Introduzione

Questo numero dei Quaderni del Dipartimento di Matematica è dedicato a questioni di Didattica e rende conto di alcune relazioni tenute nell'anno accademico 1988/'89 nell'ambito di un'attività rivolta a docenti della scuola secondaria. La prima relazione, di Alba Iacomella, illustra le finalità e le modalità di questa opera di formazione permanente promossa dal Dipartimento di Matematica dell'Università di Lecce nell'ambito della utilizzazione della prof. Iacomella su di un progetto di collaborazione tra Università e Scuola Secondaria Superiore. Hanno partecipato, a vario titolo, alla realizzazione del progetto di ricerca il gruppo locale di ricerca didattica operante presso il Dipartimento di Matematica, la sezione salentina della Mathesis e l'IRRSAE di Puglia. Tratto caratteristico dell'attività proposta è lo svolgersi su base pluriennale, in quanto non si ritiene possibile coniugare le aspettative ed i bisogni della classe docente con interventi frammentari ed occasionali.

Il materiale che segue va dunque visto non come opera compiuta, ma solo come resoconto dei primi passi nella direzione della innovazione culturale. In particolare i nuovi temi previsti dai programmi sperimentali del biennio e triennio superiore, sono e saranno oggetto di una più approfondita riflessione. Le relazioni a seguire illustrano argomenti di Logica Matematica (Carlo Marchini), Fondamenti di Matematica (Ennio De Giorgi), Geometria (Giuseppe De Cecco) ed Algebra (Hartmut Laue).

In questo elenco sono compresi argomenti che trovano poco spazio nella formazione del docente (Logica e Fondamenti) ed temi (Algebra e Geometria) più consueti, che però qui vengono affrontati sotto un'ottica diversa ed innovativa. Lo scopo è quello di innescare nel lettore, che si presuppone insegnante o semplicemente *curioso di* Matematica, una riflessione critica e produttiva che culmini in un consapevole rinnovamento dell'atteggiamento didattico.

Il curatore di queste note chiede scusa se non è riuscito a procurarsi tutte le relazioni relative agli interventi svolti, di cui viene allegato il calendario completo, ma motivi tecnici e di tempo hanno limitato a solo queste cinque le esposizioni scritte. La speranza è che in un prossimo fascicolo di questi stessi quaderni, si possano produrre anche i materiali relativi agli interventi di cui qui non è presentata una relazione scritta.

Elenco degli interventi tenutisi nell'A.A. 1988/89

- *Alba Iacomella* : Presentazione del Progetto di collaborazione tra Università e Scuola Secondaria Superiore. Problemi Culturali e didattici nei nuovi programmi di Matematica ed Informatica per la Scuola Secondaria Superiore - Aggiornamento, Ricerca e Sperimentazione

- *Carlo Marchini* : La Logica Matematica nell'insegnamento - Alcune riflessioni.

- *Ennio De Giorgi*: Una conversazione su: Fondamenti della Matematica e "teoria base". L'esempio della teoria 7×2

- *Giuseppe De Cecco*: La caratteristica di Eulero in Geometria.

- *Bruno Rizzi* : L'aritmetica nella Scuola Secondaria Superiore - Primi elementi di Matematica computazionale.

- *Hartmut Laue*: Aspetti didattici della teoria delle equazioni algebriche.

PROGETTO PLURIENNALE DI RICERCA

sul tema

COLLABORAZIONE TRA
UNIVERSITA' E SCUOLA SECONDARIA SUPERIORE
PROBLEMI CULTURALI E DIDATTICI NEI NUOVI PROGRAMMI
DI MATEMATICA ED INFORMATICA
PER LA SCUOLA SECONDARIA SUPERIORE
AGGIORNAMENTO, RICERCA E SPERIMENTAZIONE

Alba Iacomella

FINALITA'

- **ATTIVITA' SEMINARIALE PER L'AGGIORNAMENTO** del docente di Matematica con sviluppo di competenze non usuali nella prassi scolastica o non affrontate nei corsi di laurea, presenti nei Nuovi Programmi sperimentali di Matematica e di Informatica per gli Istituti Secondari Superiori.

L'aggiornamento del docente di Matematica per la sperimentazione dei nuovi programmi non puó, per ovvi motivi, ritenersi completato dall'attivitá promossa dal Ministero della Pubblica Istruzione, di cui va riconosciuto senza dubbio lo sforzo per un mutamento ed un'innovazione dell'insegnamento della Matematica alla luce del Piano Nazionale per l'introduzione dell'Informatica.

Il movimento di idee, il vivace dibattito sulle diverse interpretazioni dei nuovi programmi di Matematica ed Informatica e sui corsi ministeriali di formazione, hanno accresciute le esigenze di una maggiore professionalitá del docente di Matematica, sia per un processo di consapevolezza critica di fare scuola, sia per l'esigenza di professionalizzazione in una scuola che, sforzandosi di realizzare un processo di elaborazione della cultura, impegna i docenti in un'attivitá di aggiornamento - ricerca - sperimentazione.

Occorre, allora, la collaborazione non episodica tra l'Universitá e la Scuola Secondaria Superiore, per una nuova professionalitá del docente di Matematica esigente di una qualificata innovazione contenutistica e metodologica che rispetti i valori culturali della Matematica e dell'Informatica, in una visione unitaria della cultura.

L'introduzione del computer a scuola ha fatto sorgere la necessitá di una <u>attivitá</u> di <u>mediazione</u> tra la tradizionale comunicazione della Matematica e quella richiesta, oggi, con componente tecnologica. Questa impone un processo di modificazione culturale che investe, in particolare, i contenuti di Matematica, con sviluppo di argomenti teorici non usuali nella prassi scolastica o non affrontati durante i corsi di laurea, col conseguente studio anche dei pregi e dei limiti della utilizzazione dei computers nella didattica.

La "conversione pedagogica" al computer esige l'acquisizione di un'adeguata conoscenza delle nuove possibilitá, a livello contenutistico, e nel contempo l'acquisizione di una ponderata prospettiva dell'applicazione del computer, anche in chiave di insegnamento - apprendimento, nel rispetto dell'attivitá dell'informatico, con possibilitá di arricchimento delle capacitá di ricerca e di sviluppo della creatività di ognuno, attraverso un'esperienza di arricchimento delle conoscenze scientifiche.

Esiste chiaramente <u>il rischio</u> di <u>aberrazione didattica</u> per l'uso del calcolatore come "strumento universale": deve essere evitato perchè l'Informatica non prenda il sopravvento sulla Matematica. Il valore culturale e formativo della Matematica va arricchito dalla "<u>esplorazione di situazioni nuove</u>, al fine di contribuire alla convergenza nelle capacitá di "<u>sapere</u>" e "<u>fare</u>", in cui la componente del "fare" supera quell'attivitá consueta di risoluzione meccanica di classi di esercizi.

"(...)l'operare con il calcolatore introduce un livello intermedio in cui l'astrazione e l'attivitá logica sono sempre legate a qualcosa di reale e verificabile. (...)

Il calcolatore consente di utilizzare più facilmente quell'operazione mentale - frequente in tante attivitá umane e nelle scienze sperimentali, ma poco comune nell'insegnamento della Matematica - che è il fare congetture e metterle alla prova. Quindi l'uso del calcolatore si inquadra molto bene nell'"insegnamento per problemi", e fornisce un'ampia messe di problemi non banali, e tuttavia accessibili.(...) Ritengo che questi problemi dovrebbero prendere il posto d'onore che per tanto tempo è stato tenuto dai problemi di secondo grado". (G.Prodi, in Notiziario della Unione Matematica Italiana, Marzo 1983, supplemento al n.3, pp.101 - 103).

"(...), a mio parere, vi sono profonde ragioni di carattere culturale che legano l'informatica ai capitoli più tradizionali della matematica: vorrei usare l'immagine, forse un pó retorica ma espressiva, di rami che escono da uno stesso tronco.

Queste ragioni di carattere culturale sono, a mio parere, chiaramente presentate nella premessa ai nuovi programmi, dove si afferma che l'orientamento della matematica di oggi (almeno nella consapevolezza che ne abbiamo!) è soprattutto verso queste due direzioni:

- verso la "matematizzazione della realtá
- verso una più accentuata ed esigente formalizzazione.

Per capire l'impianto culturale dei nuovi programmi occorre, a mio parere, riuscire a vedere come queste due spinte, anzichè essere in contraddizione, si compongono e si rafforzano a vicenda." (G. Prodi, in Notiziario della Unione Matematica Italiana, Novembre 1987, Supplemento al n. 11, p. 14).

- **CREAZIONE DI GRUPPI DI STUDIO** formati da docenti di Matematica della scuola secondaria e da docenti universitari sulle tematiche riguardanti le innovazioni presenti nei Nuovi Programmi, ai fini di una nuova professionalitá, quale è richiesta dai processi di trasformazione e di innovazione.

Il movimento delle sperimentazioni nei bienni e l'avvio delle sperimentazioni nei trienni con la nuova aggregazione disciplinare "Matematica e Informatica", provoca questioni importanti sotto il profilo contenutistico, metodologico, didattico.

E' complessa la problematica connessa perchè, oggi, più complesso, è divenuto il contesto culturale, sia quantitativamente sia qualitativamente. "(...) con il piano nazionale per l'Informatica si è (...) tentato di impiantare un modello avanzato su un terreno assolutamente impreparato a riceverlo (...). (F. Speranza, in Notiziario della Unione Matematica Italiana, Novembre 1987, supplemento al n.11, p. 122). La complessitá dei problemi della Scuola Secondaria Superiore, non puó, oggi, non considerare necessaria e urgente la realizzazione di un programma pluriennale che impegni docenti universitari e docenti degli Istituti Secondari Superiori, per un qualificato insegnamento della Matematica; non puó non considerare urgente l'impegno dei Dipartimenti di Matematica dell'Universitá nel rendere adeguato alle nuove esigenze professionali con la formulazione di nuovi raggruppamenti disciplinari il ruolo qualificante dell'indirizzo didattico del Corso di laurea in Matematica, (...) nella formazione professionale iniziale e continua dell'insegnante di matematica, nella prospettiva di una educazione permanente (...)" (A. Iacomella, in Relazione su "Problemi connessi con l'insegnamento della Matematica nelle Scuole Secondarie Superiori, anche in riferimento al Piano Nazionale per l'introduzione dell'Informatica", attivitá di ricerca svolta presso l'Ufficio Studi e Programmazione, M.P.I., Roma, 1/3 - 31/7 1987, p. 3).

"Una cosa da aggiungere al lungo elenco delle cose che abbiamo da fare: offriamoci per fare gratuitamente i seminari per i corsi di formazione dei vincitori di concorso!" (F. Speranza, Intervento in Notiziario della Unione Matematica Italiana, Maggio 1985, supplemento al n.5, p. 107).

"(...) non possiamo - credo - non condividere l'urgente necessitá di inserire nei piani di studio qualche corso obbligatorio di alfabetizzazione informatica, di calcolo numerico, di statistica e probabilitá. Altre proposte, non recepite dalla commissione ministeriale, ma pur valide ai fini di una formazione culturale globale delle nuove leve di matematici, riguardano l'inserimento di nozioni di logica, di argomenti di storia, (...). (V. Villani, in Notiziario della Unione Matematica Italiana, Ottobre 1987, pp. 20-21).

E' necessario partire dalla scuola, nella quale ciascuno lavora, sperimenta, osserva, per poi passare al confronto delle diverse esperienze a livello di gruppo ristretto e dal gruppo passare alla proposta rivolta agli altri insegnanti.

" (...) direi che proprio la ricchezza del pensiero matematico finisce con l'essere la ragione principale delle difficoltá che si incontrano quando si cerca di divulgarlo. Per affrontare queste difficoltá credo che occorrano le due virtù fondamentali dello scienziato, l'umiltá e la speranza.

Occorre riconoscere che ognuno di noi ha una conoscenza assai parziale della Matematica ed una ancora più ridotta degli altri rami del sapere umano ad essa collegati. Nello stesso tempo dobbiamo avere la speranza che una comunicazione anche limitata del pensiero matematico possa arricchire tutta la cultura (E. De Giorgi, in Notiziario della Unione Matematica Italiana, Luglio 1986, Supplemento al n.7, pp. 222-226).

- **ATTIVITA' DI RICERCA DIDATTICA** per la crescita delle qualitá professionali dei docenti, con un raccordo con l'Universitá per garantire un corretto collegamento tra scuola e ricerca e tra ricerca e sperimentazione.

Per tale salto di qualitá che, oggi, è richiesto, l'insegnante deve svolgere un ruolo di "ricercatore culturale" e di programmatore didattico non improvvisato, ma dotato di nuove competenze, di nuovi atteggiamenti ai fini di una nuova professionalitá, di una nuova condotta culturale e sociale.

"L'idea di qualificare con "didattiche" alcune tecnologie ha fatto immediatamente pensare più all'addestramento (training) a livello industriale che non alla formazione scolastica.
Questa falsa interpretazione a mio avviso dipende dall'aver assunto come vera l'identitá:

tecnologia = strumenti

Nel problema dell'insegnamento - apprendimento tale uguaglianza è falsa.
Occorre scrivere l'equazione

tecnologia = strumenti + costruzione sistematica di criteri didattici.

Nella risoluzione di tale equazione consiste il problema della ricerca didattica in ogni disciplina. Infatti è chiaro che dai criteri didattici devono discendere i metodi ai quali andranno associati procedimenti effettivi. Cioè da un punto di vista didattico occorre parlare non di tecnologia o di tecnologie ma di sistemi tecnologici. Infatti, in quanto detto, sono enucleabili due parti, una formale (criteri e metodi) e una operativa (procedimenti), elementi tipici di un sistema tecnologico in cui intervengono due sottosistemi: uno formale e uno di regole operative. E' quindi vero che non si puó identificare la tecnologia con gli strumenti.
In questa visione, ad esempio, il linguaggio naturale è un sistema tecnologico in cui sono perfettamente distinguibili le due parti: sistema formale (insieme di segni e relazioni fra essi) e le regole operative (competenza e uso nel produrre espressioni)" (A. Andronico, in Relazione introduttiva, Insegnamenti scientifici e ricerca didattica, La Nuova Italia, Firenze, 6 - 9 ottobre 1980, pp. 277 - 278).

-**ATTIVITA' DI SPERIMENTAZIONE** del materiale prodotto debitamente sostenuta dalla attivitá di collaborazione in cui ogni docente è chiamato a prendere parte in prima persona, per l'individuazione di suggerimenti, indicazioni e proposte di approfondimento al fine di una programmazione meglio articolata del collegamento tra

aggiornamento, ricerca, sperimentazione, con particolare attenzione agli aspetti innovativi sul piano contenutistico e sul piano pedagogico - didattico per un efficace collegamento tra aggiornamento, ricerca, sperimentazione.
Per la qualitá dell'insegnamento l'aggiornamento è indispensabile e deve avvenire tra i docenti stessi, con la guida di coloro che sono "punta" nella cultura.
"La classe come gruppo di lavoro in un "laboratorio di ricerca" vive lo sforzo dell'uomo nel conoscere "la realtá" e prova le stesse gioie del ricercatore professionista" (A. Iacomella, in Relazione citata, p. 16).

- **ATTIVITA' DI RILEVAZIONE STATISTICA** dei risultati in un'ottica di confronti con gruppi di ricerca didattica operanti in altra sedi.
E' altamente qualificante <u>un'analisi critica della professionalita' attraverso un confronto culturale</u>: confronti su diverse impostazioni teoriche e didattiche dei contenuti oggetto dei nuovi programmi, consentono la formulazione cauta e il riconoscimento equilibrato di certe scelte educative, l'analisi dei contenuti teorici e dei metodi d'insegnamento. Occorre, infatti, evitare di cadere in "mode", come è accaduto con "l'insiemistica" e "lo strutturalismo", tra la fine degli anni sessanta e gli inizi degli anni settanta. Oggi incombono il pericolo della "Matematica utilitaristica" e il mito dell'Informatica.
Dall'insegnamento matematico, più in generale, scientifico, guidato dal "buon senso" si attende un apporto culturale, formativo, educativo, sociale, capace di comprendere la partecipazione della vita che si vive, per sviluppare un legame organico tra cultura vissuta e cultura come capacitá razionale critica di resistenza all'aggressione presente e futura della molteplicitá caotica delle informazioni, di selezione e di dominio di essa ,e come radice di disponibilitá concreta al cambiamento.

- **FORMAZIONE ARTICOLATA IN AGGIORNAMENTO PERMANENTE** da perseguire come **PRASSI** per
- l'individuazione di quadri teorici di riferimento
- l'arricchimento culturale per l'adeguamento ad inevitabili mutamenti contenutistici e metodologici
- la formazione di gruppi stabili di studio costituiti da docenti universitari e secondari in cui i docenti universitari siano consulenti per un ripensamento dei contenuti matematici dei programmi, degli obiettivi, dei metodi di insegnamento e dei criteri di valutazione
- formazione di gruppi stabili di ricerca didattica costituiti da docenti universitari e secondari per un corretto e continuo collegamento tra scuola, ricerca e sperimentazione e tra ricerca didattica e ricerca scientifica
- l'utilitá di "lavorare insieme" per superare le difficoltá di "incontro" e di "dialogo" tra docenti nel "programmare insieme" e "confrontare obiettivi, metodi e criteri di valutazione", con l'augurio che una tale attivitá culturale, educatica e sociale possa, con la collaborazione indispensabile dell'Universitá,

favorire una programmazione educativa del Collegio dei docenti capace di recuperare il passato come premessa del presente nella ricerca della continuitá tra tradizione e innovazione, un concreto ed autentico cambiamento di prospettive educative dell'insegnamento della Matematica nella Scuola Secondaria.

- **QUALIFICAZIONE DI ATTIVITA'** connesse alla collaborazione tra Universitá e Scuola Secondaria Superiore.

L'insegnante di Matematica impegnato, dunque, in un'esperienza di innovazione metodologica e di aggiornamento culturale, trova nei rapporti con docenti universitari un punto qualificato di riferimento nelle attivitá di
- acquisizione di competenze in settori poco o per nulla a lui familiari
- ripensamento critico dei messaggi contenutistici e metodologici in gruppi di studio, al fine di una efficace mediazione pedagogico

- didattica
- partecipazione in attivitá di ricerca didattica
- sperimentazione scientifica di lavori prodotti da gruppi di ricerca
- elaborazione di materiale significativo per l'attivita' didattica, con possibilitá di adeguamento a più situazioni reali scolastiche, arricchimento delle indicazioni che scaturiscano dall'attivitá di sperimentazione, con riflessione sugli obiettivi, sui metodi, sui criteri di valutazione per una significativa programmazione didattica.

Si valorizza la figura dell'insegnante di Matematica che, consapevole dei segni dei tempi e delle relative risorse anche tecnologiche, modifica la propria condotta professionale per un adeguamento formativo e culturale alle nuove esigenze della societá, con conseguente forte impegno pedagogico didattico.

"Il processo educativo ha in genere il compito di introdurre, nel vero senso della parola, in una cultura, radicando il giovane in essa e proiettandolo verso un futuro. (..) La scuola deve (..) favorire la presa di coscienza e l'integrazione di questo orizzonte di significato, aiutando i giovani a ritrovarsi nel proprio mondo culturale in maniera riflessa, comprendendo i valori, ed eventualmente i limiti, della proprioa collocazione, acquisendo in maniera progressiva ed equilibrata conoscenze ed atteggiamenti che completano e sviluppano l'originale inculturazione, per un inserimento maturo e sicuro nell'ambiente sociale e professionale" (M. Pellerey, Informatica fondamenti culturali e tecnologici, TO, SEI, 1986, p. 364).

IPOTESI DI LAVORO:
PRINCIPI EPISTEMOLOGICI E PEDAGOGICI NEI NUOVI PROGRAMMI DI MATEMATICA E DI INFORMATICA

Nell'insegnamento della Matematica nella nuova aggregazione con l'Informatica, l'obiettivo educativo principe è la massima formazione razionale critica del giovane, attraverso i valori culturali della Matematica e le ragioni culturali che legano l'Informatica in modo intrinseco alla Matematica, al fine educativo e sociale di rendere concreta la disponibilitá al cambiamento, in un momento di vorticoso progresso scientifico e tecnologico. per una innovazione guidata dal "buon senso" per evitare di seguire "mode",

"A chi guardi alla Matematica come a un fattore di cultura si presenta il problema di coglervi gli aspetti che meglio rispondono allo scopo, i motivi che incidono più a fondo nella struttura del suo pensiero.

A ció spinge la scuola. (...) nella (...) "secondaria" non si aspira a formare dei matematici (...). Quindi la presenza della Matematica è dovuta al fatto che ad essa si domanda un apporto alla formazione umana e sociale dei giovani, in collaborazione con le altre discipline e in misura non diversa. (...)Quindi una " Matematica delle idee", piuttosto che "una Matematica delle formule": due aspetti non da porre in contrasto - che anzi l'uno con l'altro si integrano in modo essenziale - ma da fondere in oculata misura" (L. Campedelli e M. Giannarelli, Al lettore, in La Matematica come sistema ipotetico - deduttivo di S. Maracchia, FI, Le Monnier, 1975, p.VII).

E' "la Matematica delle idee", quella presente nei Nuovi Programmi che, cogliendo l'essenza e i valori intrinseci della ricerca Matematica, fa

- conoscere i metodi di ricerca,
- comprendere il senso dei fatti matematici,
- conquistare l'intimo senso delle veritá matematiche,
- riflettere sulla sua ricerca di una visione unitaria,
- conoscere la sua organizzazione logica,
- sentire il bisogno culturale della dimensione storica,
- vedere la Matematica "costruttiva", con attenzione agli "aspetti algoritmici", nell'ambito della Matematica "cantoriana", con attenzione all'"esistenza degli enti matematici",

- conquistare l'aspetto "libertá" nella scelta dei punti di partenza di una teoria col vincolo fondamentale della coerenza,
- conquistare la consapevolezza critica di esistenza di una "barriera" in risultati analoghi: in Matematica col teorema di Gödel, in Informatica col teorema di Church, in Fisica col Principio di Heisenberg,
- mettere in discussione la visione di scienza "immutabile", "definitiva", "assoluta" per il senso comune.

E' la Matematica che, nel rapporto culturale con l'Informatica, fa conquistare:
- la distinzione delle componenti "semantica" e "sintattica", "astratta" e "formale",
- gli aspetti "trasferibile al calcolatore", "non trasferibile al calcolatore",
- le basi del rapporto nella Logica matematica.

E' la Matematica che, nel rapporto culturale con la Logica, a partire da riflessioni su fatti linguistici, fa conquistare
- la distinzione tra "linguaggio naturale" e "linguaggio formalizzato",
- la distinzione tra "linguaggio naturale" e "linguaggio artificiale",
- le regole di dimostrazione;
fa sentire
-il bisogno di un approccio critico ai "fondamenti della Matematica", in un rapporto intrinseco con altri rami del sapere.
"... se ogni ramo della matematica si esprime attraverso un linguaggio, in logica il linguaggio stesso diventa oggetto di studio; in questo senso, la logica è necessaria per impostare correttamente un qualunque discorso matematico."(C. Bernardi, in Notiziario della Unione Matematica Italiana, Novembre 1987, Supplemento al n. 11, pp. 22-23).

E' la Matematica che trova negli stimoli concettuali della Probabilitá e della Statistica, occasioni efficaci di

- matematizzazione della realtá,
- ricerca di "modelli" adeguati alla situazione concreta,
- ricerca, nella logica dell'"incerto", della "lettura" di situazioni per cui il "certo" va discusso.

