1. Varietà analitiche e problemi variazionali connessi

Prima conversazione

In questa conversazione diamo una definizione di varietà analitica con peso intero immersa in $\mathbf{R}^n$ (vedi Definizione 4) che sembra conveniente nello studio dei problemi variazionali (vedi Congettura 7). È ovviamente assai probabile che definizioni analoghe alla Definizione 4 e problemi analoghi a quelli considerati nella Congettura 7 siano già noti nella letteratura matematica.

Indichiamo con $\mathcal{A}(\mathbf{R}^n)$ la famiglia degli aperti di $\mathbf{R}^n$ e con $\mathcal{K}(\mathbf{R}^n)$ la famiglia dei compatti di $\mathbf{R}^n$. Per ogni $A \in \mathcal{A}(\mathbf{R}^n)$ indichiamo con $C^\omega(A)$ lo spazio delle funzioni analitiche reali in A. Data una funzione v poniamo

$$\mathrm{dom} C^\omega(v) = \cup\{A \in \mathcal{A}(\mathbf{R}^n); v \in C^\omega(A)\}.$$

In maniera analoga si definisce $\mathrm{dom} C^k(v)$ per ogni $k \in \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$.

Per $h \in \mathbf{N}$ con $0 \le h \le n$, sia $\mathcal{H}^h$ la misura h-dimensionale di Hausdorff. Indichiamo con $B^h_\rho(x)$ la sfera $\{y \in \mathbf{R}^h; |y - x| < \rho\}$ e poniamo $\omega_h = \mathcal{H}^h(B^h_1(x))$.

Nel seguito consideriamo Ω fissato in $\mathcal{A}(\mathbf{R}^n)$.

Definizione 1. *Definiamo $SL_h(\Omega)$ la classe delle funzioni $v \in L^1_{loc}(\Omega, d\mathcal{H}^h)$ tali che si abbia*

$$\mathrm{dom}\ v \cap \Omega = \{x \in \Omega : \text{esiste finito} \lim_{\rho \to 0} \rho^{-h} \int_{B^n_\rho(x)} v(\xi)\ d\mathcal{H}^h(\xi)\},$$

ed inoltre risulti, per ogni $x \in \mathrm{dom}\ v \cap \Omega$,

$$v(x) = \lim_{\rho \to 0} \frac{1}{\omega_h \rho^h} \int_{B^n_\rho(x)} v(\xi)\ d\mathcal{H}^h(\xi).$$

Definizione 2. *Date $(f_j)_{j \in \mathbf{N}}$ e f_∞, diciamo che $f_j \to f_\infty$ in $SL_h(\Omega)$ se e solo se $f_j, f_\infty \in SL_h(\Omega)$ e*

$$\lim_{j \to +\infty} \int_\Omega g\ f_j\ d\mathcal{H}^h = \int_\Omega g\ f_\infty\ d\mathcal{H}^h$$

per ogni $g \in C^0_0(\Omega)$.

Assegnata una funzione v definiamo, per ogni $x \in \mathbf{R}^n$,

$$DSv(x) = \frac{1}{2}\left[\mathrm{dist}(x, \mathrm{supp}\ v)\right]^2,$$

dove con $\mathrm{supp}\, v$ si è indicato il supporto di v.

Definizione 3. *Definiamo $V_h C^\omega(\Omega)$ la classe degli insiemi $E \subset \mathbf{R}^n$ tali che $E \cap \Omega = \overline{E} \cap \Omega$ e per ogni $x \in E \cap \Omega$ esistono $A \in \mathcal{A}(\mathbf{R}^n)$, $B \in \mathcal{A}(\mathbf{R}^h)$, $\varphi \in (C^\omega(B))^n$, $\psi \in (C^\omega(A))^h$ tali che*

$$x \in A, \quad \psi(\varphi(y)) = y \quad \text{per ogni } y \in B, \quad E \cap A = \varphi(B).$$

Il collegamento tra la nozione di insieme di classe $V_1 C^\omega(\mathbf{R}^n)$ e la nozione di curva semplice analitica chiusa è dato dalla Congettura 1.

Congettura 1. Se E è un insieme connesso ed $E \in V_1 C^\omega(\mathbf{R}^n) \cap \mathcal{K}(\mathbf{R}^n)$ allora esiste $\phi \in (C^\omega(\mathbf{R}))^n$ tale che per ogni $x, y \in \mathbf{R}$,

$\phi(x) \neq \phi(y)$ se $0 < x - y < 2\pi$,

$\phi(x + 2\pi) = \phi(x)$,

$|\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}| > 0$,

e si ha

$\phi(\mathbf{R}) = E$.

Riguardo agli insiemi di classe $V_h C^\omega(\Omega)$ possiamo porre la seguente congettura.

