa di Dirac)}$$

nel senso che $\forall\ \phi \in C^\infty{}_*(M)$ risulti

(6.2.3) $\qquad \lim \int_M k^*(t,x,x')\, \phi(x')\, dv_g(x') = \phi(x) \qquad$ per $t \longrightarrow 0^+$.

Indichiamo con $\bar{k}^*(t,y,y')$ il nucleo dell'equazione del calore su $\bar{M}$. Fissato $\bar{y} = s_{i_0}(x) \in \pi^{-1}(x)$, poniamo:

(6.2.4) $\qquad f^*(t,x,x') = \sum_p \bar{k}^*(t, s_{i_0}(x), s_p(x'))$

essendo s_p le funzioni definite in 4.1, p=1,...,h; osserviamo che $f^*(t,x,x')$ non dipende dalla scelta di $\bar{y}$ in $\pi^{-1}(x)$ essendo M ed $\bar{M}$ localmente isometriche. La funzione f^* è continua su $\mathbf{R}_+ xMxM$, nulla sull'eventuale bordo, C^1 rispetto a t e C^2 rispetto ad x per costruzione; f^* verifica l'equazione (6.2.2) in quanto, tenuto conto che $\Delta_x = \bar{\Delta}_{\bar{y}}$ essendo $M,\bar{M}$

isometriche, si ha:

$$(\partial/\partial t + \Delta_x) f^*(t,x,x') = \Sigma_p (\partial/\partial t + \bar{\Delta}_{\bar{y}}) \bar{k}^*(t,\bar{y},s_p(x')) = 0;$$

infine risulta $\forall\ \phi \in C^\infty{}_*(M)$, per il teorema di Fubini:

$$\int_M f^*(t,x,x')\, \phi(x')\, dv_g(x') = \int_{\bar{M}} \bar{k}^*(t,\bar{y},y')(\phi\circ\pi)(y')\, dv_{\bar{g}}(y')$$

che tende a $(\phi\circ\pi)(\bar{y}) = \phi(x)$ per $t \longrightarrow 0^+$.

Per l'unicità del nucleo del calore si ha quindi:

$$f^*(t,x,x') = k^*(t,x,x').$$

Ma allora per $x' = x$ si ha, considerata la positività di $\bar{k}^*$:

$$\bar{k}^*(t,\bar{y},\bar{y}) \le \Sigma_{y'\in\pi^{-1}(x)} \bar{k}^*(t,\bar{y},y') = k^*(t,x,x)$$

e quindi (cf. [2], p.100):

$$\sum_{0}^{\infty}{}_i\, e^{-\bar{\lambda}^*{}_i t} = \int_{\bar{M}} \bar{k}^*(t,\bar{y},\bar{y})\, dv_{\bar{g}}(\bar{y}) = \int_M \Sigma_{\bar{y}\in\pi^{-1}(x)} \bar{k}^*(t,\bar{y},\bar{y})\, dv_g(x) \le$$

$$\le h \int_M k^*(t,x,x)\, dv_g(x) = \sum_{0}^{\infty}{}_i\, e^{-\lambda_i{}^* t}\ . \;\_|$$

6.3. In base alle osservazioni del n. 4.3 possiamo concludere che *i risultati ottenuti, in particolare (6.1.2) e (6.2.1), valgono anche per rivestimenti riemanniani ramificati ad h fogli il cui insieme di ramificazione abbia capacità nulla* (si noti che in base all'osservazione al teorema (3.3.1) quest'ipotesi è meno restrittiva di quella usata in [19] di codimensione ≥ 2 per dimostrare (6.2.1)).