In una visione, dunque, di continuita' della tradizione con l'innovazione, quale recupero del passato come premessa del presente, in una visione unitaria delle culture, compresa la tecnologica, col rispetto dei valori culturali della Matematica e dell'Informatica si impone la dialettica tra

- "intuizione" e "rigore",
- "procedure costruttive" e "sistemazioni formali",
- "referente empirico" e "modello matematico",
- "referente tecnologico" e "modello matematico".

Hanno senso

- i "sistemi assiomatici",
- problemi di "coerenza", "decidibilitá", "computabilitá",
- la "dimensione storica",
- si afferma la Matematica con l'aspetto dell'"humanitas" che deve far provare il gusto del sapere matematico ai giovani, che, purtroppo, non sempre hanno avuto la fortuna di vivere.

La Matematica e l'Informatica dei nuovi programmi, fondate, dunque, sul "principio di complementarita'", consentono al futuro diplomato della scuola secondaria superiore la conquista di forme critiche di pensiero, quali il "logico", il "geometrico", l'"informatico", l'"aritmetico", il "probabilistico - statistico", aspetti diversi del pensiero matematico, ma correlati non con strutturazione assoluta e definitiva, ma relativa, limitativa, e possibile di inevitabile progresso.

E' in gioco, dunque, un'educazione matematica ed informatica fondata sulla Matematica e sull'Informatica come "modelli di pensiero", come "mezzi di indagine della realtá", come "strumenti e linguaggi di conoscenza", e non come "sistema organizzati e perfetti di conoscenze da trasmettere": è in gioco la qualitá del sapere matematico.

I concetti, i principi, i procedimenti, le applicazioni, i linguaggi, consentono processi tipici dell'attivitá matematica arricchita da quella informatica, quali "matematizzazione", "astrazione", "formalizzazione", "generalizzazione", ricerca di "analogie", di "regolaritá, costruzione e interpretazione di "modelli matematici", "argomentazione", "dimostrazione", "induzione", "approssimazione", analisi e organizzazione "logica" del linguaggio comune, descrizione "proposizionale", "grafica", "algoritmica" di una classe di problemi, ricerca di strategie per la risoluzione di un problema, con la dialettica di integrazione nei rapporti con le altre discipline per il carattere "interdisciplinare" di ogni conoscenza.

Gli aspetti "qualitativi" sono, dunque, accanto a quelli "quantitativi".

L'insegnamento della Matematica si propone, di necessitá, più per "problemi che per "teorie". "E' stato detto giustamente: Occorrerebbe insegnare più "per problemi" che "per teorie": una teoria dovrebbe avere la portata minima necessaria per inquadrare un certo gruppo di problemi. G. Prodi, dell'Univ. di Pisa (Periodico di Matematiche,1965)" (B. de Finetti, Il saper "vedere" in matematica, La ricerca, Serie Didattica, TO, Loescher, 1967, p. 69).

Il presentarsi di una situazione - problema crea uno stato di tensione intellettiva e di instabilitá: il pensiero si pone alla ricerca della soluzione, si accendono "curiositá", si ferma l'attenzione su contenuti significativi, si separano alcuni, si vive il bisogno di allargare le conoscenze acquisite, si formulano e si giustificano congetture, si consente la discussione tra ció che è "argomentazione" e ció che è "dimostrazione", si vive il ruolo "conoscitivo" dei "modelli matematici", si sente il bisogno della dimensione storica, (..) : si conquista una formazione matematica significativa.

"Lo studioso che affronta un problema, nella ricerca della soluzione, procede con argomentazioni che possono avere la forma di ragionamenti di tipo induttivo, o euristico, o ancora per analogia, generalizzazione o particolarizzazione. In questa fase non vi è nulla di sistematico: è questo il momento in cui la fantasia ed il gusto del matematico hanno il sopravvento, e, a volte, la strada corretta da percorrere è frutto di conclusioni errate che vengono usate come ispirazioni". (C. Marchini, Argomentazione e dimostrazione - Alcune riflessioni sugli aspetti didattici, in L'insegnamento della Matematica e delle Scienze intewgrate, 10 - n 2 (Febbr. 1987, p. 136).

Il docente di Matematica e di Informatica, con il ruolo di animatore, consulente, promotore, programmatore, ricercatore, capace di passaggio dalla valutazione del profitto del giovane alla valutazione dell'attivita' didattica, diventa guida, garante di correttezza procedurale; dirige alla individuazione di una "pluralitá di percorsi" e del "criterio di scelta", spinge al gusto del "sapere matematico".

Lo studente vive il cammino che va dalla situazione - problema alla soluzione - esista questa o non esista - (significativi ed efficaci i problemi matematici senza soluzione); conquista livelli di riflessione razionale, metodi di ricerca, arricchisce il bagaglio delle conoscenze, modificando il comportamento in termini di "sapere" e di "saper fare", riuscendo a capire e a scoprire "ció che occorre saper vedere per dominare un problema"(B. de Finetti, Il saper "vedere" in matematica, La ricerca, Serie Didattica, TO, Loescher, 1967, p. 69).

I contenuti matematici arricchiti dagli stimoli culturali informatici diventano, così, base essenziale al futuro diplomato, per un suo inserimento professionale nel mondo del lavoro o per un raccordo con la scuola universitaria che porta la professionalitá a livelli superiori attraverso piattaforme contenutistiche con profondi agganci agli aspetti culturali della scuola secondaria.

Quelli indicati sono termini fondamentali di lettura epistemologica dei Nuovi Programmi, per una nuova formazione culturale in una Scuola Secondaria Superiore quale "officina di metodi e di conoscenze", in cui

- si insegni ad "apprendere" e a "conoscere" con esperienze di "smontaggio - critica - reinvenzione" del fatto culturale,
- si affermi l'impostazione delle basi matematiche nell'"ente discreto numero" e nell'"ente continuo spazio", su cui si fondano l'arricchimento e i mutamenti del pensiero matematico,
- scompaiano, sul piano culturale, formativo, le due matematiche : una per l'educazione liceale, l'altra per l'educazione tecnica.
- trovino le due rispettive concezioni "teorico - razionale" e "pratico - strumentale", un punto d'incontro in una concezione più "costruttivo - sostanziale, in cui "interessano i significati, i concetti, la realtá che sta sotto le formule o le definizioni" (M. Pellerey, Per un insegnamento della matematica dal volto umano, TO, SEI, 1983, p. 26).
- trovi fondamento culturale e formativo una preparazione del "nuovo" maturando italiano non frutto di "un "ammaestramento" (...) a risolvere esercizi del tipo di quelli che sono stati assegnati alla maturitá negli anni precedenti e che presumibilmente verranno assegnati alla maturitá dell'anno successivo" (V. Villani, Intervento in Notiziario della Unione Matematica Italiana, Marzo 1983, Supplemento al n.3, p.208).

Di conseguenza, sul piano metodologico, si passa da una attivitá didattica centrata sulla successione

"spiegazione - studio - esercizi - interrogazione - compito in classe"

ad una attivitá didattica centrata sulla successione
"problema - concetti - modelli - teorie - applicazioni - metodi di ricerca",
con attenzione alla sostanza del discorso e ai contenuti, con privilegio di attivitá che consentano il transfert, al fine principe di rendere concreta la disponibilitá al cambiamento, fortemente richiesta dalla societá di oggi.

"La validitá di una scuola - afferma il Direttore generale dell'Istruzione classica - non puó certo misurarsi sulla quantitá di notizie e informazioni che riesce a dare, quanto sulla sua capacitá di fornire metodi, strumenti critici, orientamento; e questo qualunque tipo di scuola, purchè coerente ed organica, consapevole dei suoi fini istituzionali, puó cercare di farlo, proprio nella specificitá formativa di un suo individuato asse culturale.
Credo davvero che l'uniformitá sia più un problema metodologico, da perseguire con tenacia e convinzione, che una questione di contenuti e di architetture strutturali, da proporre indiscriminatamente a tutti.
Concordo quindi perfettamente con E.Agazzi, quando afferma (nell'editoriale n. 4/87) che «l'uniformitá di per sè non contiene alcuna connotazione qualitativa: si puó infatti essere tutti uniformemente mediocri; mentre l'obiettivo della massima qualificazione è compatibilissimo con la differenziazione: si puó infatti essere tutti buoni o eccellenti, ciascuno dentro il proprio campo» .
E'proprio quello che mi piacerebbe auspicare: che si possano mettere in atto tutte le strategie necessarie, nel rispetto dei singoli «campi» per dare un prodotto migliore, se non eccellente; che si configurino, cioè, impianti semplici e fattibili, che, senza ricorrere a difficili acrobazie di ingegneria scolastica, assecondino le naturali tendenze fisiologiche che la scuola stessa sta avviando verso una maggiore omogeneitá di intenti e di prospettive educative» . (R.Cammarata, Biennio: opzione zero?, in

Nuova secondaria, 15 settembre 1988 - anno VI)

IL "NUOVO" INSEGNANTE DI MATEMATICA ED INFORMATICA

L'insegnante di Matematica, impegnato, dunque, in un'esperienza di innovazione metodologica e di aggiornamento culturale, sente l'esigenza di

- un intervento articolato di docenti qualificati, finalizzato allo sviluppo di competenze in settori poco o per nulla a lui familiari,
- un rapporto con docenti universitari per
- il ripensamento critico dei messaggi contenutistici e metodologici, al fine di una convinta mediazione pedagogico - didattica,
- la partecipazione a gruppi di studio e di ricerca didattica,
- la sperimentazione del lavoro, debitamente sostenuta dalla attivitá di collaborazione in cui ogni docente è chiamato a prendere parte in prima persona, per l'individuazione di suggerimenti, indicazioni e proposte utili per una programmazione meglio articolata del collegamento tra aggiornamento, ricerca, sperimentazione,
- l'aggancio della ricerca didattica con la ricerca scientifica per una presa di coscienza delle idee portanti della scienza e dei risultati.

PROGRAMMA PLURIENNALE

Il programma di collaborazione tra Universitá e Scuola Secondaria Superiore, sará realizzato con la collaborazione del Gruppo di ricerca didattica e del Seminario didattico operanti presso il Dipartimento di Matematica dell'Universitá di Lecce, sostenuto dai Consigli del Dipartimento e della Facoltá di Scienze dell'Universitá di Lecce nella richiesta della mia utilizzazione presso il Dipertimento di Matematica.

Saranno rispettate le esigenze del docente di Matematica e di

Informatica di oggi sia sulle scelte contenutistiche, sia su quelle metodologiche, nel rispetto dei Nuovi programmi.

I docenti di Matematica interessati, data la significativitá scientifica, culturale e sociale dell'attivitá di collaborazione tra Universitá e Scuola Secondaria Superiore, esigeranno stabilitá a tutte le attivitá del progetto in oggetto, per ottenere risultati significativi per la scuola impegnata in un rinnovamento culturale e didattico.

Per mantenere l'entusiasmo, l'interesse e l'impegno, la collaborazione tra Universitá e Scuola Secondaria Superiore deve avere carattere pluriennale per il conseguimento delle alte finalitá giá precisate e richieste non solo dai programmi sperimentali del biennio, ma anche da quelli del triennio, la cui sperimentazione richiederá complessitá contenutistiche e metodologiche maggiori.

E' necessario, dunque, un programma <u>pluriennale</u> di almeno sei anni di collaborazione tra Universitá e Scuola Secondaria Superiore, essendo ovvio il fatto che non si possono esaurire, in un anno, tutte le problematiche relative all'insegnamento della Matematica e dell'Informatica secondo i nuovi programmi quinquiennali di sperimentazione, senza escludere anche la necessitá di tempi maggiori per eventuali modifiche dei programmi prevedibili proprio per il loro carattere sperimentale.

Naturalmente il programma deve avere, accanto alle componenti di innovazione e di aggiornamento, quella di raccordo con la reale situazione nella concreta didattica quotidiana, per un'<u>analisi critica di certe scelte e di certe attivita', in una direzione di continuita' nello sviluppo del progetto pluriennale</u>.

La necessitá di interazione culturale con l'Universitá, vuole, dunque, fornire non solo nuove competenze contenutistiche, ma anche collaborazione per un'attivitá didattica qualificata fondata su una qualificata formazione matematica ed informatica.

Per un significativo coordinamento tra Universitá e Scuola Secondaria Superiore occorre realizzare due fondamentali attivitá:

- **attivita' seminariali di aggiornamento** con approfondimenti teorici all'interno di "<u>gruppi stabili di studio</u>" intorno a tematiche promosse dai seminari, fondamentalmente per
- puntualizzare i fondamenti teorici,
- cogliere i principi epistemologici per una "lettura critica" dei nuovi programmi,
- individuare risvolti didattici nella realtá scolastica.
- **attivita' di ricerca didattica** sulle problematiche aperte dai seminari con elaborazione di materiale didattico da sperimentare e con confronto con gruppi di ricerca operanti in altra sede focalizzando l'attenzione, nel rispetto delle esigenze culturali e didattiche dei nuovi programmi, in particolare, su:
- contenuti, obiettivi, metodi, criteri di valutazione,
- materiali prodotti da gruppi di ricerca didattica impegnati nell'aggiornamento e nell'innovazione,
- libri di testo,
- organizzazione di una programmazione didattica,
- sperimentazione di materiale didattico con rilevazione statistica per un'analisi della bontá della programmazione nella realtá in cui si opera.

Si individuano, in collaborazione col Seminario Didattico e col Gruppo di Ricerca in Didattica del Dipartimento di Matematica dell'Universitá di Lecce, i seguenti fondamentali seminari da realizzare coerentemente col progetto pluriennale su

Calcolo delle proposizioni
Calcolo dei predicati
Grammatica
Sintassi
Semantica
Induzione e ricorsivitá

Algebra di Boole

Teoria degli insiemi e Logica matematica

Polinomi e teoria di Galois

Insiemi numerici

Teoria dei codici

Algebra lineare

Geometria euclidea

Geometrie non euclidee

Geometrie finite

Trasformazioni geometriche

Sistemi formali

Trasformazioni geometriche

Caratteristica di Eulero in Geometria

Calcolo Approssimato

Successioni e serie

Calcolo differenziale e calcolo integrale

Analisi del continuo e Analisi del Discreto

Matematica "Cantoriana" e Matematica "Costruttiva"

Logica dell'incerto

Statistica descrittiva

Inferenza statistica

Impostazioni teoriche della probabilitá

Linguaggi di programmazione strutturata

Teoria della computabilitá

Informatica teorica

I fondamenti della Matematica

Software didattico

Linguistica matematica

Data base relazionale

L'elenco vuole solo individuare "campi" matematici ed informatici suggeriti da cambiamenti di contenuti nella stessa Matematica e nelle sue applicazioni, dall'Informatica, dall'impatto col computer. Anno per anno la scelta cadrá su certe tematiche nel rispetto soprattutto delle esigenze dei docenti.

Gli argomenti seminariali saranno trattati inizialmente a livelli elementari, base per una trattazione a livelli superiori negli anni successivi, per raggiungere una visione complessiva della Matematica nei nuovi programmi, ferma restando un'attivitá di approfondimento delle tematiche sollevate dal seminario realizzato ed un'attivitá di ricerca didattica corrispondente alle tematiche sollevate da quel seminario realizzato, con tempi di realizzazione rispettosi delle esigenze dei docenti, prima di passare ad un altro seminario.

Si ritengono indispensabili pertanto due o tre incontri (pomeridiani) al mese in modo da realizzarne in un anno scolastico un numero congruo per una proficua collaborazione e concreto supporto alla didattica quotidiana, nella direzione di una nuova professionalitá corretta interprete delle nuove esigenze.

La Logica Matematica nell'Insegnamento - Alcune riflessioni

Carlo Marchini*

1. Introduzione. - Ora che la Logica è entrata nella programmazione scolastica, a partire dalle elementari, nasce il problema di trovare una collocazione degli argomenti innovativi. Le proposte avanzate nella letteratura già disponibile, sono spesso o troppo sempli-ci(stiche), o troppo formali. Fa eccezione [Sm], in cui viene offerta un'immagine della Logica assai prossima al gioco. Uno dei problemi è suscitare l'interesse degli alunni; un altro è mostrare come usando la Logica in contesti anche consueti, si porta chiarezza, quindi si tratti di uno strumento "utile". Il campo delle applicazioni della Logica nella didattica è estremamente vasto; qui mi limito a semplici considerazioni, senza la pretesa di completezza, iniziando dalle proposizioni.

Nelle pubblicazioni che divulgano gli aspetti logici, parlare di calcolo delle proposizioni, è quasi equivalente a parlare di tavole di verità. Queste tabelle vengono presentate spesso, senza giustificazione, talvolta anche con errori, divenendo così un argomento propinato senza adeguate chiarificazioni, un tecnicismo da imparare a memoria che non contribuisce alla formazione del pensiero critico. In quanto segue voglio proporre un esempio. Secondo me è questa la strada: suscitare l'interesse, anche con strumenti che spesso sento bollare con tono dispregiativo (chissà poi perché) da Settimana Enigmistica ed attraverso esempi di questo tipo far giungere alle tavole di verità, viste

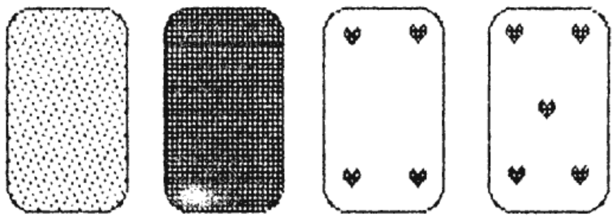
---

* Indirizzo: Dipartimento di Matematica dell'Università, Via Arnesano, 73100 LECCE. - Intervento al Seminario SSS di Lecce del 1 dicembre 1988.

come una "summa" abbreviata e come utile sostegno per il ragionamento.

1. Un problema. - L'esempio che propongo, per me assai significativo[1] simula, in modo semplificato, il procedere del ricercatore di fronte a fenomeni complessi. Nello studio di un fenomeno avviene di formulare delle ipotesi che devono poi essere controllate nella loro veridicità o meno. Questo tipo di situazione si può presentare anche nella scuola, in modo proficuo.

E1) Si considerino quattro carte tratte da un mazzo di 104 carte, per il gioco della Scala 40:



B R 4 5

Fig. 1

Nel disegno, con toni diversi di grigio si sono voluti indicare colori del verso distinti, ad esempio blu e rosso. Si può pensare, per rendere la cosa più attinente a situazioni reali, che, invece di carte, ci siano i dati di certe esperienze in condizioni sperimentali diverse. Assumo un'ipotesi (di lavoro): *se la carta ha il verso rosso, allora (la carta) è pari.* Si tratta, ora, di provare o confutare l'ipotesi, mediante un'esperienza di controllo. Il problema è quello di progettare, nel modo più economico possibile, un siffatto esperimento, cioè si deve determinare il minimo numero di carte da voltare, e quali, per ottenere la verifica dell'ipotesi

[1] L'esempio che segue è modificazione di uno presentato da [JW].

detta. In questo compito sono d'aiuto le tavole di verità[2]. Per semplicità scrivo l'ipotesi nella forma $\mathbf{r} \Rightarrow \mathbf{p}$, dove $\mathbf{r}$ sta per "*la carta ha il verso rosso*", mentre $\mathbf{p}$ sta per la proposizione "*la carta è pari*". Calcolo, in ciascun caso, il valore di verità della proposizione composta $\mathbf{r} \Rightarrow \mathbf{p}$. Se la carta è blu, caso B, ottengo, dalle tavole di verità, che la proposizione composta è vera, in quanto è falsa la protasi $\mathbf{r}$, dunque non interessa sapere il valore della carta col verso blu. Nel caso della carta col verso rosso, R, l'antecedente è vera, affinché sia vera la proposizione composta $\mathbf{r} \Rightarrow \mathbf{p}$ è necessario che sia vera anche l'apodosi $\mathbf{p}$. Pertanto bisogna voltare la carta R, per appurare se l'ipotesi è vera. Nel caso della carta 4, la proposizione conseguente $\mathbf{p}$ è vera e da ciò è vera pure la proposizione composta $\mathbf{r} \Rightarrow \mathbf{p}$, anche se la proposizione $\mathbf{r}$ fosse falsa. Perciò non serve conoscere il verso della carta 4, al fine di verificare l'ipotesi. Infine con la carta 7 la proposizione conseguente $\mathbf{p}$ è falsa. La proposizione composta risulta vera se e solo se la protasi $\mathbf{r}$ è falsa. Così per concludere la verifica dell'ipotesi, bisogna voltare anche la carta 7. L'esperimento di controllo consiste nel voltare due carte: R e 7.

E' interessante osservare che un rilevamento statistico su questo problema ha ricevuto meno del 10% di risposte esatte. Le strategie (scorrette) più spesso seguite indicano la carta R oppure le carte R e 4 come quelle da voltare per verificare l'ipotesi. L'indagine rivela come

---

[2] Per comodità del lettore riporto qui le tavole di verità per i principali connettivi. In essa le lettere $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$ stanno ad indicare proposizioni generiche:

$\mathbf{p}$	$\neg\mathbf{p}$
1	0
0	1

$\mathbf{p}$	$\mathbf{q}$	$\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}$	$\mathbf{p} \vee \mathbf{q}$	$\mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{q}$	$\mathbf{p} \Leftrightarrow \mathbf{q}$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

I valori di verità si possono trovare denotati in modi diversi: ad esempio **v** e **f**, per, rispettivamente, quello che qui si è indicato con 1 e 0. In certi testi, ad esempio in [Me], i valori vengono scambiati.

il caso dell'implicazione sia difficile da comprendere o, se si preferisce, che gli strumenti di logica naturale, mediamente disponibili, sono insufficienti. L'analisi che precede mette altresì in luce la "potenza" e la "facilità" d'uso delle tavole di verità come strumento per la conoscenza, soprattutto se confrontato con le difficoltà degli strumenti razionali cosiddetti naturali[3]. Per provare l'esistenza di una relazione tra due proposizioni del tipo di quella illustrata sopra, la via seguita dal maggior numero degli intervistati è quella di prendere in considerazione solo i casi in cui entrambe le proposizioni componenti sono vere, cioè come se si trattasse di una congiunzione[4]. In altri casi gli alunni sono portati a confondere l'implicazione presentata nella forma *se .... allora..* con una relazione più affine alla deduzione, espressa da *siccome.... allora..* Questo perché lo *status* dell'implicazione è diverso da quello della congiunzione e della disgiunzione. Con i connettivi $\wedge$ e $\vee$ la proposizione risultante tiene conto, in certo senso, delle proposizioni componenti, dato che alla congiunzione è associata l'operazione di minimo nell'insieme numerico $\{0,1\}$, con l'ordine naturale, mentre a $\vee$ è associata l'operazione di massimo. Per di più con-

---

[3] Esempi e problemi sul calcolo proposizionale si possono trovare anche in [V].

