PROBABILITÀ SOGGETTIVA
E
STATISTICA INFERENZIALE BAYESIANA
NELLE SCUOLE SUPERIORI

Carla Calvi Parisetti

Introduzione

"Elementi di Probabilità e di Statistica" (che indicheremo brevemente con EPS) sono argomenti dei nuovi programmi di Matematica per le Scuole Superiori. Si tratta di "elementi" che molti docenti ritengono costituire un capitolo a sè stante rispetto alla Matematica tradizionale, per lo più conosciuto da pochi volenterosi e attualmente da quei laureati in Matematica che hanno inserito nel loro piano di studio un corso di Probabilità o di Statistica matematica. Le ragioni di questo isolamento delle discipline probabilistico-statistiche dalla Matematica tradizionale risiedono principalmente nel fatto che quest'ultima ha costituito storicamente il principale supporto della Fisica per quanto attiene alla modellizzazione di fenomeni di natura deterministica o a leggi fisiche appropriate per sistemi macroscopici. L'indagine dei fenomeni microscopici che ha portato allo sviluppo di quella importante branca della Fisica che è la Meccanica quantistica, iniziata negli anni venti-trenta di questo secolo, avrebbe da tempo dovuto convincere i matematici dell'importanza dello strumento probabilistico. Ma non solo lo studio della Fisica moderna, anche quello dei fenomeni biologici, economici, sociologici richiede il supporto della Probabilità e della Statistica se si vogliono fare delle indagini realistiche. Convinta come sono del valore concettuale e strumentale di queste discipline e della conseguente opportunità che i primi elementi siano introdotti nella Scuola Secondaria, proporrò quello che a me sembra il modo più corretto e semplice di presentare gli "elementi di Probabilità e di Statistica" agli studenti delle Scuole Superiori, nella speranza che anche i docenti per varie ragioni meno preparati nelle discipline probabilistico-statistiche o meno interessati, guardino a queste almeno con curiosità. Evidentemente non potrò percorrere tutto il programma, che è abbastanza ricco di contenuti in relazione al modesto numero di ore dentro al quale dovrebbe essere svolto. Sotto la voce EPS, il programma prevede:

nel primo biennio:

a) Semplici spazi di probabilità : eventi aleatori, eventi disgiunti e "regola della somma".
b) Probabilità condizionale e applicazioni; formula di Bayes.

c) Elementi di Statistica descrittiva: rilevazione di dati, valori di sintesi, indici di variabilità, regressione e correlazione e tra gli obiettivi del programma di Matematica è segnalato quello di "matematizzare semplici situazioni problematiche, rappresentare e interpretare dati, operare con modelli deterministici e non deterministici"

nel triennio :

a) Speranza condizionata

b) Distribuzione binomiale, normale, di Poisson: teorema di J. Bernoulli

c) Nozioni fondamentali di Statistica inferenziale: teoria elementare del campione, stima delle rilevazioni statistiche, inferenza Bernoulliana ed inferenza Bayesiana e tra gli obiettivi viene ribadita "l'esigenza di abituare l'allievo ad effettuare modellizzazioni, non soltanto deterministiche di situazioni problematiche". Viene pure rilevato che "le nozioni di statistica dovranno essere inserite nel quadro più ampio del problema delle decisioni in condizioni di certezza e di incertezza. . ecc. "

