Capitolo III. *Gli insiemi nella Teoria alternativa.*

1) Gli insiemi finiti.

Si è detto delle "difficoltà" presentate dalla Matematica classica. Gli atteggiamenti possono allora essere di due sorte diverse: cercare di trovare una soluzione ai problemi oppure prendere coscienza dei limiti e cercare una risposta diversa. La posizione di Vopěnka è la seconda, ispirata, a suo dire, dall'opera di Husserl (cfr. [Hu]) e, per certi versi, ricorda la posizione filosofica di Kant: rinunciare alla metafisica dogmatica perché al di là della portata umana. Dunque abbandoniamo l'aspirazione a conoscere l'inconoscibile mondo degli infiniti matematici e prendiamo atto che anche in teorie assai semplici vi sono i "germi" dei problemi che portano a renderci conto delle limitate capacità umane di discriminazione concettuale.

Però, visto che la proposta insiemistica per la fondazione della Matematica è efficace, cerchiamo di ripresentare la Matematica in questo contesto in cui assumiamo, proprio per evitare la gerarchia degli infiniti, che *ogni insieme è finito*.

Devo aprire qui una parentesi per chiarire questo concetto. Una delle più consuete definizioni di insieme finito è la seguente: un insieme è *finito* se può essere messo in corrispondenza biunivoca con un sottinsieme di $\mathbb{N}$ dotato di massimo, o più semplicemente, con un segmento iniziale di numeri naturali. Ma tale definizione richiede già i numeri naturali e quindi tutti i loro problemi. Vi è una diversa definizione: un insieme a è *finito* se non esiste un sottinsieme proprio b di a, con b equipotente ad a. In altro modo se ogni funzione iniettiva $f : a \to a$ è anche suriettiva. Le due versioni, quella coi numeri naturali e quella con il sottinsieme o le funzioni iniettive *non* sono equivalenti nella teoria **Z**, né in **ZF**, e neppure in **NBG**, richiedendo l'assioma di scelta per provare l'equivalenza delle definizioni. Inoltre la seconda rende difficili considerazioni abbastanza intuitive. Ci sono difficoltà, ad esempio nel mostrare che se $a,b \neq \emptyset$, allora $a \times b$ è finito se e solo se sia a che b sono finiti.

Dunque non si tratta di definizioni applicabili in un contesto fondazionale. Vopěnka ritrova nell'opera di Whitehead e Russell [WR] la definizione che gli serve: una formula $\varphi(x)$ si dice *induttiva* se $\varphi(\emptyset) \wedge (\forall x)(\forall y)(\varphi(x) \Rightarrow \varphi(x \cup \{y\}))$. Ad esempio la formula $x \neq \emptyset \Rightarrow (\exists z)(z \in x)$ è induttiva: $\emptyset \neq \emptyset \Rightarrow (\exists z)(z \in x)$ e poi $(x \neq \emptyset \Rightarrow (\exists z)(z \in x)) \Rightarrow (x \cup \{y\} \neq \emptyset \Rightarrow (\exists z)(z \in x \cup \{y\}))$.

Si pone allora

DEFINIZIONE. Un insieme a è *induttivo* se per ogni formula induttiva $\varphi(x)$, si ha $\varphi(a)$.

Si può provare, e l'ha fatto Tarski nel 1924 (cfr. [T]), che

TEOREMA. Sono equivalenti in **ZF**(e in **NBG**):

(a) l'insieme a è equipotente ad un segmento iniziale di naturali;
(b) a è induttivo;
(c) Per ogni $b \subseteq \mathcal{P}(a)$, se $b \neq \emptyset$, esiste $x \in b$ tale che per ogni $y \in b$, non si ha $y \subseteq x$ e $y \neq x$.

Dunque il fatto di essere induttivo equivale classicamente al fatto di essere finito.

Tra gli assiomi della teoria alternativa vi sarà la richiesta che ogni insieme sia induttivo, cioè finito. Per formularla bisogna però chiarire prima quali formule bisogna prendere in considerazione.

2) I primi assiomi della teoria alternativa.