[4] [J] sostiene che spesso nell'affrontare l'analisi di un'implicazione, si preferiscono modelli mentali, piuttosto che regole di inferenza. Cioè alla lettura delle premesse il soggetto si costruisce una rappresentazione specifica in cui è vera la protasi. La costruzione tiene d'occhio solo le richieste delle premesse. Se questo tipo d'analisi fosse portata a termine in modo completo, fornendo cioè diverse situazioni in cui è vero l'antecedente, da questa si potrebbe correttamente concludere se l'implicazione risulta vera oppure no. Ma solitamente il modo di procedere conduce ad errori in quanto vengono prese in considerazione non tutte le situazioni possibili, ma solo quelle che sono costruibili più facilmente.

giunzione e disgiunzione sono "commutative" ed "associative"[5], e questo, anche se spesso le proprietà considerate non vengono neppure segnalate, fa sì che la congiunzione e la disgiunzione hanno un trattamento "naturale". Invece per l'implicazione non valgono le proprietà "commutativa" ed "associativa" che sussistono per i primi due connettivi. Infine i connettivi $\wedge$ e $\vee$ hanno una stretta corrispondenza con operazioni insiemistiche facilmente visualizzabili, ciò che non avviene per $\Rightarrow$. Con l'implicazione la domanda è, in modo scorretto, ma spero efficace[6], se sussista una relazione di causalità tra l'antecedente ed il conseguente, non già se siano vere la protasi e/o l'apodosi. Un altro tipo di difficolta insito nell'implicazione è che la tavola di verità è "poco" naturale, come si già avuto modo di osservare. Tuttavia, anche se a scapito dell'implicazione c'è una minor naturalezza ed intuitività, l'uso corretto del simbolo $\Rightarrow$ evita le confusioni tra le *condizioni necessarie* e le *condizioni sufficienti* che abbondano sui libri di testo.

Maggior chiarezza si ottiene leggendo la tavola al negativo: ammesso che la verita dell'implicazione traduca il fatto che tra la protasi e l'apodosi è istaurata una relazione di causalità, essa sara vera se la sua negazione è falsa; falsa se la negazione sarà vera. Dunque il problema è riconducibile alla negazione dell'implicazione. E quest'ultima come si esprime? Cosa significa negare in modo fattuale che esista una relazione di causalità tra due fenomeni? Mi sembra chiaro: si

---

[5] A ben guardare tali proprietà non valgono neppure per la congiunzione, nel senso che le proposizioni $\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}$ e $\mathbf{q} \wedge \mathbf{p}$ sono distinte, ma sono equivalenti in quanto hanno gli stessi valori di verità. Ciò non avviene per l'implicazione. Anzi uno degli errori che capita di rilevare piu frequentemente, è l'utilizzazione dell'inesistente proprieta commutativa dell'implicazione, cioè le proposizioni $\mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{q}$ e $\mathbf{q} \Rightarrow \mathbf{p}$, vengono ritenute equivalenti mentre sono tra loro equivalenti $\mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{q}$ e $\neg\mathbf{q} \Rightarrow \neg\mathbf{p}$.

[6] ma reminiscente di Crisippo. Si veda al successivo §3.

manifesta la presunta causa e non il presunto effetto. Ad esempio negare "*se si inaugura la Fiera di Milano, allora lo stesso giorno piove a Milano*" (frase che i milanesi assicurano vera!), significa che c'è stato (almeno) un giorno in cui è avvenuta l'inaugurazione della Fiera e a Milano non è piovuto.

Dunque per concludere che è vera $\mathbf{r} \Rightarrow \mathbf{p}$, basta provare che è falsa $\mathbf{r} \wedge \neg \mathbf{p}$ e per provare che è falsa $\mathbf{r} \Rightarrow \mathbf{p}$, basta provare che è vera $\mathbf{r} \wedge \neg \mathbf{p}$ [7]. Costruendo la tavola di $\mathbf{r} \wedge \neg \mathbf{p}$, si trova esattamente la tavola "contraria", meglio *duale*, di $\mathbf{r} \Rightarrow \mathbf{p}$, cioè quella in cui i valori 0 e 1 si presentano scambiati, rispetto alla tavola di $\mathbf{r} \Rightarrow \mathbf{p}$. Ma la tavola di $\mathbf{r} \wedge \neg \mathbf{p}$ è molto più accettabile, intuitivamente, per questo la consiglio in via preliminare, al momento di introdurre l'implicazione. C'è tuttavia un delicato problema di natura didattica: una relazione tra i dati dell'esperienza può essere scoperta in due modi: per via *positiva*, verificando che nei casi in cui si attende valga la relazione, essa sussiste, oppure per via *negativa*, verificando che nei casi in cui non ci si aspetta valga la relazione, essa non sussiste. Ebbene [R] mostra che le due strategie hanno livelli di accettazione ben diversi, secondo dell'età, comunque il metodo che dà migliori risultati didattici è quello positivo.

Credo queste le difficoltà maggiori che si incontrano nella presentazione delle tavole di verità[8]. Da parte degli alunni, una volta accettate, non dovrebbero sorgere problemi nel valutare i valori di verità di una proposizione composta, in quanto si tratta di un procedimento puramente meccanico (e che volendo si può far eseguire completa-

---

[7] Si intende meglio che la negazione dell'implicazione $\mathbf{r} \Rightarrow \mathbf{p}$ è equivalente a $\mathbf{r} \wedge \neg \mathbf{p}$, se si pensa che l'implicazione $\mathbf{r} \Rightarrow \mathbf{p}$ è equivalente a $\neg \mathbf{r} \vee \mathbf{p}$, come mostrano esempi quali "*se bevi il vino ti ubriachi*": "*non bere il vino, o ti ubriachi*". Di qui con le leggi di De Morgan si ottiene quanto detto sopra.

[8] Ma è importante che le tavole di verità siano il risultato di un lungo percorso didattico che ne faccia capire l'importanza e la "comodità", come una prima schematizzazione del discorso.

mente ad un elaboratore elettronico). Si tenga presente però che nel caso si debba analizzare una proposizione composta mediante i connettivi proposizionali, a partire da n proposizioni semplici e non ulteriormente scomponibili (le cosiddette proposizioni atomiche di cui sono esempi "*Paolo canta*", "*l'oggetto è rosso*", "*Carlo Bonaparte è padre di Napoleone I*", ecc.), il numero dei casi da considerare è 2^n. Anche questo risultato è assai interessante e andrebbe fatto scoprire dagli alunni, per andare incontro alla richiesta di illustrare «le più elementari questioni di tipo combinatorio», come previsto dai programmi delle scuole primarie.

2. Linguaggio e Logica. - I risultati sorprendenti di **E1)**, potrebbero essere giustificati ritenendo infelice la presentazione del quesito. Infatti nelle prove da me compiute con amici e conoscenti, anche ricercatori universitari, che hanno confermato i risultati dell'indagine statistica, dopo una prima fase di tentativi, portati avanti in modo insicuro, si e passato alla richiesta di riproporre il problema con eventuali spiegazioni. Molto spesso, in questa seconda fase, il tentativo del solutore riproponeva l'ipotesi di lavoro nella forma: *se è pari, allora è rossa*, oppure *se è blu, allora è dispari*. Forse il quesito è mal formulato, ma mi pare che la situazione sia diversa. Nel linguaggio di uso quotidiano, e che ha in sè una struttura logica sufficiente per le esigenze delle vita pratica, non riscontriamo quella precisione e chiarezza, che sono invece meriti del linguaggio scientifico. Questi limiti, che possono essere pregi da un punto di vista estetico, ci impastoiano al momento di utilizzare il linguaggio come uno strumento razionale preciso, atto alla comunicazione con se stessi e con gli altri. Ne sono una conseguenza le ambiguità della leggi italiane.

La Logica si colloca allora, più propriamente, in quella parte di linguaggio che si occupa di Scienza, dando a questa parola un'accezione assai ampia. I rapporti tra linguaggio e Logica sono assai simili a quelli intercorrenti tra spazio fisico e Geometria. Su questa analogia mi voglio soffermare per mostrare come e perché di Logica ci si occupi in Matematica, anzi che in Linguistica. Nello spazio fisico vi sono oggetti, linee, superfici, che **non** sono punti, rette e piani, in quanto si tratta di oggetti limitati e con un loro ben preciso volume. Così un granello di sabbia può aver dato origine al concetto di punto, però che non sia un punto geometrico lo provano le spiagge. Un bastoncino o un filo d'erba, pur essendo limitati (ma Euclide parla di rette che si prolungano nei due sensi) non sono rette o segmenti geometrici, dato che ammucchiandoli con altri dello stesso tipo si possono formare fascine o covoni. Così un foglio di carta suggerisce l'idea di piano, tuttavia con fogli si costruiscono libri e quaderni, che hanno un volume. Tutto ciò non avviene in quella teoria che chiamiamo Geometria, ma sarebbe più corretto indicare con l'appellativo di euclidea, dato che da più di duemila anni nelle scuole viene insegnata prendendo spunto dal testo di Euclide. Ebbene la Geometria (euclidea) non è il vero studio dello spazio fisico, ma solo di certi aspetti della realtà, il compito di spiegare i fenomeni "reali" è lasciato appunto alla Fisica[9].

Così è pure per la Logica. Nel linguaggio, oggetto di studio della Linguistica, vi sono strutture assai complesse, frutto di stratificazioni storiche. Lo scrittore J.L. Borges definisce il linguaggio come una serie di metafore congelate. Lo studio di questa realtà, costruita dall'uomo in vari secoli, è più complesso che lo studio della Natura, con le sue leggi costanti: *Natura non facit saltus*, ma la lingua sì, essendo in

[9] Non voglio addentrarmi nella polemica, di interesse più filosofico che matematico, se la Geometria sia lo studio del mondo delle idee (Platone), o una schematizzazione della esperienza (empirismo), o ancora un dato a priori (Kant). Anche la Fisica non è in grado di studiare a fondo la realtà, ma si serve di comode approssimazioni: basti pensare agli studi di Galileo sulla caduta dei gravi, in cui si prescindeva dall'attrito, dalla presenza dell'aria e, in generale, da fenomeni perturbativi.

continuo mutamento. Ma, come la Fisica e la Geometria studiano opportune semplificazioni di certe classi di fenomeni naturali, così la Logica tratta solo di una esigua parte del linguaggio e lo fa con strumenti matematici

Viene allora il sospetto che data la ristrettezza del campo di applicazione, la Logica sia uno strumento di scarsa utilità. Tale pregiudizio, abbinato a quello che la nostra materia si occupi di cose ovvie. è stato causa del disinteresse finora mostrato dalla scuola pre-universitaria. L'opera dei grandi logici del secolo scorso, quali Frege, Cantor, Bolzano, e di questo secolo, Russell, Godel, Tarski, Turing, Church, Robinson, ecc. prima, e l'Informatica poi, hanno provveduto, in maniera clamorosa, a modificare questo modo di pensare. Gli studi teorici di Logica hanno contribuito a darci una idea più chiara delle possibilità e capacità umane, provando per mezzo di rigorose dimostrazioni le sostanziali limitazioni concettuali intrinseche al pensiero. L'idea della conoscenza, intesa non solo in modo sperimentale, è passata così dall'immagine di una sfera sempre dilatantesi (di sapore positivista), proposta da J.L. Borges, a quella di F. Ponge di una perla molle, anzi forse più correttamente di un'ameba che ha incontrato, in certe direzioni, ostacoli (cioè teoremi limitativi) che riconosce insormontabili

I successi delle applicazioni pratiche con l'uso dell'elaboratore sono sotto gli occhi di tutti: dall'archivio dei beni culturali, allo spoglio sistematico di testi letterari alla diagnostica medica con strumenti quali la tomografia assiale computerizzata (TAC). L'elaboratore si avvale di strumenti matematici e logici che traggono la loro origine dall'opera di G. Boole, il quale scrisse nella seconda metà del secolo scorso un trattato sulle leggi del pensiero, [B][10], da cui poi sono nate le strutture matematiche note col nome di algebre di Boole.

In base a tutto ciò, oggi non è più possibile, a scuola, passare sotto silenzio la Logica e l'Informatica. Tuttavia bisogna non lasciarsi

---

[10] Per approfondire l'argomento si consiglia [H].

prendere da entusiasmi esagerati: è necessaria un'attenta riflessione sui compiti della scuola dell'obbligo, tra i quali è quello di fornire conoscenza e formazione, non capacità tecniche specifiche. Lo studio dell'Informatica dovrebbe iniziare da quella fase cosiddetta povera, quella della carta e matita, solo in seguito arricchita dall'uso di strumenti di calcolo più raffinati. D'altra parte la Logica, per sua natura, affina il pensiero critico e serve a prendere le distanze da quelle che sono le mode del momento, ricche, se si vuole, di elementi di richiamo, contribuendo egregiamente ad una salda cultura di base.

Uno degli ostacoli maggiori alla diffusione della nostra materia nell'insegnamento è costituita proprio dal rapporto difficile e complesso che sussiste col linguaggio. Accostandosi per la prima volta a considerazioni logiche si prova un certo smarrimento: pare di entrare in un mondo di frasi prive di senso: quali, ad esempio *Luigi va a pesca e lunedì splende il sole* ; *Luigi è un non bambina* ; *se 0 = 1, Giancarlo Pajetta è il Papa; se c'è il sole esce il coniglio con le macchie nere* [11]. Ci si accorge, poi, di quanto diverso sia il significato dei simboli logici, da quelli linguistici, anche omonimi (si veda ad esempio il ruolo diverso della congiunzione logica $\wedge$ e dello stesso connettivo usato in lingua in modi diversi: come conseguenza, come disgiunzione, con aspetti intensionali, ecc.). Ma la cosa non deve stupire la perdita in espressività a favore di un aumento di chiarezza, è un effetto del procedimento di schematizzazione, di cui si diceva prima, risultato di una matematizzazione. Il linguaggio di cui si occupa la Logica, almeno negli aspetti più semplici, è un frammento ridotto e deformato della lingua usata in Matematica.

Lo studio della Logica ha poi un'importante conseguenza sull'apprendimento della Matematica, oltre che per motivi di carattere

---

[11] Sarebbe senza dubbio più interessante, per gli studenti, cercare di capire la differenza tra frasi quali: *se studi sarai promosso* : *se non studi non sarai promosso* .

generale, perché, come dice [BC], «è una novità da non sottovalutare il fatto che, invece di dare definizioni e fare dimostrazioni, esse diventino, in quanto tali, oggetto di riflessione.». E' dunque in gioco un nuovo modo di intendere la Matematica che, da Scienza delle quantità, è divenuta oggi anche la Scienza degli aspetti qualitativi.

3. Logica naturale e Logica formale. - Mi sono sempre posto il problema di saper discernere procedimenti razionali validi per la Logica naturale e non applicabili a quella formale. Finora però mi sono sempre convinto che tale distinzione poteva trarre in inganno. Ciò che non sembra rientrare nell'ambito di un certo tipo di Logica formale, lo si può facilmente ritrovare in altri ambiti. Questo perchè gli studi formali hanno il pregio di delimitare chiaramente il loro campo di applicabilità. Così ci si può rendere conto che certe carenze espressive e deduttive del calcolo proposizionale vengono superate dal calcolo dei predicati del primo ordine, da calcoli di ordine superiore, ecc. Altri tipi di limitazioni vengono analizzati in calcoli modali e/o non classici, a più valori di verità, devianti, non monotoni, ecc. Evidentemente tutti questi studi traggono spunto da situazioni riscontrabili nel linguaggio, e forse allora con Logica naturale si intende proprio l'unione di tutti questi modi di sviluppare un pensiero razionale. Questa visione globalizzante può essere inadatta come oggetto di insegnamento ed offrire difficoltà all'apprendimento: cercare di tornare ad una situazione globale di questo tipo, è un modo di procedere contrario al progresso scientifico. Servendomi di un'analogia, sarebbe come mescolare in un unico pentolone tutte le più avanzate specializzazioni mediche, farmacologiche, assieme alle conoscenze mediche antiche, alle pratiche magiche, ecc. e poi pretendere di somministrare agli allievi questa "macedonia" a piccole dosi, presumendo così di dare un contributo alla cultura medica di base. Non si può richiedere all'insegnamento della Logica di contrapporsi in modo così palese alla sua natura ed ai suoi scopi.

Per questo ed altri motivi[12] incentrare troppo l'attenzione sulla pretesa differenza tra aspetti naturali e formali, anche se può essere interessante, rischia di non contribuire alle finalità didattiche che qui interessano. Ci deve essere tuttavia nel docente la consapevolezza che solo tralasciando la globalità, si può guadagnare in chiarezza, e di qui trarre ispirazione per un'azione culturale mirata. E forse qualche accenno storico può aiutare in questa opera di convincimento.

La Logica, così come appare oggi, ha avuto un lungo cammino soprattutto nella Matematica. Si trattava di dare una veste rigorosa alle argomentazioni ed alle dimostrazioni. Così in questo campo della conoscenza si è accolta una procedura grammaticale e sintattica che ha acquistato, col tempo, generalità e proprio questa generalità ne ha garantito la diffusione, la "bontà" ed il "successo". Ma i primi passi sono stati mossi all'interno della lingua naturale, che poco a poco è stata lasciata da parte, nel senso che il frammento che interessa le deduzioni, pur essendo formato da parole, per lo più, della lingua naturale, è assai ridotto rispetto al linguaggio nella sua interezza. Grazie a questa elaborazione si è giunti ad una sintassi "speciale" che è garanzia essa stessa della correttezza della prova. Questa sintassi ha in sé regole di generazione, ha finalità proprie ed il potere di inferenza e di decisione che ha acquistato in questo modo viene trasformato in proprietà del senso comune. Semplici risultati matematici sono entrati nella vita di tutti i giorni: $2 + 2 = 4$, il quadrato costruito sull'ipotenusa

---

[12] C'è ad esempio chi, come [1], sostiene che la Logica naturale non ha alcuna esistenza empirica immediata, non essendovi protocolli d'osservazione in grado di rilevarla. E' questa anche la posizione di Kant. Per costoro, seppure con sfumature diverse, la Logica naturale è argomento di ricerche antropologiche, non matematiche.

di un triangolo rettangolo è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti, anche per i "profani" ed anche senza dimostrazione, assumendo un' "evidenza" che è frutto di cultura acquisita.

Quando alla fine del secolo scorso, la ristrutturazione della Matematica ha rigettato l'infinito e l'infinitesimo in atto ed imposto l'induzione come prova fondamentale, le espressioni analitiche della ricursione hanno richiesto l'estensionalità, è stato quindi necessario un simbolismo speciale che superasse le limitazioni della sillogistica. È nata così la scrittura con i quantificatori, mediante la quale i procedimenti dimostrativi hanno trovato una espressione adeguata sia per la loro formazione, che per la loro giustificazione. Questi modi si sono però dimostrati di scarsa compatibilità con i vincoli grammaticali di una lingua naturale e questo spiega lo sconcerto provato di fronte a dimostrazioni per assurdo, in cui si assume come dato proprio ciò che si intende negare. Allo stesso tempo apparve, ancora prima che se ne potessero cogliere i motivi, quanto gli aspetti estensionali ripugnassero ad una lingua naturale, come dimostrano frasi senza senso, corrette dal punto di vista logico. Di fronte a queste difficoltà poteva venire spontaneo rifiutare le particolarità linguistiche del linguaggio formale, ma questo rifiuto non poteva essere fatto proprio a cuor leggero, dato che le inferenze realizzate con questi nuovi linguaggi opponevano la loro singolarità tecnica, fonte di chiarezza, ai penosi ed oscuri giri di frase del linguaggio in uso[13]. D'altro canto ci si è trovati nella

[13] Per offrine un esempio, si consideri il seguente brano tratto da un documento di larga diffusione in Italia, "Istruzioni per la compilazione del Mod. 740-S (1988)": «Se l'imposta corrispondente al reddito di lavoro dipendente è invece inferiore all'importo delle predette detrazioni d'imposta, queste competono limitatamente all'importo dell'imposta corrispondente al reddito di lavoro dipendente. Esempio le due spettanti detrazioni di imposta trovano capienza nella loro misura intera di L. 648mila solo se il reddito, per l'intero anno, è stato per lo meno pari a L. 5.396.000 cui corrisponde un'imposta (arrotondata) di L. 648mila.»

condizione di ammettere che gli assiomi ora proposti, come principi primi della Logica, hanno perduto in evidenza (carattere sostanziale nella presentazione aristotelico-euclidea). E l'evidenza, allontanandosi dagli aspetti formali, ha portato via con sé quelle certezze imprecise che costituiscono il senso comune.

Cerco di affrontare il problema dal punto di vista del linguaggio comune. Si può ritenere che una "scienza" iniziasse già dai tempi preistorici. Quando comparve la scrittura, il fatto che lo stesso alfabeto sia costruito con un numero ridotto di segni, sta a testimoniare che la coscienza grammaticale era già sufficientemente evoluta tanto da padroneggiare lo svolgersi del discorso. Era questo un atteggiamento "naturale", oppure già "culturale"? Io propendo per la seconda ipotesi.

Di grande importanza fu poi l'opera dei filosofi greci. Per capirne la portata basta ricordare con L. Wittgenstein che «I problemi filosofici che interessavano già i Greci, ci interessano ancora. La nostra lingua è restata identica a se stessa e ci indirizza sempre verso le stesse questioni». Forse il più grande merito di quegli studiosi è stato quello di offrire, con un procedimento di categorizzazione sistematica e finita, la possibilità di associare i dati sensibili all'elaborazione, attraverso il discorso, di una situazione. Così grazie a loro abbiamo un ambito e, contemporaneamente, uno strumento pronto ad essere oggetto di decisione e di inferenza. In questo senso si può vedere una Logica naturale, che naturale poi non è, come il modello offerto, sostanzialmente dagli stoici, per l'appropriazione delle articolazioni sintattiche fissate nella lingua naturale, in grado di esprimere i criteri di inferenza di cui si avvale la Scienza ed aderente ai paradigmi di essa. A questo modello si riferiva tempi addietro la didattica quando stabiliva che strumenti per il suo apprendimento erano le discipline più svariate.

Il procedimento di categorizzazione si deve tuttora tenere in grande considerazione: il suo successo è stato determinato dall'aver saputo grammaticalizzare l'esperienza, cioè affidare ad una sintassi della lingua naturale la gestione delle dimostrazioni ritenute determinanti e capaci di tradurre l'economia del corso fisico degli avvenimenti, a beneficio delle decisioni umane, sia che si tratti di rappresentazioni della Natura, quanto che sia in gioco l'adattamento alla Natura stessa. Questo è principalmente merito del filosofo Crisippo, contemporaneo di Euclide che fu in grado di risolvere un problema posto da Platone ed affrontato parzialmente da Aristotele: fissare in modo discorsivo l'idea fisica della causalità[14] e, simultaneamente, regolare le concatenazioni discorsive sulla base del paradigma causale. La schematizzazione crisippiana è, ancora oggi, la base di un qualunque discorso scientifico, anche se fisici come Mach si sono opposti all'assunzione della causalità come criterio fondamentale di studio della Natura.

Le considerazioni precedenti, forse un poco complesse, le ho portate per giustificare una mia presa di posizione, avvalorata dai successi ottenuti dalla Logica, di carattere pratico e culturale. Mi sembra chiaro che non si possa conferire un valore veramente primordiale alla cosiddetta Logica naturale, ammesso che esista, ma che si tratti di un *habitus* culturale da apprendere al pari di altri. D'altro canto, si può presentare la Logica formale come una teoria che ha aspetti di semplicità e di applicabilità. Per questo ritengo varrebbe la pena di iniziare da quest'ultima, senza attendere la presentazione di discipline complesse quali l'Aritmetica razionale o la Geometria euclidea. Si può giungere, una volta costruite le capacità metodologiche e critiche, ad un analisi della complessità congenita della Logica naturale.

---

[14] La causalità ha ricevuto sempre grande attenzione; la formulazione più semplice è appunto quella che usa il connettivo $\Rightarrow$. Per cercare di approfondire meglio il problema, sono nati vari tipi di Logica, e per chi interessato consiglio la lettura del II cap. di [Ma] e [Sp]. Oggi è riservata grande attenzione al problema per le sue rilevanti applicazioni in campo economico.