7. UN'APPLICAZIONE ALLE SUPERFICIE MINIMALI DI $\mathbb{R}^3$.

7.1. Sia M una superficie in $\mathbb{R}^3$ ed indichiamone con A la II forma quadratica fondamentale e con k la curvatura gaussiana. Se K è un compatto in M, l'*indice* di K è il numero degli autovalori negativi relativi al problema di Dirichlet:

(7.1.1) $$(\Delta_M - |A|^2)f = \mu_i f \quad \text{su } K, \qquad f|_{\partial K} = 0,$$

cioè se $\Delta_M f = \lambda^D{}_i f$, $|A|^2 f = \beta^D{}_i f$, $f|_{\partial K} = 0$, è il numero degli autovalori $\lambda^D{}_i$ minori di $\beta^D{}_i$. Se $\{K_r\}_{r\in \mathbf{N}}$ è una successione di compatti che invade M, l'indice di M è per definizione il limite per $r \longrightarrow +\infty$ degli indici dei K_r:

(7.1.2) $$\text{ind } M = \lim_r \text{ind } K_r.$$

7.2. Restringendo le considerazioni alle superficie minimali, poiché non esistono superficie minimali compatte senza bordo in $\mathbf{R}^n$ (cf. [16], p. 101), prenderemo in esame superficie minimali non compatte, complete nella metrica indotta. Si ha allora (v. [16], p. 135):

(7.2.1) TEOREMA. *Se M è una superficie minimale completa in $\boldsymbol{R}^n$, la sua curvatura totale c, se non è infinita, è un multiplo intero di 2π (si noti che per M è $k<0$, cf. [16] p. 127):*

$$c = \int_M k\, ds = -2\pi q, \qquad q \in \mathbf{N}^* \cup \{\infty\};$$

in particolare risulta per $n=3$:

(7.2.2) $$c = -4\pi h, \qquad h \in \mathbf{N}^* \cup \{\infty\}.$$

D'altra parte FISHER COLBRIE in [11] ha dimostrato che:

(7.2.3) TEOREMA. *Una superficie minimale completa M di $\boldsymbol{R}^3$ ha indice finito se e solo se ha curvatura totale finita.*

Ha quindi senso chiedersi come l'indice di M vari rispetto alla curvatura totale, in particolare rispetto all'intero h di (7.2.2). Si ha (cf. [19]):

(7.2.4) TEOREMA. *Per una superficie minimale completa M di $\boldsymbol{R}^3$ risulta:*

$$\text{ind } M \leq Ch$$

ove C è una costante che non dipende da M.

Dim. Sia h finito. Per un teorema di OSSERMAN (cf. [16] p. 153), M è conforme ad una superficie di Riemann compatta $\bar{M}$ privata di un numero finito di punti. L'applicazione di Gauss si estende ad un'applicazione conforme $G : \bar{M} \longrightarrow S^2$ olomorfa sicché $\bar{M}$ è un rivestimento ramificato ad h fogli di S^2 il cui insieme di ramificazione è costituito dai punti isolati in cui $k = 0$. Assumendo su $\bar{M}$ la metrica indottavi da (S^2, can) tramite G ed indicando con $\{\mu_i\}, \{\lambda_i\}$, $i \in \mathbf{N}^*$, gli autovalori di $\bar{M}$ ed S^2 rispettivamente, si ha per (6.2.1):

$$\sum_{0}^{\infty}{}_i e^{-\mu_i t} \leq h \sum_{0}^{\infty}{}_i e^{-\lambda_i t} \qquad \forall\ t > 0.$$

Per una superficie minimale M è, per la formula di Gauss-Codazzi:

$$|A|^2 = -2k$$

quindi l'indice di un dominio compatto $K \subset M$, cioè il numero degli autovalori negativi dell'operatore

$$\Delta_M - |A|^2 = \Delta_M + 2k,$$

è lo stesso che l'indice del dominio corrispondente in $\bar{M}$ per l'operatore

$$\Delta_{\bar{M}} - 2$$

(in quanto $G^*(ds^2{}_{S^2}) = -k(ds^2{}_{\bar{M}})$ e $\Delta_M = -k\Delta_{\bar{M}}$) ed è pertanto il numero degli autovalori di $\bar{M}$ che sono < 2.

Per passaggio al limite su una successione di compatti invadente M, si ha che lo stesso accade per l'indice di M.