Congettura 2. Dato un sottoinsieme $E \subset \mathbf{R}^n$ si ha $E \in V_h C^\omega(\Omega)$ se e soltanto se

$$E \cap \Omega = \overline{E} \cap \Omega,$$

$$\chi_E \in SL_h(\Omega),$$

$$E \cap \Omega \subset \mathrm{dom} C^\omega(DS\chi_E).$$

Definizione 4. *Definiamo $F_h C^\omega(\Omega)$ la classe delle funzioni w tali che, per ogni $x \in \Omega$ esistono $A \in \mathcal{A}(\mathbf{R}^n), \nu \in \mathbf{N}, E_1, \ldots, E_\nu \in V_h C^\omega(A)$ per cui $x \in A$ e*

$$w(y) = \sum_{i=1}^{\nu} \chi_{E_i}(y) \qquad \text{per ogni } y \in A.$$

Congettura 3. Se $w \in F_h C^\omega(\Omega)$, allora

$$\mathcal{H}^h(\text{spt } w \cap \Omega \setminus \text{dom}C^\omega(DSw)) = 0.$$

Definizione 5. *Date due funzioni w ed f definiamo il gradiente tangenziale ${}_w\nabla f$ imponendo che*

$$\text{dom } {}_w\nabla f = \text{dom}C^2(DSw) \cap \text{dom}C^1(f),$$

e, per ogni $x \in \text{dom } {}_w\nabla f$, il vettore ${}_w\nabla f(x)$ abbia le componenti

$${}_w\nabla_i f(x) = [({}_w\nabla f)(x)]_i = \partial_{x_i} f(x) - \sum_{j=1}^{n} \partial^2_{x_i x_j} DSw(x)\ \partial_{x_j} f(x).$$

Congettura 4. Date tre funzioni w, f_1 ed f_2 e posto

$$A = \text{dom}C^2(DSw) \cap \text{dom}C^1(f_1) \cap \text{dom}C^1(f_2),$$

se $f_1(x) = f_2(x)$ per ogni $x \in A \cap \text{supp } w$ allora si ha su tutto $A \cap \text{supp } w$,

$${}_w\nabla f_1 = {}_w\nabla f_2 \ .$$

Al problema dello scioglimento delle singolarità di una varietà che sia il supporto di una funzione di classe $F_h C^\omega(\mathbf{R}^n)$ corrisponde la seguente congettura.

Congettura 5. Se $w \in F_h C^\omega(\mathbf{R}^n)$ e $\text{supp } w \in \mathcal{K}(\mathbf{R}^n)$, allora esistono $m = m(h) \in \mathbf{N}$, $E \in V_h C^\omega(\mathbf{R}^m) \cap \mathcal{K}(\mathbf{R}^m)$, $A \in \mathcal{A}(\mathbf{R}^m)$ e $\phi \in (C^\omega(A))^n$ tali che $E \subset A$, $w(x) = \text{card } \{y \in E; \phi(y) = x\}$ e, posto $b_{ij}(x) = {}_{\chi_E}\nabla_j \phi_i(x)$, si ha che la matrice $b(x)$ ha caratteristica h per ogni $x \in E$.

Congettura 6. I funzionali definiti per $w \in F_h C^\omega(\Omega)$ da

$$\mathcal{F}(w, \Omega) = \int_\Omega |\nabla^i(DSw)|^p w \ d\mathcal{H}^h$$

sono semicontinui inferiormente rispetto alla convergenza in $SL_h(\Omega)$ per ogni $p \geq 1$, $i \in \mathbf{N}$, $i \geq 2$.

Congettura 7. Siano $f \in C^\omega(\mathbf{R}^n)$ tale che $\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = +\infty$, $i \in \mathbf{N}$, $i \geq 3$. Esiste

$$\min \left\{ \int_{\mathbf{R}^n} |\nabla^i(DSw)|^2 w \ d\mathcal{H}^h + \left(\int_{\mathbf{R}^n} w \ d\mathcal{H}^h \right)^2 + \int_{\mathbf{R}^n} f w \ d\mathcal{H}^h \right\}$$

nella classe delle funzioni $w \in F_h C^\omega(\mathbf{R}^n)$.

Seconda conversazione

Alcuni lettori della prima conversazione hanno trovato scarse informazioni sul significato geometrico delle derivate della funzione $DSw(x) = \frac{1}{2}\left[\mathrm{dist}(x, \mathrm{supp}\, w)\right]^2$. Possiamo perciò enunciare una serie di congetture la cui conferma o confutazione chiarirebbe ampiamente tale significato.