4. Semantica - Nei due paragrafi precedenti ho analizzato l'esempio del §1 da un punto di vista generale, sia linguistico che filosofico. Ma veniamo a connotazioni più matematiche. Il progetto dell'esperimento di controllo è stato reso possibile grazie alla ripresentazione del quesito in termini più astratti mediante la formula $\mathbf{r} \Rightarrow \mathbf{p}$. In questo modo, il problema è stato "tradotto" nella ricerca dei casi in cui $\mathbf{r} \Rightarrow \mathbf{p}$ è vera. Ho così incontrato una situazione che merita attenzione: come analizzare, sia pure in contesto matematico, il concetto di verità.

Per parlare di verità o falsità di una formula, si devono assegnare significati alle scritture simboliche. Dunque i simboli devono rimandare ad altro; pertanto bisogna dare una specie di dizionario che spieghi il significato dei termini utilizzati (semantica). La semantica del calcolo delle proposizioni studia (solo) la verità o la falsità delle affermazioni. Per tale motivo, in questa parte della Logica, si prendono in considerazione solo proposizioni suscettibili di assumere valori di verità. Non si considerano imperativi, frasi esclamative o interrogative, frasi aperte del tipo "$x > 2$". Si tratta però di chiarire che il problema principale non è quello di assegnare valori di verità alle proposizioni cosiddette atomiche, perché questo può essere argomento di altri studi, matematici o no[15], ma quello di conoscere come valutare la verità di un'affermazione composta, una volta noti i valori di verità (cioè se vere o false) delle affermazioni componenti. Il paragone con una lingua straniera è assai illuminante, in quanto permette di intendere con semplicità la distinzione tra *linguaggio* e *metalinguaggio*. Si pensi alla grammatica della lingua inglese illustrata usando la

---

[15] L'interesse matematico della frase "*Luigi è andato a Parigi*" è nullo, così anche per la frase "*Carlo dorme supino*", e la loro verità o falsità dipende da un contesto in cui queste frasi vengono considerate. Una frase che può essere costruita con questi "mattoni" è "*Carlo dorme supino, oppure Luigi è andato a Parigi*", probabilmente di nessun interesse pratico, ammette un trattamento matematico relativo allo studio della disgiunzione.

lingua italiana. In questo esempio l'Inglese è un linguaggio per spiegare il quale si usa un linguaggio diverso. In termini logici l'Inglese è il *linguaggio oggetto* e l'Italiano è il *metalinguaggio*. La distinzione tra i livelli linguistici è, come si vede, assai semplice, ma molto importante. Si pensi che sfruttando questa distinzione il matematico A. Tarski[16] è riuscito a risolvere un paradosso famoso fin dall'antichità ed a fornire una definizione matematica del concetto di verità. L'antinomia di cui si parla è nota col nome di "paradosso del mentitore" [17] e si può schematizzare (con una certa approssimazione) con la frase

"io dico il falso.

Chi pronuncia questa frase fa un'affermazione vera e falsa allo stesso tempo, indipendentemente dal fatto che intenda proferire il vero o il falso. La ragione del paradosso consiste nel fatto che la frase confonde il linguaggio ed il metalinguaggio. Secondo Tarski, solo nel metalinguaggio è possibile stabilire se una affermazione del linguaggio è vera o falsa. Così per parlare del significato delle affermazioni e dei simboli del linguaggio formalizzato, bisogna disporre di un altro linguaggio, esterno al primo e più potente di esso.

Il metalinguaggio può essere poi, a sua volta, linguaggio oggetto per un altro metalinguaggio. Per spiegarmi con un esempio, si consideri uno studioso francese di didattica che scriva sulle difficoltà fo-

---

[16] Fondamentale a questo proposito [T1]. Un articolo divulgativo delle idee di Tarski è pubblicato col titolo *Verità e Dimostrazione*, ripubblicato nel 1978, senza varianti, su di un quaderno de Le Scienze, con lo stesso titolo dell'articolo (cfr. [T2]).

[17] Diogene Laerzio riferisce che questa argomentazione è dovuta ad Eubulide di Mileto (attivo attorno alla metà del IV sec. a.C.), esponente di spicco della Scuola di Megara. Nell'Epistola a Tito di S. Paolo si incontra una formulazione analoga del paradosso. Dai riferimenti che S. Paolo permette, si è risaliti all'autore di questa seconda versione: Epimenide di Creta. Per questo in certi testi si parla del paradosso di Epimenide.

netiche incontrate da un insegnante italiano quando usa la lingua italiana per spiegare l'Inglese, ad esempio con la frase (discutibile) "dans la langue italienne il n'y a pas des sons semblables à l'Anglais *th*. La meilleure approximation pour l'enseignant italien est le son *d*, comme dans le mot *dado*". In questo esempio il Francese è metalinguaggio per l'Italiano che a sua volta è metalinguaggio per l'Inglese.

E2) Apparentemente queste considerazioni sembrano lontane dalla pratica didattica, invece problemi analoghi si incontrano molto presto, fin dai primi anni delle elementari. Un esempio farà meglio comprendere a cosa intendo riferirmi. Molto spesso si introduce l'operazione di moltiplicazione tra numeri naturali dicendo che 3×4 ha per risultato la somma di 4 fattori eguali a 3 o, in altro modo, che $3\times4 = 3+3+3+3$, o ancora, $3\times4 = 3+\ldots+3$ (*quattro volte*)[18]. L'insegnante però può (o meglio, dovrebbe) aver incontrato nei suoi studi formativi che la moltiplicazione tra interi è definita per *ricursione* da:

$$\begin{cases} a \times 0 = 0 \\ a \times (b+1) = a \times b + a. \end{cases}$$

Sembra che vi siano due diverse definizioni della moltiplicazione [19]. Si può estendere quanto qui detto, in modo semplice, all'elevamento a potenza. Per inciso faccio notare che il secondo modo di procedere può essere utilizzato immediatamente qualora si voglia costruire un programma per realizzare tali operazioni con linguaggi di programmazione che consentano la ricorsività, quali il Logo o il Pascal.

Nasce il problema di vedere se le due moltiplicazioni coincidono ed eventualmente di stabilire quale sia più conveniente

---

[18] Tralascio il fatto, che talora è oggetto di discussione, se $3\times4 = 3+3+3+3$, oppure $3\times4 = 4+4+4$, in quanto, per quel che segue, la cosa non ha importanza.

[19] Vi è un altro e diverso modo di introdurre la moltiplicazione, come cardinalità di un prodotto cartesiano. Non la tratto perché non è mia intenzione qui un esame esaustivo e comparato delle varie possibilità di introduzione delle operazioni aritmetiche.

adottare. Il fatto che può stupire è che non si tratta di definizioni equivalenti[20], anche se sui numeri naturali coincidono. Da questa coincidenza, e vista l'immediatezza didattica del primo metodo, esso sembrerebbe da preferire. Certamente ciò può essere fatto, ma il docente si deve rendere conto che la prima definizione fa intervenire due tipi diversi di numeri naturali: quelli del linguaggio, identificati dai segni usati per denotarli, e quelli del metalinguaggio, facilmente riconoscibili in quanto usati come aggettivi qualificativi numerali della parola *volte*. Cioè nella frase "*quattro volte*" il numerale è relativo al metalinguaggio.

L'uso di due livelli linguistici è causa di alcuni abusi, anche di una certa gravità. Se si adotta la convenzione che 3×4 stia ad indicare $3+\ldots+3$ (*quattro volte*), non si è in grado di dare valore alle moltiplicazioni 3×1 e 3×0, se non con definizioni esplicite [21] a riguardo. Solitamente queste precisazioni non vengono fatte, né, tanto meno, viene chiarita la necessità di tali definizioni aggiuntive, anzi in certi casi, come per l'elevamento a potenza, definizioni analoghe vengono "dimostrate", confondendo considerazioni che servono a giustificare la scelta un certo tipo di definizione, con una esigenza deduttiva. Tornando alla moltiplicazione, con la prima definizione si sfrutta la proprietà associativa dell'addizione, ma da un punto di vista teorico, la moltiplicazione è indipendente da tale proprietà[22]. Con la seconda definizione di moltiplicazione, non si incorre in simili problemi. Resta però una questione di più sottile importanza psicologica. La moltiplicazione, così come viene definita usualmente, serve anche a confer-

---

[20] La non equivalenza delle due moltiplicazioni la si può vedere come conseguenza di importanti risultati logici: i teoremi di incompletezza Gödel e l'aritmetica di Pressburger. Per l'illustrazione e dimostrazione di questa situazione si rimanda ai testi [Me] e [Ha].

[21] Se si adotta l'altra convenzione, i problemi si presentano per 1×3 e 0×3.

[22] Si vedano però le considerazioni sulle tavole pitagoriche presentate in [M1].

mare che il concetto di numerosità si modella nel numero naturale. Questo può essere ostacolo alla comprensione dei diversi sistemi numerici come osserva [Fi], in quanto non si ritrova poi alcun significato intuitivo in moltiplicazioni del tipo $\frac{3}{5} \times \sqrt{7}$.

5. Calcolo dei predicati. - Per mancanza di tempo mi soffermo assai brevemente su alcuni aspetti riguardanti la simbolizzazione nel calcolo dei predicati. L'argomento, più complesso del calcolo delle proposizioni, merita maggior attenzione. L'esigenza di introdurre questa nuova schematizzazione del linguaggio può essere giustificata dall'esempio di un famoso sillogismo (in *Barbara*):

"Tutti i greci sono uomini";
"Tutti gli uomini sono mortali";
"Tutti i greci sono mortali".

L'analisi attraverso il linguaggio proposizionale non dà ragione della correttezza del ragionamento sopra esposto: infatti dovrei schematizzare le tre frasi con tre proposizioni diverse, **p**, **q** e **r**, senza assolutamente trovare ragioni formali per cui da **p** e **q**, si deduce **r**. Ho bisogno allora di uno strumento più duttile, di un bisturi che affondi maggiormente nel tessuto linguistico per metterne in evidenza le articolazioni più complesse.

Nella lingua corrente si incontrano predicati che esprimono la caratteristica di un soggetto e predicati che mettono in relazione il soggetto con un altro elemento. Dal punto di vista linguistico, il primo caso si attua con i verbi intransitivi coniugati nelle persone singolari, oppure con i predicati nominali. Ne sono esempi le frasi "*Carlo corre*", "*la mela è rossa*", "*il bicchiere è di vetro*". Le frasi "*S. Quasimodo tradusse l'Odissea*", "*Piero mangia la mela*" fanno intervenire verbi transitivi, che esprimono l'azione di un soggetto su di un oggetto. Nella Lingua italiana è possibile invertire i ruoli tra soggetto ed oggetto di un'azione, usando la forma passiva: "*L'Odissea fu tradotta da S. Quasimodo*", "*La mela è mangiata da Piero*". In queste frasi, che sono modi diversi per esprimere lo stesso fatto, il ruolo di soggetto viene assunto sia dal soggetto dell'azione, sia dall'oggetto. Questo giustifica l'attitudine matematica a confondere il ruolo del soggetto e del complemento, parlando di predicati con più soggetti. Se così schematizzando con un'abbreviazione le frasi indicate sopra, si potrebbe scrivere T(Quasimodo,Odissea), M(Piero,mela). Il passaggio dalla considerazione non esclusiva di predicati che esprimono caratteristiche di un solo soggetto, a quello di predicati che esprimono caratteristiche di più soggetti è ritenuto da molti il momento di distacco della Logica moderna dalla Logica classica e si può datare dal 1879, anno di pubblicazione di [F].

Vi sono anche altri modi nella Lingua italiana per introdurre predicati con più soggetti, ad esempio con predicati nominali seguiti da complementi di varia natura: "*Piero è amico di Carlo*", "*Andrea è figlio di Luca e Clara*"

E3) Da quest'ultimo esempio traggo lo spunto per introdurre un altra struttura fondamentale del linguaggio formale: i quantificatori

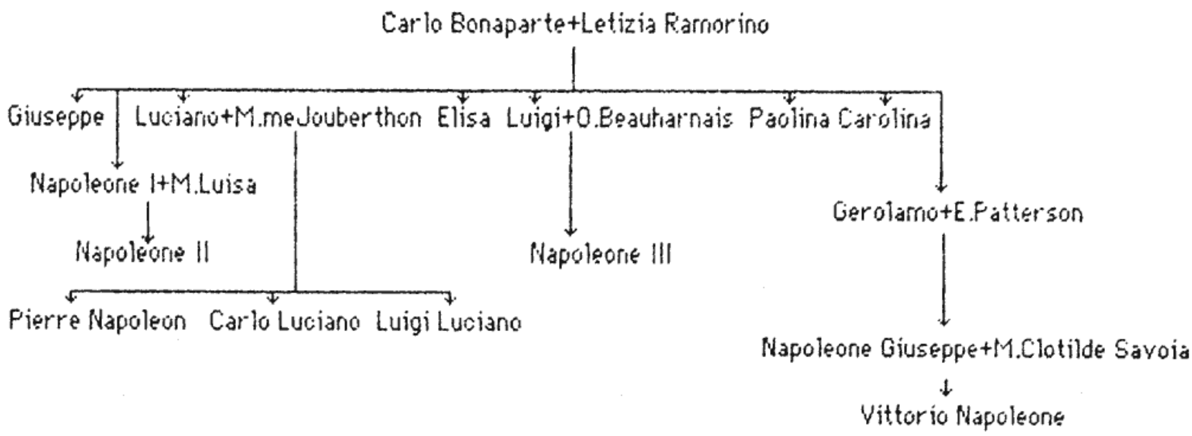


Fig. 2

Nella Fig. 2 è rappresentato l'albero genealogico della famiglia Bonaparte. In esso il rapporto matrimoniale è indicato con un segno matematico +, il rapporto genitori - figli è indicato con una freccia. Se consideriamo l'insieme B = {Carlo, Giuseppe, Napoleone I, Luciano, Elisa, Luigi, Paolina, Carolina, Gerolamo, Napoleone II, Napoleone III, Pierre Napoleon, Carlo Luciano, Luigi Luciano, Napoleone Giuseppe, Vittorio Napoleone}, come universo del discorso, in esso possiamo individuare diversi sottinsiemi. Piu che la descrizione di tutti i sottinsiemi (ce ne sono $2^{16} = 65.536$), mi interessa descriverne alcuni. Ad esempio N = {Napoleone II, Napoleone III, Pierre Napoleon, Carlo Luciano, Luigi Luciano, Napoleone Giuseppe} è l'insieme dei nipoti di Carlo Bonaparte. Se voglio però descrivere simbolicamente la situazione, usando solo un simbolo per indicare il rapporto di padre - figlio, ho qualche difficoltà. Sia cioè P(x,y) la schematizzazione (simbolizzazione) della frase "*x è padre di y*". E' corretto allora scrivere P(Carlo, Napoleone I). Ma come esprimere il rapporto tra Napoleone II e Carlo Bonaparte? Essendo il duca di Reichstad figlio di Napoleone I, si può scrivere P(Napoleone I, Napoleone II). Ma se si vuole una descrizione con formule dell'insieme dei nipoti di Carlo Bonaparte il predicato P(x,y) apparentemente sembra insufficiente. E tale è se si ammette che le formule possano essere costruite solo con i connettivi proposizionali. Se si analizza meglio il fatto che Napoleone II è nipote di Carlo, si vede che tale parentela nasce perchè il nipote è figlio di un figlio, cioè esiste un Bonaparte che è figlio di Carlo e padre di Napoleone II. Quanto detto per Napoleone II, vale anche per Luigi Luciano, non nel senso che Napoleone I è padre di Luigi Luciano, ma che esiste un Bonaparte che è figlio di Carlo e padre di Luigi Luciano. Si riconosce allora che si può rappresentare l'insieme N dei nipoti scrivendo $N = \{x \in B | (\exists y \in B)(P(Carlo, y) \wedge P(y, x))\}$. Nella formula che definisce l'insieme è presente la scrittura "$\exists y \in B$", il cui significato è appunto "esiste un y, elemento dell'insieme B". Con l'interpretazione che si è data al predicato P(x,y), nella formula si chiede che tale y sia figlio di Carlo e padre di x.

Si consideri ora l'insieme C = {Napoleone I, Luciano, Luigi, Gerolamo, Napoleone Giuseppe}. Analizzando l'albero genealogico si vede che questi individui sono caratterizzati dal fatto di aver avuto solo figli maschi. Se allora si simbolizza la frase "x è maschio" con la scrittura M(x), si ha M(Napoleone II) e $\neg$ M(Elisa). L'insieme C si può scrivere C = $\{x \in B | (\forall y \in B)(P(x,y) \Rightarrow M(y))\}$. In questa scrittura compare una novità: il simbolo del quantificatore $\forall y \in B$, che sta a significare: "preso comunque un Bonaparte". La traduzione letterale della formula sopra scritta risulta così: "preso comunque un Bonaparte, se è figlio di x, allora è maschio". Per impadronirsi delle potenzialità del linguaggio, anche in un contesto così semplice, è bene effettuare vari esercizi, provandosi a descrivere in linguaggio simbolico, il fatto che Elisa sia zia di Napoleone III, che Vittorio Napoleone è pronipote di Carlo, ecc

Tralascio altri esempi, ma sarà cura dell'insegnante soffermarsi a lungo sulla quantificazione, sia interpretandola come fenomeno linguistico, che simbolico. In Lingua italiana la quantificazione universale, cui corrisponde il simbolo $\forall$, viene solitamente introdotta con parole come "*ogni*", "*ciascuno*", "*qualunque*", "*tutti*", ma anche con:

"*il*": es. "***il*** *contribuente verserà l'importo entro **il** 30 maggio*",

"*chi*", es. "***chi*** *è causa del suo mal pianga se stesso*"

La quantificazione esistenziale, cui corrisponde il simbolo $\exists$, viene, di solito specificata da parole quali "*qualcuno*", "*certi*", "*alcuno*", ma anche con:

"*uno*" es. "***uno*** *di voi mi tradirà*"

Nella lingua i quantificatori sono spesso presenti in combinazione con la negazione ed in tal caso le forme usate sono assai varie. Ad esempio "***non si** hanno mai abbastanza soldi*"

Con lo strumento simbolico dei connettivi proposizionali e dei quantificatori, il linguaggio logico acquista una notevole flessibilità. Resta pero sempre uno strumento grossolano, in grado di tradurre, solo in prima approssimazione, l'apparato linguistico naturale.

Personalmente sono convinto che non è opportuno trasmettere le conoscenze logiche usando esclusivamente simboli, perché ritengo che questi avrebbero presa poco duratura nella mente degli alunni. Tuttavia mi sembra indispensabile che la simbolizzazione sia uno strumento di cui il docente deve essersi ben impadronito, per essere in grado di condurre in modo corretto le lezioni riguardanti gli aspetti logici del linguaggio e della Matematica.

E4) Tutto questo sembra far intervenire aspetti poco significativi o di non immediata applicazione didattica, anche se le esigenze dell'Informatica hanno fatto cambiare a proposito, molte idee. Gli aspetti di una corretta formalizzazione sono pero inscindibili dalla presentazione della Matematica, anzi della Scienza in generale. Come esempio consideriamo il seguente problema

> Devo completare il rivestimento di una parete della cucina con un fregio alto cm. 25 e lungo m. 2. Ho a disposizione mattonelle rettangolari rosse e bianche, aventi entrambe una dimensione eguale a cm. 25, mentre l'altra dimensione è di cm. 12 per le mattonelle rosse e cm. 16 per le mattonelle bianche. Quante mattonelle devo utilizzare se non voglio essere costretto a spezzarne?

Per risolvere il problema può essere utile un disegno. Nella rappresentazione grafica non ha importanza se il disegno è approssimativo, se i rapporti tra le dimensioni della lunghezza ed altezza del fregio non vengono conservati, purché siano perfettamente in scala la lunghezza del fregio e le basi delle mattonelle, altrimenti le indicazioni che si traggono dal modello visuale sono del tutto inaffidabili. Si tratta di un problema che non ha risposta unica: le soluzioni sono date dalle coppie ‹14,2›, ‹10,5›, ‹6,8› e ‹2,11›, indicando con la prima componente il numero necessario di mattonelle rosse. Le soluzioni sono quasi impossibili a trovarsi, se si procede per casi, lavorando su di un disegno. Per questo sarebbe "faticoso" richiedere agli alunni di risolverlo completamente, per via grafica. Tuttavia è possibile determinare in modo, tutto sommato semplice, le possibili combinazioni per comporre il fregio, trattandosi di un problema che utilizza i concetti di massimo comun divisore e minimo comune multiplo. Il procedimento analitico [23] è superiore a quello empirico e si esprime con una formula:

$$12x + 16y = 200. \tag{1}$$

Ma non c'è nessun motivo che spinga a privilegiare la (1), in cui x rappresenta il numero delle mattonelle rosse ed y quello delle mattonelle bianche, rispetto, ad esempio, alle formule

$$12z + 16y = 200;\ 12x + 16z = 200;\ ecc., \tag{2}$$

che si possono accettare come modelli diversi dello stesso problema. Certamente però non è accettabile la schematizzazione data dalla

$$12z + 16z = 200. \tag{3}$$

---

[23] Il problema si può "tradurre" in un quesito di Geometria analitica: determinare i punti della retta (1) che si trovano nel 1° quandrante ed hanno coordinate intere.

E perché? Gli studenti hanno coscienza delle leggi, non scritte, che vengono violate con la (3) e non con le (2)? Capita spesso in Matematica di sostituire oggetti variabili con altri. ma in questo caso non è chiaro a quali inconvenienti siamo andati incontro.

Gli aspetti proposizionali non sono sufficienti, come già mostrato. Ma questo non avviene perche si insegnano i sillogismi o altre forme di ragionamento che richiedono il calcolo dei predicati. Non basta il calcolo delle proposizioni perché c'è l'*eguaglianza* o *identità* che è uno dei concetti fondamentali in Matematica, per trattare la quale è indispensabile fare ricorso ad aspetti almeno predicativi. Anche se all'identità è riconosciuta come una relazione basilare, le viene riservata una scarsa attenzione nella programmazione didattica, ciò perché c'è forse la stessa concezione che si riportava sopra a riguardo della Logica, che si tratti di cosa ovvia, poco interessante. Invece e un argomento complesso. ricco di aspetti inaspettati. ma per trattare l'argomento con completezza è indispensabile l'uso del calcolo dei predicati in quanto tra tutte le relazioni di equivalenza[24], l'eguaglianza gode della proprietà di sostitutività, espressa mediante la formula:

$$(4) \qquad (\forall x,y)\,(x = y \Rightarrow (A(x\,,\,x) \Rightarrow A(x\,,\,y))),$$

con opportune restrizioni sulla sostituibilità di x ad y e dove $A(x\,,\,x)$ è una formula espressa in un opportuno linguaggio. La presentazione a parole della proprietà di sostitutività dell'eguaglianza, di solito incontra consenso immediato, mostrando che le difficoltà e le puntualizzazioni tecniche. in via di enunciazione di principio. non sono rilevanti. Il problema si fa più delicato nel momento dell'applicazione del principio stesso nei vari contesti matematici. A mio parere, una maggiore familiarità e pratica col concetto di sostituzione, acquisita prima

---

[24] Vale adire relazioni riflessive, simmetriche e transitive.

ed indipendentemente da contingenze matematiche che la rendano necessaria ad uno scopo preciso, porterebbe ad una migliore comprensione dei metodi e dei ragionamenti matematici. E' infatti consuetudine dei matematici effettuare sostituzioni tra simboli o più in generale tra scritture, anche senza ponderare che in persone lontane dai procedimenti formali consueti o che devono apprendere tali metodi, l'uso disinvolto dei simboli può ingenerare incomprensioni.