Vediamo nel dettaglio gli assiomi messi esplicitamente da Vopěnka, non senza avere chiarito in parte il contesto filosofico in cui si muove. L'idea di fondo è l'accettazione dell'approccio fenomenologico (nel senso di Husserl, cfr. [Hu]), ma non solo di quello, perché riconosce alla Matematica la funzione di strumento atto a sorpassare l'orizzonte dell'esperienza umana, ad esempio per esprimere giudizi che precedono la conoscenza e spesso sono impossibili da verificare. Così nella Matematica alternativa, pur tenendo ben presente l'esistenza delle limitazioni, bisogna considerare anche principi ideali che sorpassino l'orizzonte del raggiungibile

La Teoria Alternativa degli insiemi prende spunto dagli oggetti e dalle relazioni tra essi che esistono nella nostra mente. Se con Φ, Ψ, ecc. si indicano gli oggetti [3], $\Phi = \Psi$ significa che Φ e Ψ denotano lo stesso oggetto, mentre $\Phi \neq \Psi$ vuol dire che Φ e Ψ denotano oggetti distinti. Viene usata la consueta "macchineria" logica, in particolare si accetta la Logica classica. Così $\varphi(\Phi)$ e $\varphi(\Phi_1,...,\Phi_n)$ denotano, rispettivamente, proprietà di oggetti e relazioni tra gli oggetti.

Gli insiemi sono oggetti specifici che obbediscono a certi criteri costruttivi e la relazione di appartenenza è una relazione tra oggetti ed insiemi. Si assume l'esistenza di un insieme che non ha elementi e lo si indica con Ø. Gli altri insiemi si costruiscono come segue: supposto di aver già costruiti degli oggetti si può "ordinarli" in una *lista* o può essere immaginata una tale lista. In queste condizioni è costruito un nuovo insieme, quello degli oggetti presi dalla lista, che è distinto da ciascuno degli oggetti nella lista. Il nuovo insieme non dipende dall'ordine con cui si sono considerati gli oggetti nella lista, ma è unicamente determinato dai suoi elementi. Perciò se Φ e Ψ sono insiemi ed hanno gli stessi elementi, allora $\Phi = \Psi$. La notazione per gli insiemi ottenuti da liste è quella "consueta": $\{\Phi_1,\Phi_2,...,\Phi_n\}$ denota l'insieme costituito esattamente da tutti gli oggetti $\Phi_1,\Phi_2,...,\Phi_n$.

Dopo questa definizione generale che lascia molti dubbi in quanto basata su un concetto intuitivo e non ben precisato, quello di lista, e fa intervenire, almeno in fase di scrittura, i numeri naturali, Vopěnka introduce un nuovo tipo di insiemi, più "matematico" e più matematicamente determinato. Parte "male" dicendo: l'*universo degli insiemi* è formato da insiemi costruiti iterativamente a partire dall'insieme vuoto.

Questa definizione è poco "utilizzabile". Ma Vopěnka aggiunge: non affermo che l'universo degli insiemi contenga tutti i possibili insiemi, ma solo quelli che bastano per la costruzione della Matematica e la restrizione ad essi fornisce vantaggi dimostrativi notevoli. Finalmente il nostro autore scrive esplicitamente degli assiomi il cui scopo è di fornire una de-

[3] Nel testo di Vopěnka gli oggetti vengono indicati con lettere latine maiuscole, poi riservate a un certo tipo di classi. Forse la macchina da scrivere di Vopěnka non ha lettere greche, che qui invece io propongo.

scrizione implicita dell'universo degli insiemi. Dapprima una precisazione di scrittura: con le lettere minuscole indico gli insiemi dell'universo degli insiemi e Set(Φ) vuol dire che Φ è un insieme. Dunque in sostanza si introduce una nuova sorta di variabili o un altro "trucco" per distinguere tra i generici oggetti, i generici insiemi e gli insiemi "più belli" degli altri, quelli dell'universo degli insiemi.

Gli assiomi sono allora

V1	$(\forall x)(\forall y)(x=y \Leftrightarrow (\forall z)(z\in x \Leftrightarrow z\in y))$
V2	$(\exists x)(\forall \Phi)(\Phi \notin x)$
V3	$(\forall x)(\forall y)(\exists z)(\forall w)(w\in z \Leftrightarrow(w\in x \vee w=y))$

Quest'ultimo assioma chiede che, dati x ed y l'esistenza di un insieme x%y i cui elementi sono y e tutti gli insiemi che sono elementi di x. Si pone poi {y} = Ø%y, {x,y} = {x}%y. Faccio notare che fin qui non si è escluso che un elemento dell'universo degli insiemi possa essere un oggetto che non sia un insieme dell'universo degli insiemi, dunque il primo assioma non esclude che due insiemi possano avere elementi diversi ed essere eguali. Forse l'idea è che essendo ogni insieme dell'universo degli insiemi costruito a partire dal vuoto iterando la costruzione di liste, ogni elemento di un insieme dell'universo degli insiemi sia un insieme dell'universo degli insiemi. Tuttavia questa richiesta esplicita non è presente in nessun punto del testo di Vopěnka.