Congettura 1. Sia $f \in (C^\omega(\mathbf{R}^h))^{n-h}$, con $1 \le h < n$ tale che $|f(0)| = |\nabla f(0)| = 0$; sia $E = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n; x_{i+h} = f_i(x_1, \ldots, x_h), 1 \le i \le n-h\}$ e sia $w = \chi_E$. Allora

$$DSw(0) = 0, \qquad \nabla DSw(0) = 0,$$

$$\partial_{x_i}\partial_{x_k} DSw(0) = 0 \qquad \text{per} \quad i \ne k,$$

$$\partial_{x_i}\partial_{x_i} DSw(0) = 0 \qquad \text{per} \quad i \le h,$$

$$\partial_{x_i}\partial_{x_i} DSw(0) = 1 \qquad \text{per} \quad h < i \le n,$$

$$\partial_{x_{i+h}}\partial_{x_j}\partial_{x_k} DSw(0) = -\partial_{x_j}\partial_{x_k} f_i(0) \qquad \text{per} \quad 1 \le i \le n-h, \quad 1 \le j,k \le h.$$

Definizione 1. *Per ogni $w \in F_h C^\omega(\mathbf{R}^n)$ definiamo*

$$[MCw(x)]_i = MC_i w(x) = -\sum_{j=1}^n \partial_{x_j}\partial_{x_j}\partial_{x_i} DSw(x).$$

Possiamo enunciare alcune congetture riguardanti la funzione vettoriale $MCw(x)$ precedentemente definita, dopo aver introdotto le seguenti notazioni: data $w \in F_h C^\omega(\mathbf{R}^n)$ e data $\psi \in (C^2(\mathbf{R}^n))^n$ poniamo $\;{}_w\mathrm{div}\,\psi = \sum_{i=1}^n {}_w\nabla_i \psi_i\;$ e $\;{}_w\Delta\psi = \sum_{i=1}^n {}_w\nabla_i({}_w\nabla_i \psi)$.

Congettura 2. Detta Id_n l'identità su $\mathbf{R}^n$, per ogni $w \in F_h C^\omega(\mathbf{R}^n)$ e per ogni $\psi \in (C_0^1(\mathbf{R}^n))^n$ risulta

$$\int_{\mathbf{R}^n} \langle MCw, \psi\rangle \, d\mathcal{H}^h = -\int_{\mathbf{R}^n} ({}_w\mathrm{div}\,\psi)\, w \; d\mathcal{H}^h =$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left[\int_{\mathbf{R}^n} w(Id_n + t\psi)\; d\mathcal{H}^h\right]_{t=0},$$

inoltre per ogni $x \in \mathrm{supp}\, w$ risulta

$$MCw(x) = {}_w\Delta(Id_n)(x).$$

Per ogni $w \in F_h C^\omega(\mathbf{R}^n)$ poniamo

$$\nu(w)(x) = \nabla^2 DSw(x).$$

Inoltre, dati due vettori $a, b \in \mathbf{R}^n$, poniamo $(a \otimes b)_{ij} = a_i b_j$.

Congettura 3. Sia $f \in C^\omega(\mathbf{R}^n)$ e, per ogni $t \in \mathbf{R}$, sia $E_t = \{x \in \mathbf{R}^n; f(x) = t\}$. Per quasi ogni $t \in \mathbf{R}$ risulta

$$E_t \in V_{n-1} C^\omega(\mathbf{R}^n) \ , \quad \chi_{E_t} \in F_{n-1} C^\omega(\mathbf{R}^n),$$

e

$$\nu(\chi_{E_t}) = \frac{\nabla f \otimes \nabla f}{|\nabla f|^2} \ .$$

Se poi $w \in F_h C^\omega(\mathbf{R}^n)$ con $h > 0$, per quasi ogni $t \in \mathbf{R}$ si ha

$$w\chi_{E_t} \in F_{h-1} C^\omega(\mathbf{R}^n) \ ,$$

e per $\mathcal{H}^{h-1}$-quasi ogni $x \in \operatorname{supp} w \cap E_t$ risulta

$$\nu(w\chi_{E_t})(x) = \nu(w)(x) + \frac{{}_w\nabla f(x) \otimes {}_w\nabla f(x)}{|{}_w\nabla f(x)|^2} \ .$$

Con le notazioni della Congettura 3 sarebbe interessante esprimere $MC(w\chi_{E_t})$ in funzione di ${}_w\nabla f$, ${}_w\nabla^2 f$, $\nabla^2 DSw$, $\nabla^3 DSw$.

Con l'introduzione di MCw, si possono prendere in considerazione altri problemi variazionali del tipo di quelli esposti nella prima conversazione .