Nella (4), compare il contesto, cioé l'ambito in cui l'eguaglianza viene posta, rappresentato dalle formule che si possono scrivere nel linguaggio atto a descrivere la teoria. Perciò in Geometria le formule parleranno di figure di angoli, eccetera. In Aritmetica le formule riguarderanno i numeri e le operazioni. L'eguaglianza sarà allora, con termine tecnico, una *congruenza* per la teoria che si sta studiando. Faccio osservare che la determinazione della relazione di eguaglianza e delle sue proprietà è uno dei momenti più delicati della costruzione di ogni teoria.

6. Conclusione - Credo che su temi di Logica sia possibile e proficuo innescare quella forma di didattica che prende il nome di *dibattito culturale*, coinvolgente tutta la classe, dato che spesso l'argomenti oggetto di dibattito è di conoscenza comune, non specialistica di alcuni campi e pertanto riservata agli alunni più colti e pronti[25]

Il problema dell'insegnamento della Logica è di natura sostanzialmente didattica. Credo che sia esperienza comune a tutti gli insegnanti che qualora si tratti un argomento di qualsiasi materia, una sola volta ed in poco tempo, la permanenza nella memoria degli alunni è assai breve. Dunque se si vuole incidere sulla memoria e costituire capacità negli allievi, bisogna dedicare un tempo adeguato all'argomento prescelto.

[25] Per le modalità e le finalità di questa attività, si veda [BF].

Si giustifica così lo scarso "successo" avuto della teoria degli insiemi messa in veste di capitolo iniziale o finale in molti testi di impianto concettuale già "vecchio" e spesso insegnato da docenti che non hanno incontrato ed approfondito la teoria degli insiemi nei loro studi, fermandosi agli aspetti intuitivi [26]. Così è pure facile pronosticare l'insuccesso della Logica vista solo come presentazione mnemmonica e limitata nel tempo di alcuni meccanismi come le tavole di verità. Qualora la presenza della Logica si limiti a questi aspetti poco produttivi e significativi, forse sarebbe meglio che tali argomenti non venissero neppure trattati. Per poter apprezzare l'importanza e l'utilità degli strumenti logici è necessaria una preparazione seria da parte del docente, perchè sia in grado di cogliere le occasioni, così importanti per la crescita dell'allievo. I richiami frequenti a situazioni che si possano illuminare in modo precipuo con considerazioni logiche, compiranno l'opera

Se invece l'insegnante accenna, di sfuggita e quasi malvolentieri, all'argomento, difficilmente riuscirà a farne cogliere gli aspetti interessanti, ma, ribadisco, questo è, secondo me, un problema di conoscenza approfondita, da parte del docente, ottenibile solo con studio e lavoro personali. A sfavore dell'introduzione della Logica nell'insegnamento c'è poi tutta una pubblicistica che si dice aggiornata, ma che invece è ricca di errori e confusioni.

Un contributo importante che la Logica può offrire è quello di essere un "cacciavite" idoneo allo "smontaggio del giocattolo" linguistico, per vedere cosa c'è all'interno. E' perciò un ausilio al sorgere di una coscienza critica, indispensabile sempre e assai di più oggi in presenza di *media* coinvolgenti ed onnipresenti. Bisogna mettere i ragazzi in condizione di difendersi da soli da condizionamenti e stravolgimenti, ad iniziare dai pericoli insiti già nei libri di testo.

---

[26] Si veda [M2].

Bibliografia

[B] G. Boole: **An investigation of the laws of thought, on which are founded the mathematical theory of logic and probability**. Walton & Maberley, Londra (1854), ristampato da Dover Pubbl. Inc., New York (1951).

[BC] F.Bellissima - C.Crociani: *Due osservazioni sull'insegnamento della Logica nella Scuola media inferiore* , Rapporto matematico n.72, Ist. Mat. dell'Università di Siena (marzo 1983).

[BF] M.Bartolini-Bussi, F.Ferri: *La discussione in situazioni di apprendimento della Matematica*. Relazione agli Internuclei, Pisa (marzo 1988).

[F] G. Frege: **Ideografia - Un linguaggio in formule per il pensiero puro, formato ad imitazione di quello aritmetico**, Halle (1879), Ristampato in [He], pp. 1-82.

[Fi] E. Fischbein: *Intuizioni e pensiero analitico nell'educazione matematica* su **Numeri ed operazioni nelle scuole di base - Aspetti psicologici e processi cognitivi**. A cura di L. Artusi Chini, Zanichelli, Bologna (1985).

[H] T. Hailperin **Boole's Logic and Probability**. North Holland, Amsterdam (1976)

[Ha] W.S. Hatcher: **Fondamenti di Matematica**, Boringhieri, Torino (1973)

[He] J van Hejienoort: **From Frege to Gödel**, Harvard University Press, Cambridge Mass. (1962)

[I] C. Imbert: *Entre logique Naturelle et Intelligence Artificielle*. Intellectica, 1 n. 4 (1987) pagg. 7-40

[J] P.N.Johnson-Laird, **Mental models**, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1983).

[JW] P.N.Johnson-Laird, P.C. Wason: *A theoretical analysis of insight into a reasoning task*, pubblicato su P.N. Johnson-Laird, P.C. Wason ed.: **Thinking: Readings in cognitive science** (1977) pp. 143 - 157

[M1] C. Marchini: *La Scientificità dei nuovi programmi per le Scuole Elementari. La Matematica e le altre Discipline*. Intervento al Seminario IRRSAE-Puglia per la Formazione di Esperti in Matematica. Gallipoli (Le) 26/2/87 e 13/3/87. Preprint.

[M2] C. Marchini: *Dall'«insiemistica» alla teoria degli insiemi* . La Matematica e la sua Didattica, **3** (Dicembre 1988), pp. 6 - 13.

[Ma] D.C. Makinson: **Temi fondamentali della Logica moderna**, Boringhieri, Torino (1979).

[Me] E. Mendelson: **Introduzione alla Logica Matematica**, Boringhieri, Torino (1972).

[R] J.F. Richard: *Le vrai et le faux dans les conduites de recherche et de verification*. Intellectica, **1** n. 4 (1987), 65-80

[Sm] R. Smullyan: **Qual è il titolo di questo libro?** Zanichelli, Bologna, (1981).

[Sp] F. Speranza: *Logica* su **Enciclopedia delle Scienze**, de Agostini, Novara (1984) fasc. 109.

[T1] A. Tarski: *Il concetto di verità nei linguaggi formalizzati* (*Wahrheitsbegriff in den formalisierten sprachen*) , Studia Phil, **1**, (1935/36), pp. 261-405.

[T2] A. Tarski. *Verità e Dimostrazione* . Le Scienze n° 12 (agosto 1969).

[V] T Varga: **Fondamenti di Logica per insegnanti**. Boringhieri, Torino (1973)

Una conversazione su: Fondamenti della matematica e "teoria base". L'esempio della teoria 7x2

Ennio De Giorgi

Nello studio dei "fondamenti della matematica" forse può rientrare anche la proposta di ragionevoli "teorie base", ove col termine "teorie base," designerò una selezione di concetti primitivi, definizioni, assiomi, abbastanza semplici per essere compresa anche da ascoltatori non specializzati ed abbastanza ampia perchè sia possibile assumerla come base fondamentale su cui edificare le piu' complesse teorie matematiche (e forse anche altre teorie scientifiche e filosofiche).

Tra i requisiti desiderabili di una "teoria base", metterei al primo posto la semplicità, l'uso di un linguaggio vicino alle abitudini della maggior parte dei matematici contemporanei, l'eventuale recupero di qualche antica tradizione matematica e filosofica.

Altro requisito essenziale di una buona"teoria base" dovrebbe essere la facilitá "d'innestare" in modo naturale, sul tronco della teoria stessa, i diversi rami della matematica. Inoltre la teoria base dovrebbe presentare il piu' alto grado di "autoreferenza"; mi e' difficile trovare una definizione generale del termine "autoreferenza", ma posso citare l'esempio della teoria 7x2 in cui, le relazioni Rrelb, Rrelt,...Rrelq, sono, per così dire, le pietre di un arco di cui l'operazione Seprq è la chiave di volta.

Infine accanto a requisiti informali, la "teoria base" dovrebbe avere due requisiti facilmente formalizzabili da parte dei logici matematici: dovrebbe essere facilmente descrivibile nel linguaggio del calcolo dei predicati del primo ordine e dovrebbe possedere molti modelli finiti non banali.

Concluderó osservando che non vi è ragione per pensare che la teoria 7x2 sia ottimale rispetto a tutti questi requisiti; essa è solo un esempio che spero, potrá incoraggiare altri matematici alla ricerca di altre "teorie base" o alla individuazione, all'interno di teorie giá note, di qualche nucleo fondamentale finito che possa essere ragionevolmente assunto come "teoria base".

Lo spirito conduttore di questa teoria risiede nel rinviare il concetto di "coppia", "terna", ecc., per evitare di essere immediatamente immessi in una teoria non finita. Pertanto si useranno i concetti di relazioni binarie, ternarie e quaternarie, come verrá specificato, al fine di costruire, finchè è possibile, una teoria base FINITA con modelli FINITI.

TEORIA 7x2

Diamo le seguenti definizioni:

1) Qqualq $\Leftrightarrow$ q e' una qualita'.

Scriveremo qx per denotare che x gode della qualita' q

2) Qrelbr $\Leftrightarrow$ r e' una relazione binaria

3) Qreltp $\Leftrightarrow$ p e' una relazione ternaria.

Scrivere ρxyz equivale a dire che "x e' nella relazione ρ con y e z".

Infine:

4) Qrelqτ $\Leftrightarrow$ τ e' una relazione quaternaria.

Ovviamente τxyzt significa che x e' nella relazione τ con yzt.

Definiamo poi le operazioni nel modo seguente:

5) Qops f $\Leftrightarrow$ f e' una operazione semplice;

fx=y indichera' che y e' il risultato dell'operazione semplice f eseguita su x.

6) Qopb ϕ e' una operazione binaria.

Scriveremo ϕxdy=z per indicare che z e' il risultato dell'operazione ϕ eseguita su x ed y.

Osservazione. Richiamandoci alle notazioni usuali adottate per la somma ed il prodotto, molto spesso useremo la notazione $x+y$ o $x \cdot y$ in luogo di ϕxy.

Unitamente alle sei definizioni date si introduce l'operazione

7) Invrb, inversione della relazione binaria; posto Invrb $r = r^{-1}$ vale la condizione:

$$rxy \Leftrightarrow r^{-1}yx$$

Osservazione. Una delle possibili varianti di questa teoria è quella di considerare le operazioni semplici come caso particolare delle relazioni binarie e le operazioni binarie come caso particolare delle relazioni ternarie.

Introduciamo ora un secondo gruppo di oggetti fondamentali. Il primo e' Rqual, caratterizzato dalla condizione:

1) Rqual $qx \Leftrightarrow qx$ relazione binaria che descrive il comportamento della qualitá.

2) Rrelb è una relazione ternaria che puó essere applicata a relazioni binarie o ad operazioni semplici nel modo seguente:

$$(\mathrm{Relb})rxy \Leftrightarrow rxy$$

$$(\mathrm{Relb})fxy \Leftrightarrow fx=y \ .$$

Analogamente poniamo:

3) Rrelt è una relazione quaternaria tale che:

$$(\mathrm{Rrelt})\rho xyz \Leftrightarrow \rho xyz$$

$$(\mathrm{Rrelt})\phi xyz \Leftrightarrow \phi xy=z$$

Introduciamo ora l'operazione binaria Seprq (separazione di variabili nelle relazioni quaternarie) caratterizzata dalle proprietá seguenti:

4) se τ è una relazione quaternaria, allora, per ogni oggetto x, è definita Seprqτx ed è una relazione ternaria, tale che

$$(\mathrm{Seprq}\tau x)yzt \Leftrightarrow \tau xyzt.$$

Conviene esplicitamente osservare che una relazione quaternaria puó essere descritta da una operazione binaria e da una relazione ternaria.

Introduciamo ora le nozioni di dominio, codominio ed ambiente.

5) Sia Qrelbr (cioè sia r una relazione binaria), Rdom è una relazione binaria tale che

$$\text{Rdomxr} \Leftrightarrow \text{esiste } y : \text{rxy},$$

e traduce il fatto che "x appartiene al dominio di r".

Analogamente se Qopsf allora :

$$\text{Rdomxf} \Leftrightarrow \text{esiste } y : \text{fx} = y.$$

6) Se Qrelbr definiamo:

$$\text{Rcodyr} \Leftrightarrow \text{esiste } x : \text{rxy}.$$

Se Qopsf allora :

$$\text{Rcodyf} \Leftrightarrow \text{esiste } x : \text{fx} = y$$

L'ambiente di una qualitá, relazione, operazione, è l'area in cui vanno presi gli oggetti che hanno quelle qualitá o sono comunque coinvolti da quella relazione o operazione.

7) Denoteremo con Ramb la relazione binaria così definita:

a) Se q è una qualitá ed x un oggetto

$$\text{Rambxq} \Leftrightarrow \text{qx}.$$

b) Se r è una relazione ed x un oggetto allora:

$$\text{Ramb zr} \Leftrightarrow \text{Rdomxr Vel Rcodxr}.$$

c) Se f è un'operazione ed x un oggetto allora

$$\text{Rambxf} \Leftrightarrow \text{Rdomxf Vel Rcodxf}.$$

d) Se ρ è una relazione ternaria ed x un oggetto allora

$$\text{Ramb } x\rho \Leftrightarrow \exists\, y, z \text{ tali che } \rho xyz \text{ Vel } \rho yxz \text{ Vel } \rho yzx.$$

e,f,g) Definizioni anologhe si danno per le operazioni binarie, le relazioni quaternarie e le operazioni ternarie.

Abbiamo cosi selezionato il "tronco" 7x2 sul quale possono essere innestati i vari "rami" della matematica.

Intanto, mostriamo come un primo innesto puo essere l'aritmetica.

ARITMETICA

Le notazioni di cui ci serviremo sono le seguenti:

QNn $\Leftrightarrow$ è la qualita di n di essere un numero naturale.

Add $\Leftrightarrow$ addizione di due numeri.

Molt $\Leftrightarrow$ moltiplicazione di due numeri.

Nord $\Leftrightarrow$ ordinàmento naturale di numeri naturali.

Precisamente:

$$\text{Nordxy} \Leftrightarrow x \leq y \,.$$

Aggiungendo gli assiomi canonici dell'aritmetica classica, questa sará pienamente formulata.

Scriveremo:

QMPx $\Leftrightarrow$ x è un modello di predicato (*).[1]

MPindx = y $\Leftrightarrow$ y è l'indice di complessitá del modello di predicato x.

Qualitá, relazioni, operazioni introdotte nella (7x2), sono particolari modelli di predicati.

Esempi

Qqual1 $\Rightarrow$ MPind q = 1

MPind 1 = O

MPind O = O.

Se r è una relazione binaria o un'operazione semplice, allora:

MPind r = 2

1 ______________________________

(*)La notazione introdotta sará utile nella costruzione della teoria dei predicati, nel senso che, ad un predicato di ordine uno associerá un modello di ordine uno.

Se ρ è una relazione ternaria o un'operazione binaria, allora:

MPind $\rho=3$.

Se infine, τ è una relazione quaternaria o una operazione ternaria, allora

MPind$\tau=4$.

Introduciamo [Sep], la separazione di variabili nei modelli di predicati (che comprende come caso particolare la Sepqr). Sep è un'operazione binaria che agisce nel modo seguente :
Se x e' un modello di predicato ed il suo indice è n+1, allora per ogni y esiste un modello di predicato Sep x y il cui indice è n . In formule se MP ind x = n+1, allora qualunque sia y esiste MP ind (Mp Sep xy) = n.
Il raccordo fra questo concetto ed il secondo gruppo di nozioni della teoria base è il seguente.
Se per semplicita', poniamo

x · y = MP Sep xy

allora valgono i seguenti assiomi<:

$qx \Leftrightarrow q \cdot x = 1$

$rxy \Leftrightarrow (r \cdot x) \cdot y = 1$

$fx = y \Leftrightarrow (f \cdot x) \cdot y = 1$

$\rho xyz \Leftrightarrow (((\rho \cdot x) \cdot y) \cdot z) = 1$

$\phi xy = z \Leftrightarrow ((\phi \cdot x) \cdot y) \cdot z = 1$

$\tau xyzt \Leftrightarrow (((\tau \cdot x) \cdot y) \cdot z) \cdot t = 1.$

Si è così effettuato l'innesto dell'aritmetica e si è ottenuto, mediante MPsep, l'unificazione dei concetti, inizialmente separati, di qualita', relazioni, operazioni.

Viene naturale chiedersi se tutti i modelli di predicato debbano necessariamente essere numeri, qualita', relazioni, operazioni.

Conviene ammettere che vi siano dei modelli di predicato che non sono ne' numeri ne' qualitá ecc., ma altri enti per esempio insiemi, funzioni, mappe o altro.

Tutto sommato per un innesto facile dei vari rami della matematica, conviene riservare le parole: qualita', relazioni, operazioni a quei modelli di predicato che meglio rispondono alle nozioni intuitive di qualitá, relazioni, operazioni.

Ritengo che altri innesti possibili possano essere:

1) l'innesto del calcolo dei predicati del primo ordine nella teoria base; questa operazione verosimilmente riveler´a delle difficoltá soprattutto nella parte semantica (interpretazione delle formule).

2) Attraverso una attenta rilettura dell'uso che si fa in fisica del concetto di "variabile" si dovrebbe chiarire come tale uso del termine variabile è collegato con l'uso che del termine si fa in logica.

3) La teoria degli insiemi e la relativizzazione di essa (analisi standard e non standard) possono rappresentare un altro innesto.

4) Per i probabilisti è possibile introdurre la nozione di variabile aleatoria collegandola con la nozione di variabile del punto.

Infine si puo' passare all'innesto di altre teorie fondamentali per esempio logiche modali, λ-calcolo, categorie, ecc.

E' assai probabile che tentando questi innesti si possano vedere meglio i pregi e i difetti della teoria 7x2 e di altre "teorie base" finite.

Bibliografia

[1] E.De Giorgi-M.Forti: *Premessa a nuove teorie assiomatiche dei fondamenti della matematica,* Pisa, Quad. 45(1984), 2-31.

[2] E.De Giorgi-M.Forti: Una teoria-quadro per i fondamenti della matematica, Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Mat. Fis. Natur. 79(1985), 55-67.

[3] E.De Giorgi-M.Forti-V.M.Tortorelli: *Sul problema dell'autoriferimento,* Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Mat. Fis. Natur. **80**(1986), 363-372.

[4] M.Clavelli-E.De Giorgi-M.Forti-V.M.Tortorelli: *A self-reference oriented theory for the Foundation of Mathematics,* in *Analyse mathématique et Applications - Contributions en l'honneur de J.L. Lions,* Gauthier-Villars, Paris 1988, 67-115.

LA CARATTERISTICA DI EULERO IN GEOMETRIA

Giuseppe De Cecco

Nella riunione inaugurale sono stato presentato come un salvatore della Geometria. La Geometria certamente non ha bisogno di me, non deve difendersi. Essa, come dice Platone,

> *"e' conoscenza di cio' che sempre e', e' argano che tira l'animo verso la verita'."*

Si può essere piú o meno d'accordo su questo, ma da un punto di vista storico non si può negare che la Geometria è stata la via privilegiata per avvicinarsi alla matematica.

Come afferma Atiyah, uno dei massimi matematici viventi,

> *"l'intuizione geometrica rimane il canale piu' potente per la comprensione della matematica, e dovrebbe essere incoraggiata e coltivata."*

Sono contento del tema proposto poiché esso mi permette di parlare anche dell'infanzia della *"Topologia algebrica"*, una delle branche piú giovani della matematica, che - secondo Dieudonné - caratterizzerà il XX secolo.

Accenneremo dopo a che cosa sia la Topologia algebrica, ora ricordiamo soltanto che la Topologia è lo studio delle proprietà di una figura che sono invarianti per omeomorfismi. Due figure X ed Y sono *omeomorfe*, in simboli $X \cong Y$, se esiste tra loro un *omeomorfismo* $f:X \longrightarrow Y$, cioè un'applicazione biunivoca e continua insieme alla sua inversa.

Per la topologia due figure omeomorfe sono "uguali", indistinguibili. Un quadrato e un cerchio sono la stessa cosa, una corona circolare e un cilindro (non solido) sono la stessa cosa; mentre per la geometria euclidea sono tutte figure distinte poiché non sono tra loro congruenti.

Ebbene nella topologia l'importanza del *teorema di Eulero* per i poliedri è notevolissima, se si pensi che la storia della topologia fino al 1851 si confonde, a meno di rare eccezioni, con la storia del teorema stesso.

L'anno della sua scoperta è il 1750, ma il risultato è pubblicato nel 1752 in "*Elementa doctrinae solidorum*" di Leonhard Euler (1707-1783), uno dei matematici piú geniali e prolifici di tutti i tempi.

L'enunciato originale del teorema è

> "**In omni solido hedris planis incluso aggregatum ex angulorum solidorum et ex numero hedrorum binario excedit numerum acierum.**"

Chiamando con F il numero delle facce, con V quello dei vertici e con S quello degli spigoli si ha la celebre formula

$$F + V = S + 2$$

che generazioni di ragazzi hanno ricordato mnemonicamente con la frase: *F*atti *V*edere *S*abato alle *2*.

Ebbene mi sembra che questa formula venga attualmente trascurata nelle Scuole secondarie, insieme a gran parte delle questioni inerenti ai poliedri, questioni che vi posso assicurare non sono per nulla sorpassate. Dopo circa 2500 anni i poliedri esercitano ancora il loro fascino.

Come afferma ancora M.F.Atiyah (nell'articolo *Tendenze in Matematica pura* riportato in *La didattica della matematica oggi,* a cura di C.Sitia, Quaderno UMI, Pitagora ed. 1979):

> *La matematica moderna non ha chiesto il divorzio dalla matematica tradizionale come a volte si insinua. I matematici hanno unito le loro forze e si sono proiettati in direzioni diverse ma gli obiettivi di base sono ancora in gran parte gli stessi. La differenza sta piu' nella forma che nella sostanza e se Newton o Gauss potessero riapparire in mezzo a noi, per capire i problemi in discussione della presente generazione di matematici, basterebbe loro soltanto un breve corso preliminare.*

A mio avviso, seguendo Atiyah, è essenziale recuperare il senso d'unità delle diverse branche della matematica : i loro legami, spesso insospettati, le analogie non sono accidentali, ma fanno parte della essenza della matematica, che è un'attività umana non un programma per computers.

1. Concetto di poliedro.

E' chiaro che la definizione di poliedro usata da Eulero è *"solido delimitato da facce piane"*. Ebbene, se questa è la definizione di poliedro, la formula di Eulero non si applica a tutti i poliedri, come osservò già Simon Lhuilier nel 1813. Infatti per un *poliedro anulare* si vede facilmente che $V-S+F=0$, per un *poliedro con una cavita'* si ha $V-S+F=4$.

Si tratta quindi di vedere a quali classi di poliedri si applica la formula di Eulero, oppure dare una definizione di poliedro piú restrittiva.