Il programma di Matematica risulta ampio (e c'è chi si preoccupa della proliferazione delle tematiche proposte), in particolare forse lo è il programma di Probabilità e Statistica e un problema potrebbe essere quello di svolgerlo per intero. Ritengo però che debba essere cura di ogni docente di tentare di sviluppare una mentalità, piuttosto che impartire molte nozioni. Per esempio nello studio di alcuni fenomeni potrebbe essere segnalata la differenza tra l'approccio deterministico e quello stocastico: un analista che disponesse dei dati della pioggia negli ultimi anni, ragionando in modo deterministico cercherebbe la linea che approssima meglio quei dati secondo un criterio di minimizzazione degli errori, in modo stocastico cercherebbe di stabilire la distribuzione di probabilità relativa ai valori che ha osservato; un fisico che studia il fenomeno dell'emissione di particelle radioattive, può studiarlo pervenendo ad una legge di tipo deterministico ragionevole e realistica solo in certe condizioni, oppure può studiarlo in modo probabilistico pervenendo alla distribuzione di probabilità della variabile aleatoria che conta il numero di particelle emesse in un intervallo di tempo. Mentre in un modello deterministico si fanno determinate ipotesi dalle quali discende univocamente l'andamento futuro del fenomeno, in un modello probabilistico si usano le ipotesi per determinare la probabilità relative all'andamento futuro del fenomeno. I modelli probabilistici creano un nuovo abito mentale nel ricercatore: quello di ragionare in termini di comportamento casuale anziché deterministico, considerando la probabilità come misura della mancanza di conoscenza del reale. Dissertando della teoria della probabilità e dell'inferenza statistica come su una storia di straordinario successo filosofico, Hacking dice: "I tranquilli statistici hanno cambiato il nostro mondo, non scoprendo fatti o sviluppi tecnologici nuovi, ma cambiando il modo con cui ragioniamo, sperimentiamo, e formiamo le nostre opinioni su questo." (da C. R. Rao:*Statistics and Truth*).

Un primo commento al programma di EPS del biennio abbastanza ovvio è che la parte di Statistica descrittiva c) potrebbe precedere gli altri argomenti previsti in EPS. Questa parte della Statistica erroneamente ritenuta da alcuni la parte sostanziale della Statistica e da altri completamente ignorata, a mio parere ha una utile funzione che è quella di avvicinare gli studenti ai dati sperimentali che possono essere elaborati, rappresentati, confrontati, correlati ecc., facendo anche uso di opportuni programmi come Lotus, Statgraph ecc. Si dovrà precisare il significato ed i limiti dei metodi della Statistica descrittiva che consentono solo di identificare alcune caratteristiche di fenomeni collettivi. La Statistica inferenziale (o semplicemente la Statistica) dovrà invece seguire gli argomenti di Probabilità. Per superare un'eventuale confusione tra il metodo probabilistico e statistico vorrei dire forse in modo un po' grossolano, che con il primo si studia il comportamento di un meccanismo aleatorio supponendo questo ben definito, con il secondo, supponendo il meccanismo aleatorio sconosciuto ed osservando un certo comportamento, si tenta di ricostruire gli elementi mancanti. Per esempio, supposto che sia $\theta = \frac{1}{2}$ la probabilità dell'evento testa nel lancio di una moneta e che il modello consista di 10 lanci indipendenti, i metodi probabilistici consentono di stabilire la probabilità di un evento più complesso come quello di ottenere 2 teste e 8 croci. Qualora θ non sia noto e si siano osservate 2 teste e 8 croci in 10 lanci indipendenti, i metodi statistici inferenziali consentono di congetturare un possibile valore di θ.

Probabilità soggettiva

Venendo finalmente al tema di questa esposizione, vorrei esporre le ragioni della scelta di una definizione soggettiva della Probabilità rispetto ad altre definizioni (o ritenute tali), proponendo un esempio [Ber]. Si considerino tre esperimenti :

a) una signora che beve the con latte afferma di riconoscere se nella tazza è stato messo prima il latte o il the. Si eseguono 10 esperimenti ed in tutti essa dà la risposta corretta;

b) un musicista afferma di essere in grado di distinguere una composizione di Beethoven da una di Mozart semplicemente guardando una pagina di spartito. Si eseguono 10 esperimenti e in tutti egli dà una risposta corretta;

c) un ubriaco afferma di poter indovinare l'uscita del lancio di una moneta prima che sia caduta. Si eseguono 10 esperimenti e in tutti egli dà una risposta corretta. Basandosi solo sull'esito delle prove, dovremmo credere allo stesso modo a tutte tre le affermazioni; se invece teniamo conto delle persone e della fiducia che ad esse accordiamo, dobbiamo considerare il primo evento possibile, il secondo certo, il terzo "fortunato". . . E' chiaro che al momento di assegnare una probabilità a ciascuno dei tre eventi (che la signora riconosca se è stato messo prima il latte o il the, che il musicista riconosca dallo spartito il brano, che l'ubriaco indovini l'uscita della moneta) si debba tenere conto della fiducia che si ha nel verificarsi dell'evento considerato.