Congettura 4. Siano $f \in C^\omega(\mathbf{R}^n)$, $\epsilon > 0$ e $p > 0$. Esiste

$$\min \left\{ \int_{\mathbf{R}^n} \epsilon \, |MCw|^2 \, w \, d\mathcal{H}^h + \int_{\mathbf{R}^n} f \, w \, d\mathcal{H}^h \right\}$$

nella classe delle funzioni $w \in F_h C^\omega(\mathbf{R}^n)$ tali che $\int_{\mathbf{R}^n} w \, d\mathcal{H}^h \leq p$.

Si possono anche considerare problemi variazionali con discontinuità libere.

Congettura 5. Siano $f \in C^\omega(\mathbf{R}^n)$, $\epsilon > 0$, $p > 0$ e $\lambda > 0$. Esiste

$$\min \left\{ \int_{\mathbf{R}^n} \epsilon \, |MCw|^2 \, w \, d\mathcal{H}^h + \int_{\mathbf{R}^n} f \, w \, d\mathcal{H}^h \ + \lambda \, \mathcal{H}^{h-1}(K) \right\}$$

nella classe delle coppie (K, w), dove $K \in \mathcal{K}(\mathbf{R}^n)$ e $w \in F_h C^\omega(\mathbf{R}^n \setminus K)$ verifica la condizione $\int_{\mathbf{R}^n} w \, d\mathcal{H}^h \leq p$.

Terza conversazione

Varie situazioni naturali suggeriscono l'idea di *varietà analitiche a tratti* (basta pensare per esempio ad una lastra di vetro colpita da un sasso) e questo fa ritenere che vi sia un qualche interesse nello studio di problemi matematici le cui soluzioni sono analitiche a tratti.

In questa conversazione si utilizzano le notazioni introdotte nella prima conversazione.

Accanto alla definizione di varietà analitica su Ω (cfr. definizione 3 della prima conversazione), può essere interessante introdurre la nozione di *varietà analitica con bordo analitico su* Ω.

Definizione 1. *Definiamo $V_h BC^\omega(\Omega)$ la classe degli insiemi $E \subset \mathbf{R}^n$ tali che $E \cap \Omega = \overline{E} \cap \Omega$ e per ogni $x \in E \cap \Omega$ esistono $A \in \mathcal{A}(\mathbf{R}^n)$, $B \in \mathcal{A}(\mathbf{R}^h)$, $\varphi \in (C^\omega(B))^n$, $\psi \in (C^\omega(A))^h$ e $z \in \mathbf{R}^h$ tali che*

$$x \in A, \quad \psi(\varphi(y)) = y \quad \textit{per ogni } y \in B, \quad E \cap A = \{\varphi(y); y \in B, \langle y, z\rangle \geq 0\}\,.$$

Definizione 2. *Sia $E \subset \mathbf{R}^n$ un insieme $\mathcal{H}^h$-misurabile. Poniamo*

$$\partial(E, \mathcal{H}^h) = \left\{x \in \mathbf{R}^n; \quad \text{esiste} \quad \lim_{\rho \to 0+} \cos\left(\frac{2\pi}{\omega_h \rho^h} \mathcal{H}^h(E \cap B_\rho(x))\right) = -1\right\}.$$

Osservazione 1. Se $E \in V_h BC^\omega(\Omega)$ allora $\partial(E, \mathcal{H}^h) \in V_{h-1} C^\omega(\Omega)$.

Accanto alle definizioni precedenti, introduciamo anche alcune classi di varietà analitiche fuori di un insieme singolare (risp. varietà analitiche con bordo analitico fuori di un insieme singolare).

Definizione 3. *Siano $\Omega \in \mathcal{A}(\mathbf{R}^n)$, $h \in \mathbf{N}$ con $0 < h \leq n$ e $s \in \mathbf{N}$, $0 \leq s \leq h$.*

Definiamo $V_h Q_s C^\omega(\Omega)$ (risp. $V_h Q_s BC^\omega(\Omega)$) la classe degli insiemi $E \subset \Omega$ tali che esiste un insieme C relativamente chiuso in Ω con $\mathcal{H}^s(C \cap \Omega) = 0$ e $E \in V_h C^\omega(\Omega \setminus C)$ (risp. $E \in V_h BC^\omega(\Omega \setminus C)$).

Definiamo inoltre $V_h \overline{Q}_s C^\omega(\Omega)$ (risp. $V_h \overline{Q}_s BC^\omega(\Omega)$) la classe degli insiemi $E \subset \Omega$ tali che esiste un insieme C relativamente chiuso in Ω con $\dim_{\mathcal{H}}(C \cap \Omega) \leq s$ e $E \in V_h C^\omega(\Omega \setminus C)$ (risp. $E \in V_h BC^\omega(\Omega \setminus C)$).