Euclide non definisce i poliedri in maniera esplicita, ma nel Libro XI implicitamente si deduce che un poliedro è un *"solido delimitato da facce piane"*. Ora un solido è una porzione di spazio connessa; quindi nel concetto di solido è implicita l'idea che il bordo di un poliedro (cioè la superficie che delimita il poliedro) divida lo spazio in cui è immerso in due parti, una limitata da chiamarsi *interna* e una illimitata da chiamarsi *esterna*. Ciò suggerisce di porre a fondamento del concetto di poliedro il

TEOREMA DI JORDAN
Se Π e' una (superficie) poliedrica semplice e chiusa, allora essa divide lo spazio in due regioni (aperte e connesse), aventi entrambe come frontiera Π.

Per comprendere bene il teorema consideriamo l'analogo nel piano:

Se Π e' una (linea) poligonale semplice e chiusa, allora essa divide il piano in due regioni (aperte e connesse), aventi entrambe come frontiera Π.

E' questo il celebre teorema enunciato da C.Jordan nel 1887. La dimostrazione da lui data non era completa, ma era notevole il riconoscere che un enunciato cosí semplice ed evidente avesse bisogno di una dimostrazione, la quale non è per nulla semplice. L'enunciato generale del teorema è

Se J e' una curva piana semplice e chiusa (cioe' una curva $J \subset \mathbb{R}^2$ omeomorfa alla circonferenza), allora $\mathbb{R}^2 - J$ ha due componenti connesse, aventi J come frontiera comune.

Naturalmente se J è una circonferenza il teorema è ovvio. Nel caso generale la difficoltà sostanziale sta nel dare un "buon" criterio che permetta di distribuire i punti di $\mathbb{R}^2$-Π in esattamente *due* regioni, significative dal punto di vista geometrico.

Tenendo conto del teorema, chiamiamo *poligono (ordinario)* l'unione della regione limitata e dei punti di Π: la regione limitata è l'*interno* e quella illimitata l'*esterno* del poligono contornato dalla poligonale Π.

Naturalmente le cose si complicano nel caso dello spazio. Innanzitutto si tratta di dare il concetto di poliedrica semplice e chiusa , tale che elimini l'*intreccio* sia nei lati che nei vertici.

Nello spazio ordinario diremo che una m-pla di triangoli non degeneri:

$$\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m$$

a due a due distinti, costituisce una *poliedrica*, Π, con le *facce* nei triangoli τ_i $(i=1,\ldots,m)$ e i *lati* (o gli *spigoli*) e i *vertici* nei lati e nei vertici degli stessi triangoli, se due facce qualunque di Π o sono disgiunte o hanno in comune soltanto un vertice, vertice per entrambe, oppure hanno in comune soltanto un lato, lato per entrambe. Il *sostegno* di Π , $|\Pi|$, è il luogo dei punti delle sue facce; la poliedrica Π individua il suo sostegno ma non viceversa. I punti del sostegno sono anche i *punti* della poliedrica. Perciò si confonde spesso il sostegno di Π con Π stessa. La poliedrica Π si dice *concatenata* se, date comunque due facce di essa, τ_h e τ_k, esiste una n-pla ($n \leq m$) di sue facce:

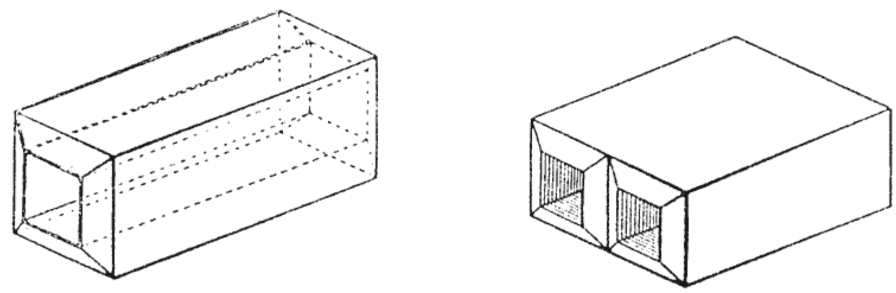
$$\tau_{\lambda_1}, \tau_{\lambda_2}, \ldots, \tau_{\lambda_n}$$

tale che $\tau_{\lambda_1} = \tau_h$, $\tau_{\lambda_n} = \tau_k$ e τ_{λ_r} $(r=1,\ldots,n-1)$ abbia in comune con $\tau_{\lambda_{r+1}}$ soltanto un lato, lato per entrambe. La poliedrica Π si dice *semplice*, se dato comunque un suo spigolo, in esso concorrono al piú due facce della poliedrica e se, comunque considerato un vertice di Π, le facce di Π concorrenti in esso, si possono concatenare mediante facce uscenti da quel vertice stesso. Gli spigoli che appartengono ad una sola faccia costuiscono il *bordo*, $\partial\Pi$, della poliedrica semplice. La poliedrica semplice Π si dice *chiusa* se, dato comunque un suo spigolo, in esso concorrono sempre due facce della poliedrica: in tal caso $|\partial\Pi| = \emptyset$.

Ebbene, se Π è semplice e chiusa, per il teorema di Jordan, essa divide lo spazio in due regioni, una limitata e l'altra illimitata. L'unione della regione limitata e del sostegno della poliedrica costituisce un *solido poliedrico* o *poliedro*, $\mathcal{P}$, avente come frontiera Π. La regione limitata è l'*interno* e quella illimitata l'*esterno* del poliedro contornato da Π.

Si osservi che non è l'usuale definizione di poliedro: un poliedro nel nostro senso può essere non convesso, anzi un modello standard è un parallelepipedo con $p > 0$ "*buchi*", detto anche *blocco prismatico p-uplo*, omeomorfo ad una *ciambella con p buchi* (vedi figura sotto).

Se però $\mathcal{P}$ è convesso, allora il suo bordo, Π, è omeomorfo ad una sfera e quindi al bordo di un parallelepipedo con $p=0$ buchi.



Blocchi prismatici con $p = 1$ e $p = 2$.

Ciambella con $p = 3$ buchi.

2. La caratteristica di Eulero.

Sia Π una poliedrica arbitraria (in generale aperta anche non semplice). Si chiama *caratteristica di Eulero* il numero intero

$$\chi(\Pi) = V - S + F,$$

dove come al solito V è il numero dei vertici, S quello degli spigoli ed F quello delle facce.

Si dimostra abbastanza facilmente che se Π e Π' sono due poliedriche aventi lo stesso sostegno, allora $\chi(\Pi) = \chi(\Pi')$, cioè la caratteristica di Eulero non dipende dalla reticolazione scelta per Π: in particolare se Π può considerarsi reticolata da poligoni e $\tilde{V}$, $\tilde{S}$, $\tilde{F}$ sono rispettivamente il numero dei vertici, degli spigoli e delle facce della *reticolazione poligonale*, allora vale

$$V - S + F = \tilde{V} - \tilde{S} + \tilde{F}$$

Inoltre, ma ciò è piú difficile, si può dimostrare che

$$|\Pi| \cong |\Pi'| \quad \Rightarrow \quad \chi(\Pi) = \chi(\Pi'),$$

cioè χ è un *invariante topologico* (anzi *omotopico*).Questa proprietà giustifica il notevole interesse della caratteristica di Eulero per poliedri (anzi per spazi topologici triangolabili).

Ora, poiché un poliedro convesso ha il bordo omeomorfo ad una sfera, S^2, dall'invarianza topologica segue che per i poliedri Π della geometria elementare si ha

$$\chi(\Pi) = \chi(S^2).$$

Ma S^2 è omeomorfa al bordo di un tetraedro, per il quale il calcolo è semplice:

$$V = 4 \qquad S = 6 \qquad F = 4 .$$

Si conclude allora che *per un poliedro $\mathcal{P}$ tale che $|\partial\mathcal{P}| = \Pi \cong S^2$, vale $\chi(\Pi) = 2$, cioe' la formula di Eulero.*

Se Π è una *poligonale* poniamo semplicemente $\chi(\Pi) = V - S.$

Nell'Appendice daremo una dimostrazione diretta seguendo A.L. Cauchy. Altre dimostrazioni (piú o meno complete) si trovano in [4], [5], [6], [7], [8]: sono tutte dimostrazioni abbastanza elementari che potrebbero essere date in una scuola superiore o anche in una media trascurando qualche dettaglio (cfr. [8]).

3. Esempi.

Osserviamo innanzitutto che se A, B, $A \cup B$, $A \cap B$ sono poliedriche o poligonali, allora vale

$$(*) \qquad \chi(A \cup B) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B)$$

come si verifica facilmente.

Da qui segue che se Σ_1 è una *poliedrica anulare*, allora $\chi(\Sigma_1) = 0$. Infatti sia Σ_1 decomposta in due poliedriche, A e B, come in figura, allora

$$\chi(A) = \chi(B) = \chi(S^2) - 2 = 0$$

e tenendo conto di (*) si conclude $\chi(\Sigma_1) = \chi(A \cup B) = 0$.

Sia ora Σ_p la poliedrica bordo di un blocco prismatico p-uplo. Considerando Σ_p decomposta in due poliedriche, A e B, come in figura, si ha

$$\chi(A) = \chi(\Sigma_1) - 1 = 0 - 1 = -1$$

$$\chi(B) = \chi(\Sigma_{p-1}) - 1 \qquad\qquad \chi(A \cap B) = \chi(S^1) = 0$$

quindi

$$\chi(\Sigma_p) = \chi(\Sigma_{p-1}) - 2,$$

da cui

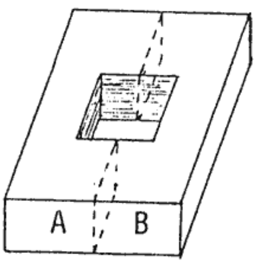
$$\chi(\Sigma_p) = (\chi(\Sigma_{p-1}) - 2) - 2 = \chi(\Sigma_1) - 2(p-1) = 2 - 2p \;.$$

Dunque se M è una superficie omeomorfa a Σ_p, segue

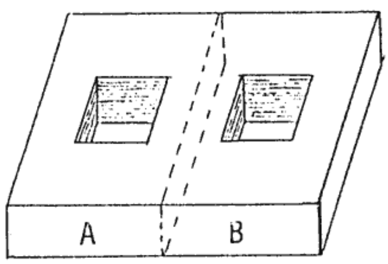
$$\chi(M) = 2 - 2p.$$

Il numero $p \geq 0$ si chiama *genere* della superficie M ed è ovviamente un invariante topologico. Per $p = 0$ (sfera) si ottiene il risultato classico. Tuttavia non sempre è facile decidere qual è il genere di una superficie, per cui spesso si procede inversamente ricorrendo alla formula

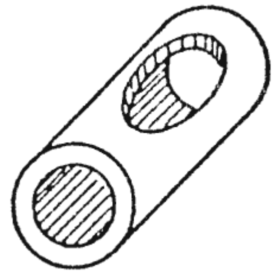
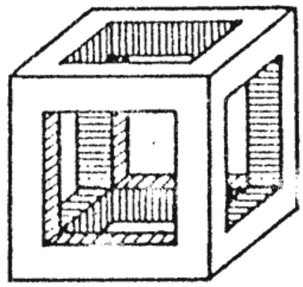
$$p = (2-\chi(\Pi))/2 \;.$$



Σ_1



Σ_2

Superficie di genere $p = 2$ e $p = 5$.

4. Poligoni generalizzati.

Si chiama *poligono generalizzato* una poliedrica (semplice e) piana: esso può pensarsi come unione di poligoni (ordinari) convessi. Possiamo sempre supporre che i poligoni convessi K_i siano tali che l'interno di $K_i \cap K_j$ $(i \neq j)$ sia vuoto, cioè che il poligono generalizzato Π sia unione, nel senso della geometria elementare, dei poligoni K_i: in breve Π è *somma diretta* dei poligoni K_i e si scrive $\Pi = \oplus_i K_i$.

Si vede facilmente che, rispetto alle operazioni di intersezione e di unione insiemistica, l'insieme dei poligoni generalizzati del piano, $\mathscr{Pol}$, è un reticolo distributivo.

Si chiama *funzionale poligonale* una qualsiasi funzione

$$\varphi : \mathscr{Pol} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Per convenzione poniamo $\varphi(\emptyset) = 0$. Il funzionale φ si dice *additivo* se $\forall\ \Pi, \Sigma \in \mathscr{Pol}$ vale

$$\varphi(\Pi) + \varphi(\Sigma) = \varphi(\Pi \cup \Sigma) + \varphi(\Pi \cap \Sigma).$$

Importanti esempi sono i funzionali $\mathscr{L}$, $\mathscr{A}$ e χ , rispettivamente *perimetro, area* e *caratteristica di Eulero* di un poligono generalizzato.

Se $h \in \mathbb{R}^+$, indichiamo con $h\Pi$ il poligono ottenuto da Π mediante l'omotetia di rapporto h; allora

$$\mathscr{L}(h\Pi) = h\ \mathscr{L}(\Pi), \qquad \mathscr{A}(h\Pi) = h^2 \mathscr{A}(\Pi), \qquad \chi(h\Pi) = \chi(\Pi).$$

Inoltre i tre funzionali sono *invarianti per congruenze* ma non caratterizzano un poligono, come si può verificare considerando i due triangoli isosceli di lati:

$$a = b = 11,\ c = 4 \qquad\qquad a' = b' = 7,\ c' = 12.$$

Naturalmente se φ è una delle tre funzioni $\mathscr{L}$, $\mathscr{A}$ o χ, da $\varphi(\Pi) \neq \varphi(\Sigma)$ segue che i poligoni Π e Σ non possono essere congruenti. Anzi se $\chi(\Pi) \neq \chi(\Sigma)$ segue che Π e Σ non sono nemmeno omeomorfi.

E' questo lo spirito della *topologia algebrica*: tradurre un problema di topologia in uno di algebra. Informazioni su enti algebrici (in questo caso numeri) danno informazioni su enti geometrici. Analogamente la *geometria analitica* traduce problemi di geometria in problemi di analisi (con la segreta speranza che questi siano di piú facile soluzione). E' ciò che tutti abbiamo fatto fin dalle scuole elementari sotto il nome di *applicazione dell'algebra alla geometria.*

Ritorniamo alla caratteristica di Eulero.

Sia Π_1 il poligono in figura con la reticolazione indicata; segue immediatamente che $\chi(\Pi_1)=0$. Con un ragionamento analogo a quello fatto per Σ_p, si deduce che per il poligono Π_p con p buchi si ha

$$\chi(\Pi_p) = 1 - p.$$

Una figura piana omeomorfa a Π_p si chama *poligono topologico con ordine di connessione* $p + 1$. Si osservi che

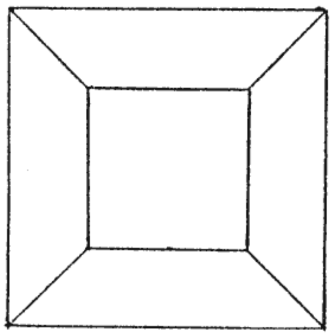
$$\chi(\Sigma_p) = \chi(\Pi_p) = 0 \quad ma \quad \Sigma_p \neq \Pi_p.$$

Se Π è un poligono convesso, allora $p = 0$; quindi in tal caso

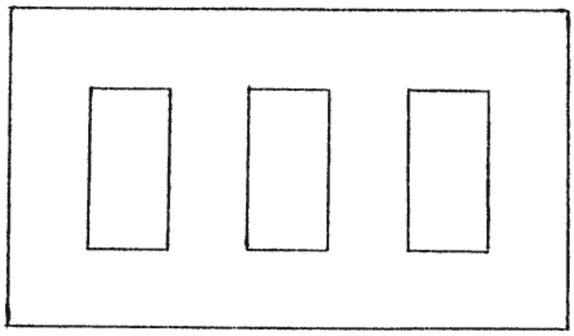
$$\chi(\Pi) = V - S + F = 1,$$

che può considerarsi la *formula di Eulero per una rete piana.*

Ricordiamo che una *rete* (o *grafo*) è una figura omeomorfa ad una poligonale (anche intrecciata). In tal caso si preferisce chiamare i vertici col nome di *nodi* e i lati col nome di *archi.*



Π_1



Π_p

5. Conclusione

Come ho detto, il 1750 segna l'inizio della storia del teorema di Eulero: la dimostrazione, benché non corretta, è molto interessante. Sostanzialmente Eulero fa vedere che l'espressione *V-S+F* ha valore costante per tutti i poliedri "da lui considerati" e quindi può essere calcolata limitandoci ad una piramide.

La prima dimostrazione soddisfacente è di A. M. Legendre (1794), che proietta il poliedro (convesso) da un punto interno su una sfera e raggiunge il risultato usando in maniera essenziale l'area di un poligono sferico. A questa dimostrazione non di pertinenza dell' *Analysis situs* seguono nel 1810 da parte di A. L. Cauchy due dimostrazioni *"combinatorie"*, ma anche queste non sono esenti da critiche.

Nel 1813 S. Lhuilier riconosce che il teorema di Eulero ha eccezioni ed analizza minuziosamente i diversi casi *patologici* , introducendo il concetto di *genere* di un poliedro, che giocherà un ruolo fondamentale in topologia.

Chi pone al teorema nel 1847 le ipotesi corrette è C. von Staudt che sostanzialmente definisce la nozione di poliedro semplicemente connesso (cioè di genere 0).

Infine nel 1850 L. Schläfli ottiene la prima generalizzazione per poliedri (euleriani) ad n dimensioni pervenendo alla relazione

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \ldots + (-1)^{n-1}\alpha_{n-1} + (-1)^n = 1$$

dove α_h è il numero delle *facce h-dimensionali.*

Come afferma J. C. Pont (autore de *La topologie algébrique des origines à Poincaré*, Presses Univ., Paris 1974), al quale sono debitore delle notizie storiche,

> *"dopo un secolo di storia, il teorema di Eulero ha percorso tutte le tappe di un onesto teorema: apparizione empirica, enunciato approssimativo, dimostrazione in un caso particolare, enunciato esatto, generalizzazione."*

Successivamente C. F. Gauss (1827) e J. B. Listing (1861) mettono in luce il legame tra il teorema di Eulero e l'*Analysis situs*, che dopo Listing si chiamerà *Topologia.* Listing nella sua opera *"Vorstudien zur Topologie"* dice esplicitamente

> *"Per topologia noi intendiamo lo studio degli aspetti qualitativi delle forme spaziali o delle leggi della connessione, della posizione mutua (...) astrazion fatta dei loro rapporti di misura e di grandezza."*

Egli ha una visione netta dell'autonomia di questa nuova branca della matematica e va alla ricerca di una dimostrazione puramente topologica del teorema di Eulero. Questa è raggiunta nel 1900 da H. Poincaré, che tenendo conto di tutti i contributi dei predecessori, dà piú dimostrazioni distinte del teorema per poliedri n-dimensionali (anche non convessi). Egli aggiunge che

> *"Questi teoremi sui poliedri hanno una portata assai generale, poiche' una varieta' qualsiasi puo' essere decomposta in poliedri rettilinei e curvilinei, essendo questo equivalente per l'Analysis situs."*

Poincaré (1854-1912), dando basi matematiche solide alle intuizioni di B. Riemann (1826-1866), ha fondato come disciplina autonoma la *topologia combinatoria* che dal 1940 in poi si è chiamata *topologia algebrica,* nome piú adatto ai metodi di questa scienza.

A me è sembrato non fuori luogo accennare in questa sede alla tormentata e insieme affascinante storia del teorema di Eulero e non credo sia trascurabile farlo notare agli allievi, che pensano che un teorema nasca già perfetto, nella forma compiuta. Quasi sempre infatti la matematica, specialmente nelle trattazioni piú formali, è presentata come un edificio perfetto, bello ma privo di vita.

Per far amare la matematica è opportuno, penso, presentarla anche nella sua realtà storica: emerge cosí anche l'uomo con le sue pene, le sue gioie, i suoi sogni. E' chiaro che non possiamo percorrere tutto il cammino seguito per giungere alla scoperta di un teorema o all'elaborazione di una teoria, ma accennare che questo cammino c'è stato o almeno averne la coscienza, è già un primo passo verso l'*umanizzazione della matematica.*

Appendice: La dimostrazione di Cauchy.

Premettiamo la nozione di rete su una sfera, osservando che il bordo di un poliedro convesso si può proiettare su una sfera.

Una *rete* su una sfera consiste di un numero finito di punti, detti *vertici*, e di archi di circonferenza massimi, detti *lati*, congiungenti alcuni vertici, verificanti le seguenti condizioni:

(i) ogni coppia di vertici è congiunta da al più un lato;

(ii) due lati non hanno punti interni in comune.

Introduciamo le seguenti notazioni:

V = *numero dei vertici*

S = *numero dei lati*

F = *numero delle regioni aperte connesse*

c = *numero delle componenti connesse*

(Una *componente connessa* è una parte connessa della rete che non è congiungibile con la parte rimanente della rete.)

Allora vale la seguente *formula di Eulero per reti sferiche:*

$$(*) \qquad \boxed{V - S + F = 1 + c.}$$

Nella dimostrazione del teorema è essenziale l'ipotesi che la rete sia su una sfera e non su una superficie di genere diverso da zero. Infatti si sfrutta il

TEOREMA DI JORDAN
Ogni curva di Jordan J su una sfera divide la superficie in (esattamente) due regioni (aperte e connesse) aventi entrambe come frontiera comune J.

La dimostrazione di (*) procede per induzione sul numero dei lati. Per $S=0$ la (*) vale poiché in questo caso la rete consiste di V vertici isolati (quindi $F=1$, $c=V$). Per andare avanti abbiamo bisogno del concetto di *vertice libero*, un vertice da cui esce solo un lato.

LEMMA
Se una rete Q (con $S \neq 0$) non contiene vertici liberi, allora esiste almeno una poligonale semplice e chiusa fatta di lati di Q.

Dim.

Poiché Q contiene lati, per ipotesi esiste un vertice p_1 da cui esce un lato p_1p_2; poiché p_2 non può essere libero, esisterà un lato p_2p_3 diverso da p_1p_2. Così procedendo si costruisce una catena di vertici $p_1, p_2, \ldots, p_n$ in cui due consecutivi sono congiunti da un lato e tre consecutivi sono distinti. Poiché Q ha solo un numero finito di vertici, alla fine giungeremo ad un vertice p_r tale che $p_r = p_n$ con $r < n$. Consideriamo il primo vertice che soddisfi questa condizione; abbiamo allora una curva poligonale chiusa costituita da lati di Q

$$p_r,\ p_{r+1}, \ldots, p_n$$

con almeno tre lati distinti. Ciò prova il lemma.■

Possiamo ora procedere per induzione.

Supponiamo che la (*) valga per tutte le reti con $S = n$ lati e consideriamo una rete Q con $n+1$ lati. Distinguiamo due casi:

(i) Q ha un vertice libero;

(ii) Q non ha vertici liberi.

Nel caso (i) sia p un vertice libero, congiunto con un arco ad un altro vertice p'. Se p' è ancora un vertice libero, allora rimuovendo l'arco (aperto) pp' avremo una rete Q' con

$$V' = V \qquad F' = F \qquad S' = S-1 \qquad c' = c+1$$

e quindi vale la (*) poiché $S' = n$. Analogamente si conclude se p' non è libero.

Nel caso (ii) per il lemma esiste una poligonale chiusa costituita da archi. Rimuovendone un arco si ha una rete Q' con

$$V' = V \qquad S' = S-1 \qquad F' = F-1 \qquad c' = c,$$

da cui ancora la (*) per l'ipotesi induttiva.■

Osserviamo infine che se la rete Q su S^2 proviene dalla proiezione del bordo di un poliedro convesso si ha $c = 1$ e quindi la classica formula di Eulero.

BIBLIOGRAFIA

Si riportano solo testi e articoli che possono essere piú o meno direttamente utilizzati per l'insegnamento. Se ne dà anche un breve commento.