Pertanto $\forall\ t > 0$ si ha:

$$(\text{ind } M)\, e^{-2t} \leq \sum_{\mu_i < 2} e^{-\mu_i t} \leq \sum_{0}^{\infty}{}_i e^{-\mu_i t} \leq h \sum_{0}^{\infty}{}_i e^{-\lambda_i t}$$

e cioè

$$\text{ind } M \leq Ch$$

dove si è posto $C = \inf_{t>0} e^{2t} \sum_{0}^{\infty}{}_i e^{-\lambda_i t}$. ⌋

In [19] TYSK dà una stima esplicita di C: tenendo conto del fatto che l'i-mo autovalore distinto di S^2 vale $i(i+1)$ ed ha molteplicità $2i+1$ (cf. [4], p. 160-162), si trova $C = 7{,}68183...$.

BIBLIOGRAFIA

[1] BERARD BERGERY L. and BOURGUIGNON J.P. - *Laplacian and riemannian submersions with totally geodesic fibers.* Illinois Journ. of Math. **26** (1982), 181-200

[2] BERARD P. - *Spectral geometry: direct and inverse problem.* Lecture Notes in Math. **1207**, Springer Berlin-Heidelberg, 1986

[3] BERARD P. et GALLOT S. - *Inégalités isopérimetriques pour l'équation de la chaleur et applications à l'estimation de quelques invariants géométriques.* In: Séminaire Goulaouic-Meyer-Schwarz 1983-1984, exposé n. XV, Ecole Polytechnique, Palaiseau, 1984

[4] BERGER M., GAUDUCHON P. et MAZET E. - *Le spectre d'une variété riemannienne.* Lecture Notes in Math. **194**, Springer Berlin-Heidelberg, 1971

[5] BESSON G. - *A Kato type inequality for riemannian submersions with totally geodesic fibers.* Ann. Glob. Analysis and Geometry, vol. 4 No. 3, (1986), 273-289

[6] BORDONI M. - *Bounding from below the spectrum of a riemannian covering* . Apparirà nei Proceedings of International Conference on Differential Geometry and Applications, Dubrovnik, 1988

[7] CHAVEL I. - *Eigenvalues in riemannian geometry,* Academic Press, New York, 1984

[8] CHAVEL I. and FELDMAN E.A. - *Spectra of manifols less a small hole.* Preprint, New York, 1986

[9] CHOQUET G. - *Lectures on analysis* , vol. I, Benjamin New York, 1969

[10] COURTOIS G.- *Comportement du spectre d'une variété riemannienne compacte sous perturbation topologique par excision d'un domaine.* Thèse de doctorat, Institut Fourier, Grenoble, 1987

[11] FISHER COLBRIE D. - *On complete minimal surfaces with finite Morse index in three manifolds.* Inv. Math. **82** (1985), 121-132

[12] GALLOT S. - *Inégalités isopérimetriques et analytiques sur les variétés riemanniennes.* Apparirà in Asterisque

[13] GALLOT S., HULIN D. and LAFONTAINE J. - *Riemannian geometry.* Universitext, Springer Berlin-Heidelberg, 1987

[14] GALLOT S. et MEYER D. - *D'un résultat hilbertien à un principe de comparaison entre spectre. Applications.* Séminaire de l'Institut Fourier, n. 82, Grenoble, 1987

[15] HESS H., SCHRADER R. and UHLENBROCK D.A. - *Kato's inequality and the spectral distributions of laplacians on compact riemannian manifolds.* J. Diff. Geom. **15** (1980), 27-38

[16] LAWSON H.B. Jr. - *Lectures on minimal surfaces.* Publish or perish Berkeley, 1980

[17] RAUCH J. and TAYLOR M. - *potential and scattering on wildly perturbed domains.* J. Funct. Anal., **18** (1975), 27-59

[18] REED M. and SIMON S. - *Methods of modern mathematical physics,* vol. I-IV, Academic Press New York, 1978
[19] TYSK J. - *Eigenvalues estimate with applications to minimal surfaces.* Preprint, UCLA, 1986