Con le notazioni precedentemente introdotte possiamo formulare alcune congetture riguardanti la regolarità parziale delle soluzioni di un problema di minimo con discontinuità libere studiato in E.De Giorgi–M.Carriero–A.Leaci: Existence Theorem for a Minimum

Problem with Free Discontinuity Set, Arch. Rational Mech. and Analysis, 108(1989), 195-218 (cfr. anche E. De Giorgi: Free Discontinuity Problems in Calculus of Variations, Atti del convegno in onore di J.L.Lions, Parigi 1988, cong.3, 5, 6).

Congettura 1. Assegnati $\lambda > 0$ e $g \in C^\omega(\mathbf{R}^n) \cap L^2(\mathbf{R}^n) \cap L^\infty(\mathbf{R}^n)$, sia $(\overline{C}, \overline{u})$ una soluzione del problema

$$\min_{C,u} \left\{ \int_{\mathbf{R}^n \setminus C} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbf{R}^n \setminus C} |u - g|^2 dx + \lambda \mathcal{H}^{n-1}(C) \right\},$$

al variare di C tra i sottoinsiemi chiusi di $\mathbf{R}^n$ e al variare di u tra le funzioni di $C^\omega(\mathbf{R}^n \setminus C)$.
Allora risulta $\overline{C} \in V_{n-1} Q_{n-1} C^\omega(\mathbf{R}^n)$.

Una congettura ancora piú fine è la seguente.

Congettura 2. Esiste una soluzione $(\overline{C}, \overline{u})$ del problema di minimo formulato nella congettura 1 tale che $\overline{C} \in V_{n-1} \overline{Q}_{n-2} C^\omega(\mathbf{R}^n)$.

La congettura seguente riguarda un problema "tipo Plateau" con discontinuità libere.

Congettura 3. Assegnati $\lambda > 0$ e un insieme chiuso $C \subset \mathbf{R}^n$ con $\mathcal{H}^h(C) < +\infty$, esiste

$$\min_{L,E} \left\{ \mathcal{H}^{h+1}(E) + \lambda \mathcal{H}^h(L) \right\},$$

al variare di L tra i sottoinsiemi chiusi di $\mathbf{R}^n$ e al variare di E nella classe $V_{h+1} B C^\omega(\mathbf{R}^n \setminus L)$ con la condizione $\partial(E, \mathcal{H}^{h+1}) \setminus L = C \setminus L$.

Congettura 4. Assegnati $\lambda > 0$, un insieme chiuso $C \subset \mathbf{R}^n$ con $\mathcal{H}^h(C) < +\infty$ e un insieme $S \in V_{h+r} C^\omega(\mathbf{R}^n)$ con $r \geq 1$, esiste

$$\min_{L,E} \left\{ \mathcal{H}^{h+1}(E) + \lambda \mathcal{H}^h(L) \right\},$$

al variare di L tra i sottoinsiemi chiusi di $\mathbf{R}^n$ e al variare di E nella classe $V_{h+1} B C^\omega(\mathbf{R}^n \setminus L)$ con le condizioni $E \subset S$ e $\partial(E, \mathcal{H}^{h+1}) \setminus L = C \setminus L$.

Per il problema considerato nella congettura 3 (oppure nella congettura 4) sarebbe interessante trovare condizioni affinché

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \min_{L,E} \left\{ \mathcal{H}^{h+1}(E) + \lambda \mathcal{H}^h(L) \right\} < +\infty.$$

Congettura 5. Supposta vera la congettura 3 se

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \min_{L,E} \left\{ \mathcal{H}^{h+1}(E) + \lambda \mathcal{H}^h(L) \right\} = \alpha < +\infty$$

allora esiste
$$\min_{L,E}\left\{\mathcal{H}^{h+1}(E)\right\},$$
al variare di L tra i sottoinsiemi chiusi di $\mathbf{R}^n$ con $\mathcal{H}^h(L)=0$ e al variare di E nella classe $V_{h+1}BC^{\omega}(\mathbf{R}^n\setminus L)$ con la condizione $\partial(E,\mathcal{H}^{h+1})\setminus L=C\setminus L$ e tale minimo coincide con α.

Si può formulare una congettura analoga alla precedente anche per il problema considerato nella congettura 4.