[1] M.L. CALDELLI, B. D'AMORE, *I poliedri. La formula di Eulero.* Scuola e Didattica, La Scuola, Brescia, 1985

[2] H.M. CUNDY, A.P. ROLLETT, *Modelli matematici,* (presentazione di P. Canetta), Feltrinelli, Milano 1974.

[3] G. DE CECCO, *Il teorema di Jordan,* Archimede (4),1976.

[4] P. GARIO, *L'immagine geometrica del mondo. Storia dei poliedri.*, Stampatori-didattica, Torino 1979.

[5] D. HILBERT, S. COHN-VOSSEN, *Geometria intuitiva,* Boringhieri 1960.

[6] I. LAKATOS, *Dimostrazioni e confutazioni,* Feltrinelli, 1979.

[7] G. POLYA, *La scoperta matematica,* Vol. 2, Feltrinelli, 1970.

[8] SMP SCHOOL MATHEMATICS PROJECT, *Un progetto per l'insegnamento della matematica nella Scuola Media,* Cambridge Univ. Press, 1965 (5 volumi); Traduzione a cura dell'UMI., Zanichelli, 1972.

* * * * * * *

[1] Possibile presentazione dell'argomento nella Scuola Media, con lo scopo anche di guidare gli alunni alla "scoperta" della formula di Eulero.

[2] Questo libro, nato in una classe inglese (corrispondente ai nostri ultimi anni di liceo), ha avuto origine dall'interesse spontaneo degli studenti per la costruzione di modelli con carta, cartone, fili di ferro ed altro materiale facilmente reperibile.

[3] Esposizione del teorema di Jordan per le poligonali e le poliedriche, fondamento per le definizioni di poligono e di poliedro usate in questa conferenza.

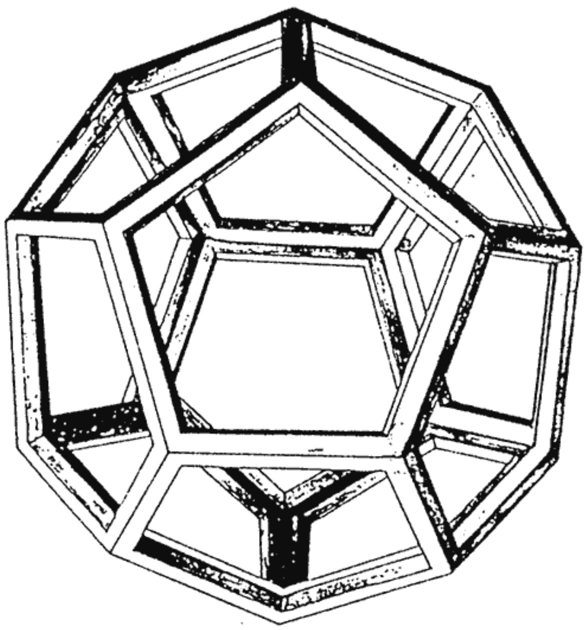
[4] Il capitolo III, di circa 100 pagine, è interamente dedicato alla formula di Eulero. Il libro affronta la storia dei poliedri anche in rapporto ad altre discipline.

[5] Libro classico e molto interessante contenente quasi tutti gli argomenti esposti in questa conferenza.

[6] Presentazione abbastanza esauriente del teorema e delle diverse definizioni di poliedro, con particolare attenzione alla "logica della scoperta matematica". La forma letteraria è simile a quella dei dialoghi di Platone.

[7] La formula di Eulero è presentata come un "problema" con osservazioni, congetture, argomentazioni induttive, che aiutino il "ragionamento plausibile" Il metodo scientifico proposto è :"Indovina e controlla".

[8] La relazione di Eulero è trattata in piú di un capitolo (nei volumi I, II e III). Si veda in particolare il cap. 8 del vol. I e il cap. 6 del vol. III. L'esposizione è ricca di esempi e di esercizi e non è trascurato il ricorso alla colla e alle forbici per costruire modelli di solidi (come parte integrante dell'insegnamento e non come evasione!).



da DE DIVINA PROPORTIONE di Luca Pacioli (Venezia, 1509)

(disegno di Leonardo da Vinci riproducente lo scheletro del dodecaedro regolare da lui intagliato in legno).

* * *

Archytas Tarantinus dicere solebat:

"Si quis in coelum ascendisset naturamque mundi et pulchritudinem siderum perspexisset, insuavis illa admiratio ei esset, quae iucundissima fuisset, si aliquem, cui narraret, habuisset

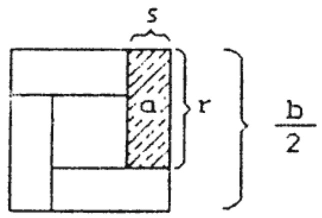
(Cicerone, *Laelius*, 23,88)

Aspetti didattici della teoria delle equazioni algebriche

Hartmut Laue

Dedicato a Hilger Wolff in occasione del suo 60° compleanno

1. Equazioni quadratiche (motivazione geometrica). Se r, s sono i lati di un rettangolo, allora la sua area è $a = rs$, e il suo perimetro è $b = 2(r+s)$. Consideriamo per il momento la domanda inversa: siano noti l'area a e il perimetro b di un rettangolo; come si determinano i lati ? Ciò può essere ritenuta la versione geometrica della seguente domanda aritmetica che fu risolta già dai babilonesi circa il 1700 a.C.: come determinare due numeri quando siano noti la loro somma e il loro prodotto ? Diamo la motivazione della nostra soluzione in base alla seguente figura:



Il quadrato dato si compone di quattro rettangoli di area a e un quadrato (nel mezzo) con il lato $\frac{b}{2} - 2s$. Quindi vale l'equazione $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = 4a + \left(\frac{b}{2} - 2s\right)^2$ la quale è equivalente a

$$\left(\frac{b}{2} - 2s\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - 4a \qquad (1)$$

Se b e a sono numeri qualsiasi, allora può ben succedere che la differenza a destra in (1) sia negativa; però, il termine a sinistra, essendo un quadrato, sarà sempre non negativo e quindi, come conseguenza, dobbiamo notare che non per ogni scelta di a, b (numeri non negativi) esiste un rettangolo con l'area a e il perimetro b. La condizione precisa per l'esistenza di una soluzione è, per (1), che valga la disuguaglianza

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 - 4a \geq 0.$$

(Evidentemente il termine a sinistra è l'area del quadratino nel mezzo del quadrato grande di cui sopra.) Assumiamo quest'ultima, allora esiste un rettangolo come richiesto e possiamo infatti determinare i suoi lati trasformando la (1):

$$\begin{aligned}(1) \Leftrightarrow \frac{b}{2} - 2s = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - 4a} \text{ oppure } \frac{b}{2} - 2s = -\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - 4a} \\ \Leftrightarrow s \in \left\{ \frac{b}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - 4a}\,,\ \frac{b}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - 4a} \right\}.\end{aligned}$$

Dunque, i lati del rettangolo cercato si determinano aggiungendo o togliendo (risp.) a $\frac{b}{4}$ la metà del lato del quadratino nel mezzo della figura. In questo senso, il problema del trovare i lati di un rettangolo viene ridotto a quello del determinare il lato di un quadrato.

Se rinunciamo all'interpretazione dei valori come incognite geometriche e ci concentriamo sulle soluzioni numeriche di (1), allora otteniamo le soluzioni anche nel caso che

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 - 4a < 0:$$

Ricordiamo che, nel campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi, l'equazione $x^2+1=0$ ha due soluzioni di cui una viene denotata con i. Se ammettiamo di ampliare il campo dei numeri reali, accettendo soluzioni in tutto $\mathbb{C}$, allora possiamo andare avanti anche in questo caso:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{b}{2} - 2s = i\sqrt{4a - \left[\frac{b}{2}\right]^2} \text{ oppure } \frac{b}{2} - 2s = -i\sqrt{4a - \left[\frac{b}{2}\right]^2}$$
$$\Leftrightarrow s \in \left\{\frac{b}{4} + \frac{i}{2}\sqrt{4a - \left[\frac{b}{2}\right]^2}, \frac{b}{4} - \frac{i}{2}\sqrt{4a - \left[\frac{b}{2}\right]^2}\right\},$$

cioè, in $\mathbb{C}$, il problema aritmetico di cui sopra ha sempre una soluzione e rimane solo la questione se essa sia interpretabile come lato di un rettangolo, cioè: se essa sia reale e positiva. Quest'ultima . domanda ha più il carattere di una richiesta supplementare da soddisfarsi dopo la soluzione aritmetica completa che rappresenta il nocciolo del pensiero, e quindi è ragionevole separare mentalmente le due cose.

I numeri di partenza a $(=rs)$ e b $(=2(r+s))$ appaiono in modo naturale quando si forma il prodotto dei polinomi lineari $x-r$ e $x-s$; evidentemente, il polinomio prodotto

$$f(x) = (x-r)(x-s) = x^2-(r+s)x+rs = x^2-\frac{b}{2}x+a$$

ha precisamente i numeri cercati r, s come zeri[1]. Pertanto possiamo riformulare il nostro problema di partenza così:

Siano dati numeri a, b. Il polinomio $x^2-\frac{b}{2}x+a$ ha zeri ? Se essi esistono, come possiamo descriverli ?

A questo punto possiamo fare un'osservazione importante, un raffinamento, in relazione al nostro modo di domandare: data un'equazione è importante sapere dove cerchiamo le sue soluzioni, se nell'ambito dei numeri razionali, reali, complessi ? Vedremo nel seguito che c'è un gran numero di ambiti numerici rispetto a cui la domanda dell'esistenza di una soluzione può essere

[1]Ricordiamo che un numero a si dice zero del polinomio f se $f(a)=0$

interessante. E ancora un'altro commento: come mai possiamo essere sicuri di trovare almeno un campo di numeri che contiene uno zero del polinomio ? Questa domanda ("assoluta") dell'esistenza di uno zero dovrebbe precedere quella "relativa" dell'esistenza di uno zero in un certo ambito, e questa ultima dovrebbe precedere quella di una certa forma o rappresentazione degli zeri che si manifesta nella caccia di una cosiddetta "formula delle soluzioni". Infatti, fu proprio questa ricerca calcolistica cieca a sbarrare per secoli la strada del successo nell'inseguimento del problema generale della risoluzione delle equazioni. Naturalmente, il caso dell'equazione quadratica era seducente ... ma traeva in inganno! Perciò, anche se le equazioni di grado superiore al secondo non vengono trattate in modo completo nell'insegnamento, oggi è importante evitare nell'impostazione del problema delle equazioni di secondo grado l'ottica ingenua che ha portato fuori strada tutti gli studiosi prima di Galois a partire dai babilonesi.

Possiamo esprimere il nostro risultato fin qui ottenuto nel modo seguente (ponendo $a_1 := -\frac{b}{2}$, $a_2 := a$):

Teorema 1. Siano a_1, a_2 numeri arbitrari. Se $\rho \in \mathbb{C}$ é tale che vale $\rho^2 = a_1^2 - 4a_2$, allora $-\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{2}\rho$, $-\frac{1}{2}a_1-\frac{1}{2}\rho$ sono le soluzioni della equazione $x^2+a_1x+a_2 = 0$.
(In particolare, ogni equazione quadratica è risolubile in $\mathbb{C}$.)

In altre parole, per risolvere l'equazione generale di secondo grado $x^2+a_1x+a_2 = 0$ basta risolvere l'equazione quadratica pura (cioè, senza addendo lineare) $x^2-(a_1^2-4a_2) = 0$. Le soluzioni ρ di quest'ultima portano nel modo descritto alle soluzioni dell'equazione generale. Così dobbiamo leggere la "formula delle soluzioni dell'equazione quadratica": essa esprime un teorema di riduzione: il problema dell'equazione generale di secondo grado viene ridotto al caso speciale di una equazione pura di secondo grado. E questa riduzione è la traduzione al livello astratto di quella geometrica fatta precedentemente "con gli occhi".

2. Le domande chiave della teoria delle equazioni. Il nostro problema di partenza ha un analogo spaziale: siano noti il volume a, la superficie b e la somma c degli spigoli di un parallelepipedo. È possibile determinare gli spigoli ?

Come nel caso quadratico, i numeri dati sono, a meno di fattori razionali, i coefficienti di un polinomio cubico i cui zeri sono i tre spigoli r, s, t, perchè vale

$$\begin{aligned}(x-r)(x-s)(x-t) &= x^3 - (r+s+t)x^2 + (rs+rt+st)x - rst \\ &= x^3 - \frac{c}{4}x^2 + \frac{b}{2}x - a.\end{aligned}$$

Se, come sopra, non prendiamo in considerazione per il momento la questione di una possibile interpretazione geometrica dei risultati, il problema si legge così (ponendo $a_1 := -\frac{c}{4}$, $a_2 := \frac{b}{2}$, $a_3 := -a$): il polinomio $x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$ ha zeri ? Se essi esistono, come possiamo descriverli ?

Descriviamo nel seguito la soluzione classica del problema, trovata più di 400 anni fa. Poniamo $y := x+\frac{1}{3}a_1$. Allora $x = y - \frac{1}{3}a_1$ e $x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = y^3 + b_2y + b_3$, ove $b_2 = a_2 - \frac{1}{3}a_1^2$ e $b_3 = a_3 + \frac{2}{27}a_1^3 - \frac{1}{3}a_1a_2$. Pertanto basta rispondere alla domanda per il polinomio $y^3 + b_2y + b_3$; gli zeri del polinomio originale saranno soltanto additivamente spostati di $\frac{1}{3}a_1$. Poi, il problema principale è trovare uno zero qualunque; trovato un tale σ, possiamo dividere il polinomio dato per $y-\sigma$, e gli ulteriori zeri saranno gli zeri del polinomio quadratico che risulta, cioè, saranno determinabili col metodo trattato precedentemente. Benché i babilonesi sapessero risolvere le equazioni di secondo grado nel 1700 a. C., non prima del sedicesimo secolo gli algebristi riuscirono a risolvere le equazioni cubiche in generale. La soluzione, trovata da Tartaglia, inoltrata a Cardano e pubblicata da esso sul libro "Ars Magna" nel 1545, è esprimibile in questa forma:

Teorema 2 (Scipione del Ferro ?, Tartaglia; Cardano 1545). Siano b_2, b_3 arbitrari numeri, $b_2 \neq 0$. Sia δ una soluzione della equazione quadratica pura

$$x^2-(\frac{1}{27}b_2^3+\frac{1}{4}b_3^2) = 0.$$

Sia ζ una soluzione dell'equazione cubica pura

$$x^3+(\frac{1}{2}b_3-\delta) = 0.$$

Allora vale $\zeta \neq 0$, e $\zeta-\frac{1}{3\zeta}b_2$ è una soluzione dell'equazione

$$y^3+b_2y+b_3 = 0.$$

(In particolare, ogni equazione cubica è risolubile in $\mathbb{C}$.)[2]

Anche questo risultato è una riduzione alla soluzione di equazioni pure: si ottiene una soluzione della equazione cubica generale risolvendo prima un'equazione quadratica pura e <u>successivamente</u> un'equazione cubica pura (cioè, un'equazione cubica in cui sono nulli i coefficienti della prima e della seconda potenza dell'indeterminata). Infatti, la soluzione δ della equazione quadratica appare nel coefficiente dell'equazione cubica pura da risolvere dopo.

A questo punto le nostre considerazioni danno luogo alle seguenti <u>domande chiave della teoria delle equazioni</u>:

[2]Evitiamo di utilizzare il simbolo della radice ($\sqrt{\ }$) per i numeri complessi perché non c'è nessuna possibilità ragionevole di associare un <u>unico</u> numero complesso ad esso. Quasi tutti i testi che trattano le equazioni cubiche utilizzando quel simbolo si astengono del discorso spinoso ma sostanziale della <u>scelta giusta</u> della radice, lasciando spazio a interpretazioni dei termini indicati che non portano a una soluzione dell'equazione da risolvere.

Sia $n \in \mathbb{N}$ e siano $a_1,\dots,a_n$ numeri qualsiasi.

1. L'equazione

(*) $$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

è risolubile in $\mathbb{C}$?

2. Se la risposta di 1. è positiva, è possibile ridurre la soluzione di (*) alla determinazione delle soluzioni di opportune equazioni pure di grado k con $2 \leq k \leq n$?

Sottolineamo che queste domande sono molto più prudenti di quella che richiede una "formula" delle soluzioni, domanda che sottintenderebbe senz'altro l'esistenza di una tale espressione esplicita. Proprio questa sarà un grosso problema! E anche se avessimo già superato quest'ostacolo, sarebbe ancora lontana una formula come quella che abbiamo già a disposizione (Teoremi 1 e 2) nei casi delle equazioni quadratiche e cubiche per le quali, infatti, la soluzione generale si compone di "radici" (cioè, di zeri di polinomi "puri" del tipo x^k+c).

Poco dopo la scoperta della soluzione delle equazioni cubiche un allievo di Cardano, Ferrari, riuscì a risolvere le equazioni di quarto grado, riducendole alle equazioni di terzo grado. Per $n \geq 5$ invece le domande 1., 2. rimasero aperte ancora più di 250 anni.

Durante una lunga epoca il problema delle equazioni fu considerato sotto un'ottica che generalizza la nostra introduttiva formulazione geometrica della domanda: cioè, assumendo uno spezzamento completo di un polinomio in fattori lineari, i suoi coefficienti sono costituiti in modo molto regolare dai suoi zeri, il che viene espresso nel seguente teorema già noto a Viète (1540-1603) e pubblicato dopo la sua morte:

Teorema 3 (il cosiddetto teorema di Viète, 1615). Sia $n \in \mathbb{N}$ e siano $a_1,\dots,a_n$ numeri qualsiasi. Se $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ sono numeri tali che vale

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n,$$

allora si ha

$$\begin{aligned}
\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n &= -a_1 \\
\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \cdots + \alpha_{n-1}\alpha_n &= a_2 \\
\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \cdots + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n &= -a_3 \\
&\vdots \\
&\vdots \\
\alpha_1\cdots\alpha_n &= (-1)^n a_n.
\end{aligned}$$

Dunque i coefficienti di un polinomio comportano un'interessante informazione sugli zeri in questione: a meno del segno, il coefficiente a_j è la somma dei prodotti di lunghezza j formati dagli zeri cercati $\alpha_1,\dots,\alpha_n$. Questa interpretazione dei coefficienti del polinomio comporta anche una spiegazione perchè, sopratutto nella bibliografia vecchia, gli indici dei coefficienti crescono quando gli esponenti di x decrescono: così vengono associati i prodotti di j zeri alla potenza x^j. Indubbiamente oggi è passata in seconda linea questa interpretazione dei coefficienti di un polinomio nello spirito del teorema di Viète che una volta fu considerato come fondamentale. I testi moderni comunque preferiscono, per molti motivi pratici, la scrittura $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.

Dopo secoli di sforzo, finalmente furono trovate le risposte definitive delle domande **1.** e **2.** anche per $n \geq 5$. Bisognò aspettare nientemeno che C. F. Gauss il quale dimostrò per primo nel 1799 che la domanda **1.** ha una risposta positiva; all'epoca il problema risolto fu considerato tanto centrale e il risultato tanto significativo che quest'ultimo viene chiamato, per motivi storici anche nei nostri giorni, "il teorema fondamentale dell'Algebra". Infatti si tratta di uno dei risultati più belli e soddisfacenti della matematica:

Teorema 4 (il cosiddetto teorema fondamentale dell'Algebra, Gauss 1799). Siano $n \in \mathbb{N}$ e siano $a_1,\ldots,a_n \in \mathbb{C}$. Allora l'equazione $x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n = 0$ è risolubile in $\mathbb{C}$.

Contrariamente alle speranze plurisecolari, la risposta alla domanda **2.** è negativa per $n \geq 5$. Completando gli studi di P. Ruffini, il norvegese Niels Henrik Abel (1802-1829) dimostrò che non è possibile determinare le soluzioni di un'equazione generale data risolvendo consecutivamente equazioni pure (cioè, estraendo radici). Cioè, dal famoso teorema di Abel e Ruffini (1824) consegue che, nel caso generale, non esiste nessuna strada per esprimere gli zeri come composizione idonea di radicali: <u>una formula come nei casi</u> $n = 2, 3, 4$ <u>non esiste per alcun</u> $n \geq 5$. Un esempio di un polinomio i cui zeri non sono riducibili a radicali è x^5-4x+2; torneremo in seguito su ciò.

Tutto sommato, lo sviluppo della teoria delle equazioni fino al teorema di Abel-Ruffini viene schematizzato con la seguente tabella:

n	**1.**	**2.**			
2	sì	sì	1700 a.C.	babilonesi	Teorema 1
3	sì	sì	<1526	Scipione del Ferro (Bologna), non pubbl.	
			1545	Tartaglia (Venezia)	Teorema 2
				Cardano (Milano)	"Ars Magna"
4	sì	sì	1545	Ferrari	
≥ 5	sì		1799	Gauss	Teorema 4 (il teorema fondam. dell'Algebra)
		no	1824	Abel-Ruffini	

Il teorema di Abel-Ruffini pose fine alla ricerca di una formula delle soluzioni analoga alle formule per i gradi 2, 3, 4. Però, ci sono naturalmente moltissime equazioni di grado superiore i cui zeri sono determinabili estraendo idonee radici una dopo l'altra. Tali equazioni si dicono "risolubili per radicali". Questa nozione sarà precisata ben presto, essendo il fulcro di quanto segue. Siamo arrivati al punto in cui l'oggetto principale della teoria di Galois prende profilo. Superando notevolmente la domanda **2.**, la teoria di Galois prende la risposta negativa "globale" del teorema di Abel-Ruffini come motivazione della domanda "locale":

3. Quando un'equazione è risolubile per radicali ?

Se, secondo il teorema di Abel-Ruffini, non c'è nessuna formula generale delle soluzioni per $n \geq 5$, sarà almeno possibile caratterizzare i polinomi che sono risolubili per radicali ?

3. Precisazione della domanda fondamentale della teoria di Galois.

La domanda è quando gli zeri di un polinomio sono rappresentabili formando somme, differenze, prodotti, quozienti e radicali (anche ripetutamente), partendo dai suoi coefficienti. Le prime quattro operazioni sono quelle in un campo, mentre i radicali sono le soluzioni delle equazioni pure, cioè delle equazioni del tipo

$$x^k + a = 0.$$

Se K è un campo, $\mathbb{Q} \leq K \leq \mathbb{C}$, $a \in K$ e ρ è una soluzione di questa equazione, allora gli elementi

$$b_0 + b_1\rho + \cdots + b_{k-1}\rho^{k-1} \qquad (b_0,\ldots,b_{k-1} \in K)$$

formano un sottocampo K' di $\mathbb{C}$ che contiene K. Un tale campo si dice una estensione di K mediante un radicale, perché esso è il minimo sottocampo di $\mathbb{C}$ che contiene K e quel radicale (ρ). I numeri che si ottengono estrando successivamente radici (e collegandole con i numeri già ottenuti precedentemente mediante le leggi di operazione di campo) sono evidentemente tutti e soli quelli che nascono come elementi di estensioni mediante radicali ripetute.

Definizione. Un sovracampo L di $\mathbb{Q}$ si dice una estensione mediante radicali successivi di $\mathbb{Q}$ se esiste una catena finita

$$\mathbb{Q} = K^{(0)} \subseteq K^{(1)} \subseteq \cdots \subseteq K^{(m)} = L$$

di campi $K^{(j)}$ tali che $K^{(j)}$ è un'estensione mediante un radicale di $K^{(j-1)}$, per $1 \leq j \leq m$.