DEFINIZIONE. Le *formule insiemistiche* (f.i.) sono le espressioni costruibili per mezzo delle seguenti regole:

1) $x = y$ e $x\in y$ sono f.i.;
2) se φ e ψ sono f.i., allora $(\neg\varphi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \Rightarrow \psi)$, $(\varphi \Leftrightarrow \psi)$, $(\forall x)\varphi$ e $(\exists x)\varphi$ sono f.i.;
3) le formule che si ottengono sostituendo in 1) e 2), in luogo di x e y altre variabili minuscole sono f.i.

E' necessaria questa definizione sulle formule per fornire l'importante <u>Assioma d'induzione</u>: sia $\varphi(x)$ una proprietà insiemistica, cioè esprimibile con una f.i., allora

$$\boxed{\textbf{V4}\ \ (\varphi(\emptyset) \wedge (\forall x)(\forall y)(\varphi(x) \Rightarrow \varphi(x\%y))) \Rightarrow (\forall x)\varphi(x)}$$

In parole povere ogni formula insiemistica $\varphi(x)$ induttiva è tale che $\varphi(x)$ è soddisfatta da tutti gli insiemi dell'universo degli insiemi. L'uso di $x\%y$ in luogo di $x \cup \{y\}$, come nel testo di Vopěnka è dovuto al fatto che finora non è introdotto un simbolo ed un'operazione di unione.

Con questi assiomi si ottiene, parlando "in **ZF**", l'insieme di tutti gli insiemi *ereditariamente* finiti, cioè insiemi finiti che hanno per elementi insiemi finiti, che, a loro volta, hanno per elementi insiemi finiti, e così via. In **ZF** si tratta di un insieme numerabile costruito come segue: si definisce $v_0 = \emptyset$ e $v_{n+1} = \mathcal{P}(v_n)$, allora si pone $v_\omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} v_n$. Ogni v_n è un insieme finito dato che $|v_0| = 0$ e se v_n è finito, v_{n+1} è finito perché ha $|v_{n+1}| = 2^{|v_n|}$. Tutte queste considerazioni sono fatte in **ZF**.

Tornando alla teoria alternativa, grazie agli assiomi assunti si possono dimostrare le seguenti (ed altre) affermazioni:

$(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z\in y \Leftrightarrow (\exists w)(w\in x \wedge z\in w))$ (unione unaria)

$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\varphi(x,y)\wedge\varphi(x,z) \Rightarrow y=z) \Rightarrow$

$\Rightarrow (\forall x)(\exists y)(\forall z)(z\in y \Leftrightarrow (\exists w)(w\in x \wedge \varphi(w,z)))$ (rimpiazzamento)

$(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z\in y \Leftrightarrow (z\in x \wedge \varphi(z)))$ (isolamento)

$(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z\in y \Leftrightarrow z\subseteq x\ )$ (parti).

Queste sono proprietà dimostrabili anche in **ZF** sugli insiemi ereditariamente finiti, ma non estendibili in generale a tutti gli insiemi. Qui gli insiemi dell'universo degli insiemi "esauriscono" gli insiemi considerabili, dunque queste proprietà sono riconducibili, dimostrativamente, agli assiomi considerati. Si provano poi altre affermazioni importanti quali

$$\neg(\exists x)(\forall y)(y\in x),$$

cioè non esiste un insieme di tutti gli insiemi; questa affemazione, col teorema di isolamento permette di concludere che non si ripresenta il paradosso di Russell.

Introdotte poi le solite definizioni di relazione, funzione, iniezione e biezione, si prova che se $a \subseteq b$ e $a\neq b$, allora a non è equipotente a b, per rafforzare l'assunzione che tutti gli insiemi dell'universo degli insiemi sono classicamente finiti. Inoltre dati a e b si ha sempre che a è suvvalente a b oppure b è suvvalente ad a, oppure sono equipotenti, cioè esiste