Quarta conversazione

Per dimostrare l'esistenza di soluzioni del problema di minimo

$$\int_{\Omega\setminus K} |\nabla u|^2 \, d\mathcal{H}^n + \mathcal{H}^{n-1}(\Omega \cap K) + \int_{\Omega\setminus K} |u-g|^2 \, d\mathcal{H}^n$$

al variare di K nei chiusi di $\mathbf{R}^n$, u in $C^\omega(\Omega\setminus K)$ e $g \in C^\omega(\Omega) \cap L^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ assegnata, è stato utile introdurre la classe di funzioni $SBV_n^2(\Omega)$ approssimabili in $L^1_{loc}(\Omega)$ da funzioni $u_i \in C^\omega(\Omega \setminus K_i)$ tali che la somma

$$\int_{\Omega\setminus K_i} |\nabla u_i|^2 \, d\mathcal{H}^n + \mathcal{H}^{n-1}(K_i) + \int_{\Omega\setminus K_i} |u_i| \, d\mathcal{H}^n$$

è limitata al variare di i. Per la definizione e le proprietà degli spazi SBV si vedano i lavori citati nella terza conversazione, ed i seguenti:

E.De Giorgi–L.Ambrosio: Un nuovo tipo di funzionale del calcolo delle variazioni, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur., serie 8, 82 (1988), 199–210;

L.Ambrosio: A compactness theorem for a special class of functions of bounded variation, Boll. UMI 3-B(1989), 857-881;

L.Ambrosio: Existence theory for a new class of variational problems, Arch. Rational Mech. Anal., in corso di stampa.

Volendo introdurre un concetto analogo nella teoria delle varietà h dimensionali, diamo la seguente definizione.

Definizione 1. *Sia h un intero compreso tra 1 ed n, e sia $\alpha > 1$, Ω aperto in $\mathbf{R}^n$. Definiamo la classe $FSBV_h^\alpha(\Omega)$ come la classe delle funzioni di Borel localmente sommabili $w : \Omega \to \{0, 1, \ldots\}$ tali che esistono una successione di compatti $K_i \subset \Omega$, una successione di funzioni $w_i \in F_h C^\omega(\Omega \setminus K_i)$ tali che $w_i \to w$ in $SL_h(\Omega)$ e la somma*

$$\mathcal{H}^{h-1}(K_i) + \int_{\Omega\setminus K_i} w_i \, d\mathcal{H}^h + \int_{\Omega\setminus K_i} \left|{}_w\nabla^3(DSw_i)\right|^\alpha w_i \, d\mathcal{H}^h$$

è limitata al variare di i.

Congettura 1. Se $w \in FSBV_h^\alpha(\Omega)$ esiste una successione di insiemi $\mathcal{H}^h$-rettificabili E_i tali che

$$w(x) = \sum_{i=1}^\infty \chi_{E_i}(x) \quad \forall x \in \Omega.$$

Congettura 2. Se $h = n$, allora

$$\inf\{w, p\} \in SBV(\Omega)$$

per ogni intero p. Per la definizione della classe di funzioni speciali a variazione limitata $SBV(\Omega)$, si vedano i lavori citati nella terza conversazione e relativa bibliografia.

Congettura 3. Se $\alpha > h$ e $w \in FSBV_h^\alpha(\Omega)$, esistono $\gamma_w : \Omega \to [0, +\infty]$, $S_w \subset \Omega$ tali che

$$\lambda_1 \int_\Omega \varphi \gamma_w^\alpha w \, d\mathcal{H}^h + \lambda_2 \int_{S_w} \varphi \, d\mathcal{H}^{h-1} \leq$$

$$\leq \liminf_{i \to +\infty} \lambda_1 \int_\Omega \varphi \big|_w \nabla^3 (DSw_i) \big|^\alpha w_1 \, d\mathcal{H}^h + \lambda_2 \int_{K_i} \varphi \, d\mathcal{H}^{h-1}$$

per ogni scelta di λ_1, $\lambda_2 > 0$, $\varphi \in C_0^0(\Omega)$ non negativa e successioni K_1, w_i come nella definizione 1. Inoltre, esiste una successione K_i, w_i per la quale

$$\lambda_1 \int_\Omega \varphi \gamma_w^\alpha w \, d\mathcal{H}^h + \lambda_2 \int_{S_w} \varphi \, d\mathcal{H}^{h-1} = .$$

$$= \lim_{i \to +\infty} \lambda_1 \int_\Omega \varphi \big|_w \nabla^3 (DSw_i) \big|^\alpha w_1 \, d\mathcal{H}^h + \lambda_2 \int_{K_i} \varphi \, d\mathcal{H}^{h-1}.$$

Congettura 4. Sia $\alpha > h$. Per ogni $\lambda > 0$ ed ogni misura non negativa μ in Ω esiste il minimo di

$$\int_\Omega |\gamma_w|^\alpha w \, d\mathcal{H}^h + \lambda \mathcal{H}^{h-1}(S_w) + \int_\Omega (DSw)^\alpha \, d\mu.$$

Tra le varie proprietà di regolarità delle funzioni minimanti w della congettura 4, ne segnaliamo una che potrebbe essere utile per varie applicazioni.