Nel seguito ci limitiamo al caso classico di un polinomio su $\mathbb{Q}$ e quindi precisiamo la domanda **3.** in questo modo:

4. Sia $f(x)$ un polinomio a coefficienti razionali. Quando esiste un'estensione mediante radicali successivi L di $\mathbb{Q}$ tale che, per elementi idonei $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in L$ (che non sono necessariamente distinti), vale $f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$?

Per il Teorema 4 esistono sicuramente elementi $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in \mathbb{C}$ tali che $f(x) = (x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n)$. La domanda, però, se questi zeri $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ siano esprimibili utilizzando solo le operazioni nel campo e radici consecutivamente estratte è, in forma precisa, esattamente la domanda se gli zeri appartengano a una estensione mediante radicali successivi di $\mathbb{Q}$. Né la domanda dell'esistenza degli zeri né quella del loro calcolo numerico è il punto saliente della teoria di Galois, ma lo è la questione della loro eventuale esprimibilità nel modo descritto all'inizio di questo capitolo.

A questo punto sarà opportuno chiarire preventivamente un possibile equivoco: senz'altro esiste un sottocampo minimo di $\mathbb{C}$ che contiene tutti gli zeri $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, esso è l'intersezione di tutti i sottocampi che li contengono; denotiamolo nel seguito con $\mathbb{Q}(f)$ e chiamiamolo il campo di spezzamento di f in $\mathbb{C}$. Se l'equazione data è risolubile per radicali, allora $\mathbb{Q}(f)$ deve essere contenuto in un'estensione mediante radicali successivi L di $\mathbb{Q}$. È importante notare, però, che questo può essere il caso senza che $\mathbb{Q}(f)$ stessa sia un'estensione mediante radicali successivi. Quindi <u>non è sufficiente controllare se quel campo minimo $\mathbb{Q}(f)$ stesso sia una estensione mediante radicali successivi di $\mathbb{Q}$</u>. In sostanza, questo era già noto a Cardano. Alcuni polinomi cubici irriducibili hanno tre zeri reali; quindi, il loro campo di spezzamento è contenuto nel campo $\mathbb{R}$. Tuttavia si dimostra che una rappresentazione degli zeri con l'aiuto di radicali è soltanto possibile utilizzando numeri immaginari: nonostante il fatto che esista un'estensione mediante radicali successivi L di $\mathbb{Q}$ contenente tutti gli zeri, il campo di spezzamento non ha questa proprietà, esso è troppo piccolo. Questi casi, in cui gli zeri, pur essendo reali, sono rappresentabili mediante radicali soltanto con l'aiuto di numeri immaginari, erano accettati solo con sospetto all'epoca di Cardano, perché ci si fidava di zeri reali ma non di numeri immaginari. Il caso descritto di un'equazione cubica con tre zeri reali si dice il "casus irreducibilis"; un tale esempio è l'equazione $x^3-3x-1=0$. Risolviamola applicando il teorema 2: poniamo $\delta := \frac{i}{2}\sqrt{3}$ e scegliamo un numero complesso ζ tale che $\zeta^3 = \delta+\frac{1}{2}$. Allora, per il teorema 2, il numero $\zeta-\frac{1}{3\zeta}\cdot(-3)$ è una soluzione dell'equazione, ed è uguale a $\zeta+\frac{1}{\zeta}$. È facile calcolare che vale $\zeta^{18} = 1$, e quindi ζ è una radice diciottesima dell'unità. In particolare vale $\frac{1}{\zeta} = \bar{\zeta}$ (il coniugato di ζ) e quindi la soluzione trovata, essendo uguale a $\zeta+\bar{\zeta}$, è un numero reale, scritto come somma di due radicali non reali. Questo fenomeno è tipico per il casus irreducibilis: la soluzione dell'equazione cubica in questione è la somma di due radicali complessi le cui parti immaginarie sono opposte e quindi si semplificano. Pur essendo interessati solo alle parti reali abbiamo nondimeno bisogno di numeri non reali per rappresentare le soluzioni tramite radicali; a tale scopo, né gli elementi del campo di spezzamento e nemmeno quelli di $\mathbb{R}$ bastano.

Pertanto rendendoci conto del fatto che non basta chiedere se il campo di spezzamento di un polinomio sia un'estensione mediante radicali successivi, possiamo comunque riformulare **4.** così:

5. Sia f un polinomio a coefficienti razionali. Quando esiste una estensione mediante radicali successivi L di $\mathbb{Q}$ che contenga il campo di spezzamento $\mathbb{Q}(f)$?

4. **La risposta di Galois.** Sebbene abbiamo visto che bisogna essere prudenti nella formulazione di **5.** e parlare di un campo L che possibilmente è più grande di $\mathbb{Q}(f)$, Evariste Galois (1811-1832) mostrò che, per dare una risposta a **5.**, basta studiare $\mathbb{Q}(f)$ stesso. La sua grande scoperta è un criterio necessario e sufficiente come richiesto in 5. che discende dallo studio degli automorfismi del campo $\mathbb{Q}(f)$. Gli automorfismi del campo $\mathbb{Q}(f)$ (cioè, gli isomorfismi di $\mathbb{Q}(f)$ su se stesso) formano un gruppo, detto il gruppo di Galois del polinomio f (su $\mathbb{Q}$). Nel 1829, Abel pubblicò un risultato sulla risolubilità di una equazione nel quale l'ipotesi sostanziale è la permutabilità di certe trasformazioni del campo di spezzamento. Il suo risultato è contenuto nel seguente

Caso speciale del teorema di Galois. Se il gruppo di Galois di f è commutativo, allora l'equazione $f(x)=0$ è risolubile per radicali.

In riconoscimento della scoperta di Abel che la permutabilità di certi operatori su $\mathbb{Q}(f)$ è una condizione di rilievo nell'ambito del problema, fino a oggi è una usanza comune utilizzare il termine "gruppo abeliano" come sinonimo di "gruppo commutativo". Indipendentemente dagli studi di Abel, Galois dette la risposta completa alla domanda **5.**:

Teorema 5 (Galois 1829/1831). L'equazione $f(x) = 0$ è risolubile per radicali se e solo se nel gruppo di Galois G di f esiste una catena

$$1 = N_0 \leq N_1 \leq N_2 \leq \cdots \leq N_l = G$$

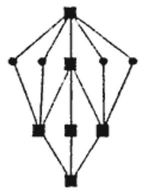
di sottogruppi normali N_j di G tali che i gruppi quoziente N_1/N_0, N_2/N_1, ..., N_l/N_{l-1} sono tutti abeliani.

A causa di questo teorema principale, nella teoria dei gruppi moderna si dice risolubile un gruppo che soddisfa alla proprietà appena descritta in esso. Se il gruppo G è abeliano, allora già la catena corta $1=N_0 \leq N_1=G$ (cioè, $l=1$) ha la proprietà richiesta, e quindi G è risolubile. La risolubilità è una nozione molto più generale della commutatività; gruppi risolubili sono "composti" da gruppi abeliani come descritto nella condizione data nella formulazione del teorema 5. Così si vede che l'idea di Abel introduce in un certo senso alla situazione di base in cui si ha risolubilità per radicali quella in cui G è commutativo. I gruppi risolubili invece nascono "sovrapponendo" i gruppi abeliani (nella forma di una catena), e quindi la nozione di risolubilità si sviluppa dalla nozione di commutatività. Passando dalla commutatività alla risolubilità la condizione sufficiente del suddetto caso speciale si trasforma in una condizione sufficiente e necessaria, quindi in una vera caratterizzazione. Il fatto che la risolubilità del gruppo di Galois è necessaria per poter risolvere l'equazione per radicali rende possibile dimostrare che gli zeri di certi polinomi (di grado ≥ 5 naturalmente) non sono rappresentabili per mezzo di radicali. Infatti, il gruppo di Galois del polinomio $f(x) = x^5-4x+2$ già menzionato sopra è isomorfo al gruppo delle permutazioni di 5 cifre (il "gruppo simmetrico" S_5) per il quale non è molto difficile vedere che non è risolubile. Pertanto siamo sicuri che, grazie al teorema di Galois, l'equazione $x^5-4x+2 = 0$ non è risolubile per radicali.

Il centro della teoria di Galois che rende possibile la suddetta soluzione completa del problema delle equazioni è il cosiddetto teorema principale della teoria di Galois. Una versione debole di esso che, però, permette di farsi un'idea del carattere del risultato dice: Siano f un polinomio a coefficienti razionali, $\mathbb{Q}(f)$ il suo campo di spezzamento in $\mathbb{C}$, G il gruppo di Galois relativo. Allora il reticolo dei sottocampi di $\mathbb{Q}(f)$ è antisomorfo al reticolo dei sottogruppi di G. I sottocampi di $\mathbb{Q}(f)$ che per conto loro sono campi di spezzamento (di altri polinomi) corrispondono ai sottogruppi normali mediante quell'antisomorfismo.

Vogliamo illustrare con un esempio (ma senza dimostrazioni) il contenuto di questo grande teorema. Sia $f(x) := x^4-3$. Il seguente grafico descrive il reticolo dei sottocampi di $\mathbb{Q}(f)$:

$\mathbb{Q}(f)$

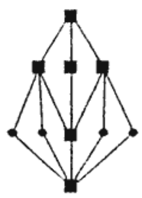


$\mathbb{Q}$

(I nodi rappresentano sottocampi di $\mathbb{Q}(f)$; i sottocampi che sono campi di spezzamento sono indicati con un quadratino nero (■), gli altri invece con un punto (•). I segmenti ascendenti indicano l'inclusione.)

Il teorema dice che si ottiene il diagramma per il reticolo dei sottogruppi del gruppo di Galois G di f capovolgendo il diagramma dei sottocampi di $\mathbb{Q}(f)$:

G



$\{id\}$

(I punti (•) rappresentano sottogruppi non normali, i quadratini (■) sottogruppi normali; segmenti ascendenti indicano l'inclusione.- In questo caso, il gruppo di Galois G è un cosiddetto "gruppo diedrale" di 8 elementi.)

La formulazione completa del teorema principale della teoria di Galois contiene una descrizione dettagliata della corrispondenza indicata fra i sottocampi di $\mathbb{Q}(f)$ e i sottogruppi di G. Per le dimostrazioni e per ulteriori precisazioni di questa illustre teoria dobbiamo rimandare alle impostazioni in adatti libri di testo (per esempio, [B] o, per dare un libro nella lingua italiana, [GI]). Un'analisi dei contenuti matematici relativi sotto l'aspetto storico (ma non aneddotico) si trova su [E]. Poi, in modo conciso, [W] mette mano a un inquadramento della teoria delle equazioni nello sviluppo grande dell'Algebra.

5. **Conseguenze sotto il punto di vista didattico.** Saltano all'occhio almeno tre punti di contatto della teoria delle equazioni con i contenuti dell'insegnamento a scuola, ciò sono i capitoli che trattano

(i) l'equazione quadratica

(ii) l'introduzione dei numeri irrazionali (il passo al di là di $\mathbb{Q}$)

(iii) il numero π (e il numero e), un numero trascendente

È vero che la formula delle soluzioni di un'equazione quadratica rappresenta uno strumento al cento per cento fidato per trovare gli zeri di un qualunque polinomio di grado 2 a coefficienti numerici. Però, se il nostro scopo fosse quello di determinare numericamente i numeri decimali che risolvono un'equazione data, allora avremmo a disposizione altri metodi più efficaci in quanto che essi funzionerebbero anche per i polinomi di grado superiore: i metodi di approssimazione. Quindi, un tale scopo non può giustificare a fondo il trattamento della formula delle soluzioni di un'equazione quadratica; tuttavia osserviamo naturalmente che essa consente di trovare tali risultati approssimati: chi non vuole (o non sa?) estrarre la radice che compare in essa e fare i calcoli restanti a mano può senz'altro scegliere la strada banale, fidandosi della sua calcolatrice, e arriverà al numero decimale desiderato; anche se così il suo risultato non sarà (quasi) mai esatto, la precisione sarà sufficiente per la maggior parte delle applicazioni pratiche. Non è "vietato" sfruttare la formula in questa maniera, ma è evidente che il suo valore didattico non si esaurisce con questo.

Nonostante il fatto che quei numeri decimali non sono esatti molti accettano stranamente soltanto essi come risultato e considerano il termine dato dalla formula stessa (che è veramente esatto !) come un numero ancora "da calcolare". Avendo il termine che discende dalla formula, è sempre possibile derivare un'approssimazione decimale, ma viceversa nessun'approssimazione permette di risalire alla rappresentazione esatta (che coinvolge la radice "non ancora calcolata" nel senso suddetto). Ma, alla luce della teoria precedentemente schizzata, non si tratta soltanto di una perdita di precisione. Passando, per esempio, da $\frac{1}{2}(-5+\sqrt{53})$ a 1,14, abbiamo perso molto di più: non ci si accorge più del fatto che il nostro numero è una composizione di numeri razionali con la radice di 53, anzi, tutte le tracce della sua vera natura sono sparite. Ingannati dall'unico scopo di situare il numero sulla retta dei numeri reali, abbiamo sacrificato il carattere individuale del nostro numero a un idolo grigio - alla forma decimale, nella quale, comunque se il numero delle cifre viene limitato, i numeri reali, privati delle loro caratteristiche, vengono costretti ad un'inespressiva anonimità. Il nostro numero invece vive della sua interpretazione come soluzione dell'equazione $x^2+5x-7 = 0$; la radice nel suo interno appare geometricamente come lato del quadrato di cui abbiamo parlato durante la sezione introduttiva di questo articolo. Il numero non è razionale ma coinvolge soltanto una radice quadrata, quindi la sua "altezza" sopra $\mathbb{Q}$ è bassa; infatti, si parla di un elemento "di grado 2 su $\mathbb{Q}$". In questo senso, il numero è "più vicino a $\mathbb{Q}$" che, per esempio, una radice cubica o una radice di un grado ancora più alto. Così si apre un ampio campo di studio: quello dei numeri irrazionali. Tutto il sottile tessuto del mondo dei numeri che traspare a questo punto viene strappato di colpo se si mette troppo in evidenza la forma decimale. Lo sviluppo della formula delle soluzioni dell'equazione quadratica invece dà un'ottima occasione per portare la direzione dello sguardo, con molta cautela, verso quel mondo affascinante. Per gli studenti si tratta di un passo significativo fuori di $\mathbb{Q}$; è importante farlo con circospezione: la motivazione, per il momento, è quella del risolvere un'equazione ma, senza che lo studente lo presagisse, il risultato comporta un accesso a una sottoclasse dei complessi di caratteristica molto particolare. Il vero compito didattico quindi non è esercitare l'automatismo dall'equazione data fino alla soluzione in forma decimale, ma tirare alla luce il fatto che queste soluzioni sono, come numeri, di una natura molto speciale che merita essere investigata in dettaglio, distinguendoli in modo chiaro dall'insieme molto più vasto di tutti i numeri complessi (o reali); questo è possibile, per esempio mediante una interpretazione geometrica o, più in termini algebrici, mettendo in evidenza l'"altezza" della radice (=2) e vuole senz'altro il contrasto con i numeri che non sono di questa forma speciale.

Conviene precisare a questo punto cosa intendiamo parlando del "carattere" e della "natura" di un numero. Dopo $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ incominciano i problemi sottili relativi alla nozione di numero; confrontato con il passaggio da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$ e da $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Q}$, quello da $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$ (o a $\mathbb{C}$) è sproporzionatamente maggiore, sia nell'ottica storica che sistematica che didattica. La teoria delle equazioni comporta un certo orientamento nell'ambito vasto dei numeri irrazionali: essa si occupa dei numeri che sono zeri di polinomi non nulli; tali numeri si dicono "numeri algebrici" e formano un sottocampo $\mathbb{A}$ di $\mathbb{C}$. Denotando con $\mathbb{W}$ [3] l'insieme dei numeri che appartengono a una estensione mediante radicali successivi, possiamo esprimere la domanda, aperta fino ad Abel, così: vale $\mathbb{W} = \mathbb{A}$? Si ha $\mathbb{W} \subseteq \mathbb{A}$, ma

[3] dal tedesco "Wurzel" (radicale)

questa inclusione è propria: vale $\mathbb{W} \subset \mathbb{A}$; ci sono numeri algebrici che non appartengono a $\mathbb{W}$, vedi il "risultato negativo" di Abel. Il teorema 5 di Galois invece da, in termini gruppali, una caratterizzazione di $\mathbb{W}$ come sottoinsieme di $\mathbb{A}$. La conseguenza storica dei risultati di Galois fu la nascita di un'altra grande teoria algebrica: la teoria algebrica dei numeri; il cui oggetto classico, detto in modo molto accorciato, è lo studio del campo $\mathbb{A}$.

Ma il passo da $\mathbb{Q}$ via $\mathbb{W}$ ad $\mathbb{A}$, pur comprendendo una ricchezza incredibile di fenomeni che meritano uno studio profondo, è ancora piccolo per quanto riguarda la cardinalità degli insiemi considerati: gli insiemi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{W}$, $\mathbb{A}$ sono tutti numerabili. Cioè, sotto l'ottica delle cardinalità, la parte del leone dello insieme dei numeri complessi (e anche dei reali) è l'insieme dei numeri trascendenti (cioè, non algebrici) che non abbiamo nemmeno toccato malgrado l'ampiezza di tutti gli argomenti già sfiorati fin qui. Infatti è molto più facile dimostrare che l'insieme dei numeri trascendenti non è numerabile che dimostrare in un solo caso che un certo numero concreto non sia algebrico. Ci sono numeri trascendenti in eccesso - ma è difficilissimo individuarne uno. Sono passati solo poco più di cento anni dalle prime dimostrazioni della trascendenza dei numeri e (Hermite, 1873) e π (Lindemann, 1882).

Lo studio dei numeri irrazionali, evidentemente, non può essere il compito dell'insegnamento scolastico: comunque in senso positivo non sarà possibile introdurre gli insiemi $\mathbb{W}$, $\mathbb{A}$ e parlare in modo consolidato della trascendenza. Però, in senso negativo, consci dei risultati della teoria delle equazioni, si possono combattere possibili idee sbagliate sui numeri, prevedendo, per evitarli, gli eventuali corti circuiti mentali degli studenti, fra i quali i più diffusi sono i seguenti:

considerare uguali i concetti di "numero irrazionale" e "radice" (o, ancora peggio, "radice quadrata")

considerare uguali i concetti di "numero irrazionale" e "zero (non razionale) di un polinomio non nullo" (cioè, "numero algebrico non razionale")

accettare soltanto la forma decimale per rappresentare un numero reale (o, ancora peggio, la forma decimale con un numero finito di cifre, oppure, pessimo, la forma decimale con un numero fisso di cifre).

Per esempio, è importante parlare non solo delle radici quadrate ma (almeno) anche delle radici cubiche per far vedere che esse sono numeri "nuovi". Non è esclusa una dimostrazione che $\sqrt[3]{5}$ non coincide con nessuna radice quadrata di un numero razionale; il fatto che essa non è nemmeno rappresentabile come combinazione di radici quadrate a coefficienti razionali sarà troppo difficile ... ma non dovrebbe mancare come informazione! Questa "strategia" è sempre consigliabile quando l'argomento è veramente profondo, troppo profondo per un trattamento comprensibile da parte degli studenti: studiare in dettaglio un pezzettino intellettualmente raggiungibile del fenomeno generale in modo che si apra lo sguardo; dopo tale apertura dell'orizzonte il tempo può essere maturo (la decisione del momento giusto dipende naturalmente dalle reazioni degli studenti) per dare un risultato semplicemente come informazione. Questo procedere non deve essere confuso con un cattivo "insegnamento cattedratico": il centro, naturalmente, è sempre la sensibilizzazione degli studenti per l'argomento, e solo dopo ciò l'insegnante tiene conto della curiosità risvegliata, dando un risultato che, ragionando con onestà didattica, risulterebbe ancora fuori portata. Come sempre, la nascita della domanda è lo scopo principale, non il memorizzare delle risposte. Così è anche possibile discutere la rappresentazione cartesiana di un polinomio di quinto grado come x^5-4x+2 per evidenziare in modo grafico dove essa intersechi l'asse orizzontale, anche per tentare un'approssimazione dello zero relativo. Dopo sarà una grande sorpresa, una delusione matematicamente giustificata, venire a sapere che non c'è nessuna possibilità di calcolare essa tramite radici. Gli studenti capiranno benissimo questo modo di dire un po' impreciso, con il riferimento alla soluzione dell'equazione quadratica. Gli occhi "vedono" lo zero del polinomio, ma si tratta di un numero fuori del mondo delle radici: "le radici", quindi, sono numeri particolari da non confondere con la totalità dei numeri... Finalmente, tutto il trattamento dettagliato del numero π dovrebbe lasciare spazio anche per mettere in evidenza che si tratta di un numero che non risulta mai come soluzione di una equazione algebrica: dopo tanti "acquisti" di nuovi numeri reali mediante le soluzioni di equazioni stiamo studiando un numero di massima importanza per la geometria elementare e per la trigonometria la cui natura è completamente diversa: lontana dalle radici, lontana (più in generale) dagli zeri dei polinomi...

Quando la materia da insegnare è esigente come in questo caso, sarebbe sbagliata una decisione didattica che dia come risultato un'idea storpiata dei concetti. Il principio sano che l'insegnamento di matematica non sopporta il semplice dare ("dettare") risultati senza un ragionamento adeguato d'altronde non può giustificare che, dopo tanti anni a scuola, il concetto di numero venga confuso nel senso suddetto. La necessità di trattare $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) comporta, purtroppo, che dobbiamo trasgredire quel principio, come sempre quando contemporaneamente un punto è matematicamente troppo profondo per uno svolgimento soddisfacente e, sopprimendolo, metteremmo in pericolo il tutto. Abbiamo, però, anche tentato di indicare come una tale trasgressione può succedere con responsabilità.

Le conseguenze didattiche della teoria di Galois (per l'insegnamento alla scuola media) riguardano quindi uno dei due concetti originari della matematica: quello di <u>NUMERO</u> (l'altro è senza dubbio quello di SPAZIO). Dovrebbe essere uno dei più nobili compiti dell'insegnamento della matematica sviluppare una viva coscienza delle proprietà e caratteristiche dei numeri, visto che la loro natura e i loro misteri hanno spinto e diretto gli sforzi dei matematici di ogni epoca. Lo studio della teoria delle equazioni, con la teoria di Galois come culmine, fornisce un ottimo orientamento su quell'argomento fondamentale. Dovrà essere diversa da caso a caso la decisione fino a quale punto, con quale misura di profondità e sottigliezza, sia ragionevole prefiggersi degli scopi didattici nello spirito di questo articolo, in dipendenza dagli ulteriori fattori pedagogici generali del momento. Auguriamoci che tale decisione sia sempre sorretta dalla convinzione che le nozioni devono precedere e giustificare gli algoritmi, che il pensare deve dominare e determinare il fare, che la autonomia mentale come scopo pedagogico è di gran lunga superiore all'apprendimento delle capacità esecutive, anche se perfette.

Bibliografia

[B] J. R. Bastida, Field extensions and Galois theory, Addison-Wesley Publ. Comp., Reading (Mass.) 1984

[E] H. M. Edwards, Galois theory, Springer, New York - Berlin - Heidelberg 1984

[GI] M. Girardi, G. Israel, Teoria dei campi, Feltrinelli edit., Milano 1976

[W] B. L. van der Waerden, A history of algebra, Springer, Berlin - Heidelberg 1985.