Congettura 5. Sia $w \in FSBV_h^\alpha(\Omega)$ una funzione minimizzante il funzionale della congettura 4. Si ha allora

$$\mathcal{H}^{h-1}(S_w) = \mathcal{M}^{h-1}(S_w),$$

ove

$$\mathcal{M}^{h-1}(K) = \lim_{\rho \to 0+} \frac{\mathcal{H}^n \big(\{ x \in \mathbf{R}^n : \operatorname{dist}(x, K) < \rho \} \big)}{\omega_{n-h+1} \rho^{n-h+1}}$$

per ogni insieme compatto $K \subset S_w$.

Quinta conversazione

In questa conversazione useremo le notazioni introdotte nelle precedenti conversazioni, a cui rinviamo per le definizioni.

Definizione 1. *Sia $v \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^n, d\mathcal{H}^h)$. Diremo che v ammette funzione tangente in x_0 se esiste una funzione $\alpha_v(x_0) \in SL_h(\mathbf{R}^n)$ tale che risulti*

$$\lim_{\rho \to 0} \int_{\mathbf{R}^n} v(x_0 + \rho y)\, g(y)\, d\mathcal{H}^h(y) = \int_{\mathbf{R}^n} \alpha_v(x_0)(y)\, g(y)\, d\mathcal{H}^h(y) \qquad \textit{per ogni } g \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n).$$

Quando una tale funzione esiste porremo $Ftg_h v(x_0) = \alpha_v(x_0)$.

Definizione 2. *Sia $v \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^n, d\mathcal{H}^h)$. Diremo che v ammette gradiente tangente in x_0 se esiste una funzione $\beta_v(x_0) \in SL_h(\mathbf{R}^n)$ tale che per ogni $g \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ risulti*

$$\lim_{\rho \to 0} \int_{\mathbf{R}^n} \frac{v(x_0 + \rho y) - v(x_0 - \rho y)}{2\rho}\, g(y)\, d\mathcal{H}^h(y) = \int_{\mathbf{R}^n} \beta_v(x_0)(y)\, g(y)\, d\mathcal{H}^h(y).$$

Quando una tale funzione esiste porremo $\nabla tg_h v(x_0) = \beta_v(x_0)$.

Definizione 3. *Sia $v \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^n, d\mathcal{H}^h)$. Se esiste una funzione $\gamma_v(x_0) \in SL_h(\mathbf{R}^n)$ tale che per ogni $g \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ risulti*

$$\lim_{\rho \to 0} \int_{\mathbf{R}^n} (v(x_0 + \rho y) - v(x_0 - \rho y))\, g(y)\, d\mathcal{H}^h(y) = \int_{\mathbf{R}^n} \gamma_v(x_0)(y)\, g(y)\, d\mathcal{H}^h(y),$$

allora porremo $\partial tg_h v(x_0) = \gamma_v(x_0)$.

Osserviamo che gli operatori appena definiti sono locali e lineari.
È interessante considerare anche iterazioni di tali operatori.

Definizione 4. *Sia $v \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^n, d\mathcal{H}^h)$. Poniamo:*

$$FT_h v(x, y) = \begin{cases} Ftg_h v(x)(y) & \textit{se esiste } Ftg_h v(x) \\ 0 & \textit{se non esiste } Ftg_h v(x) \end{cases};$$

$$\partial T_h v(x, y) = \begin{cases} \partial tg_h v(x)(y) & \textit{se esiste } \partial tg_h v(x) \\ 0 & \textit{se non esiste } \partial tg_h v(x) \end{cases}$$

ed inoltre:

$$FT_h^2 v = FT_{2h}(FT_h v),$$

$$FT_h^{i+1} v = FT^i_{2^i h}(FT_h v) \qquad \textit{per ogni } i > 1.$$

Enunciamo ora alcune congetture riguardanti il comportamento delle classi V_hC^ω ed F_hC^ω introdotte nella prima conversazione rispetto a questi operatori.

Congettura 1. Sia $w \in F_hC^\omega(\mathbf{R}^n)$. Allora per ogni $x \in \mathbf{R}^n$ esistono $Ftg_h w(x)$, $\nabla tg_h w(x)$, $\partial tg_h w(x)$ ed inoltre si ha $\nabla tg_h w(x) = 0$ e $\partial tg_h w(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}^n$.

Congettura 2. Sia $f \in C^1(\mathbf{R}^n)$ e $w \in F_hC^\omega(\mathbf{R}^n)$. Allora per ogni $x \in \mathbf{R}^n$ esistono $Ftg_h(fw)(x)$, $\nabla tg_h(fw)(x)$, $\partial tg_h(fw)(x)$ ed inoltre si ha

$$Ftg_h(fw)(x) = f(x)Ftg_h w(x)$$

$$\nabla tg_h(fw)(x)(y) = \langle \nabla f(x), y\rangle Ftg_h w(x)(y)$$

$$\partial tg_h(fw)(x) = 0$$

Congettura 3. Se $w \in F_hC^\omega(\mathbf{R}^n)$, per ogni $i \geq 1$ si ha $FT_h^i w \in F_{2^i h}C^\omega(\mathbf{R}^{2^i n})$.

Le seguenti congetture legano gli operatori definiti in questa conversazione con l'operatore ${}_w\nabla$ introdotto nella prima conversazione.

Congettura 4. Per ogni $n \in \mathbf{N}$ e per ogni $h \in \mathbf{N}$ con $h \leq n$ esiste un polinomio $\varphi_{h,n}$ tale che per ogni $w \in F_hC^\omega(\mathbf{R}^n)$ e per ogni $K \in \mathcal{K}(\mathbf{R}^n)$ risulta

$$\int_{K\times B_\rho(0)} FT_h w(z) d\mathcal{H}^{2h}(z) = \rho^h \int_K \varphi_{h,n}({}_w\nabla Id_n,\ {}_w\nabla^2 Id_n) w d\mathcal{H}^h.$$

Congettura 5. Sia $E \in V_{h-1}C^\omega(\mathbf{R}^n) \cap \mathcal{K}(\mathbf{R}^n)$ e sia $w \in F_hC^\omega(\mathbf{R}^n \setminus E)$; se esiste $\rho > 0$ tale che

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\rho^i}{(2i)!} \int_{\mathbf{R}^n} |{}_w\nabla^i Id_n|^2 w d\mathcal{H}^h < +\infty$$

allora per ogni $x \in \mathbf{R}^n$ esistono $Ftg_h w(x)$, $\partial tg_h w(x)$ e si ha $2|\partial T_h w| \in F_{2h-1}C^\omega(\mathbf{R}^{2n})$. Inoltre le seguenti due condizioni sono equivalenti:

(a) *Per ogni* $f \in C^1(\mathbf{R}^n)$ *esiste* $\nabla tg_h(fw)(x)$ *per ogni* $x \in \mathbf{R}^n$

(b) $\partial tg_h w(x) = 0$ *per ogni* $x \in \mathbf{R}^n$.

Congettura 6. Siano $v, w \in F_hC^\omega(\mathbf{R}^n)$, $k \in \mathbf{N}$ e supponiamo che per un certo x sia $v(x) = w(x)$ e che per ogni $i \leq k$ si abbia ${}_v\nabla^i Id_n(x) = {}_w\nabla^i Id_n(x)$. Allora

$$FT_h^i v(x,z) = FT_h^i w(x,z) \qquad \text{per ogni } z \in \mathbf{R}^{n(2^i-1)} \textit{ e per ogni } i \leq k.$$

Passiamo ora ad enunciare alcune congetture di tipo variazionale.

Congettura 7. Sia $E \in V_{h-1}C^\omega(\mathbf{R}^n) \cap \mathcal{K}(\mathbf{R}^n)$ e sia $w \in F_h C^\omega(\mathbf{R}^n \setminus E)$; supponiamo che esista $\rho > 0$ tale che

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\rho^i}{(2i)!} \int_{\mathbf{R}^n} |_w \nabla^i Id_n|^2 w d\mathcal{H}^h < +\infty.$$

Allora per ogni $i \geq h+1$ esiste finito il

$$\min \left\{ \int_{\mathbf{R}^n} |_u \nabla^i Id_n|^2 u d\mathcal{H}^h \right\}$$

al variare di $u \in F_h C^\omega(\mathbf{R}^n \setminus E)$ con $\partial T_h u = \partial T_h w$.

Congettura 8. Sia $E \in V_{h-1}C^\omega(\mathbf{R}^n) \cap \mathcal{K}(\mathbf{R}^n)$ e sia $w \in F_h C^\omega(\mathbf{R}^n \setminus E)$; supponiamo che esista $\rho > 0$ tale che

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\rho^i}{(2i)!} \int_{\mathbf{R}^n} |_w \nabla^i Id_n|^2 w d\mathcal{H}^h < +\infty.$$

Allora per ogni $i \geq 2$ esiste finito il

$$\min \left\{ \int_{\mathbf{R}^n} |_u \nabla^i Id_n|^2 u d\mathcal{H}^h \right\}$$

al variare di $u \in F_h C^\omega[(\mathbf{R}^n \setminus (E \cup K)]$ con K chiuso, $\mathcal{H}^{h-1}(K) = 0$ e $\partial tg_h u(x) = \partial tg_h w(x)$ per ogni $x \in \mathbf{R}^n \setminus K$.