L'introduzione della Probabilità soggettiva non esclude valutazioni di probabilità come quelle classica frequentistica che sono valutazioni (e non definizioni) molto utili quando sono possibili. E' noto infatti che la prima richiede di poter distinguere casi ugualmente possibili e incompatibili, mentre la seconda richiede che si presentino condizioni di ripetibilità dell'esperimento che dà luogo all'evento considerato. Nel caso in cui si dovesse valutare la probabilità che il primo numero estratto sia multiplo di 5 su una certa ruota in un certo sabato, una valutazione classica porta facilmente a $\frac{18}{90} = 0.2$ poiché si ritengono ugualmente possibili 90 casi e favorevoli all'evento considerato 18 casi. Mentre nel caso che si dovesse valutare la probabilità che il prossimo nato sia maschio avendo osservato che in un certo periodo sono nati 485 maschi su 1000 nati, una valutazione frequentistica porterebbe a 0.485, valutando in questo modo la probabilità di un evento futuro (analogo ai precedenti) uguale alla frequenza degli eventi passati. Solo incidentalmente, vorrei far rilevare che esercizi di calcolo di probabilità eseguiti in modo "classico" forniscono l'occasione per applicazioni del calcolo combinatorio e permettono di segnalare la difficoltà di individuare casi "egualmente possibili" utilizzando un modello molto efficace della distribuzione di r oggetti in n celle. Nessuno però penserebbe di assegnare la probabilità che vinca il campionato una certa squadra eseguendo una valutazione classica o frequentistica!

Nell'approccio soggettivo, si definisce l'EVENTO come un ente descritto da una proposizione non ambigua che puo essere vera o falsa. Se è noto che essa è vera, l'evento da essa descritto è detto certo e indicato con Ω, mentre se è noto che è falsa, l'evento è detto impossibile e indicato con $\varnothing$. Quando non è noto se l'evento è vero o falso, l'evento è detto possibile. La definizione di PROBABILITÀ di un evento è fondata sul concetto di scommessa coerente. La probabilità p di un evento è misurata dalla quota che chi assegna la probabilità è disposto a pagare a un banco per ricevere 1 se l'evento si verifica e 0 se non si verifica (o pS per ricevere S). Per essere coerente la scommessa non deve assicurare un guadagno certo o una perdita certa, qualunque sia l'evento che si verifica. Deve cioè accadere che il guadagno G, espresso da

$$G = |E| - p$$

$$\text{con } |E| = \begin{cases} 0 & \text{se } E \text{ non si verifica} \\ 1 & \text{se } E \text{ si verifica} \end{cases}$$

non abbia lo stesso segno se E accade o E non accade (o se accade il suo complementare E^c). Precisamente, se

$$G = 1 - p \qquad e \qquad G = - p$$

sono i guadagni corrispondenti al verificarsi e al non verificarsi di E, deve risultare:

$$-p\ (1- p) \leq 0$$

Dal principio di coerenza espresso dalla diseguaglianza precedente, seguono gli "assiomi" della probabilità. Per ogni evento E, indicata con p la probabilità P(E):

$$1)\ 0 \leq p \leq 1$$

Se è noto se E accade o non accade, cioè se si è in presenza dell'evento certo Ω dell'evento impossibile $\varnothing$, l'esito della scommessa è scontato e quindi il guadagno deve essere nullo; segue:

$$2)\ P(\Omega) = 1 \qquad e \qquad P(\varnothing) = 0$$

Data una partizione finita dell'evento certo (una famiglia finita di eventi incompatibili la cui unione sia l'evento certo), una combinazione di scommesse di quote $p_1, \ldots, p_n$ su $E_1, \ldots, E_n$ equivale a una scommessa su con guadagno

$$G = 1 - (p_1 + \ldots + p_n)$$

e la scommessa è coerente se :

$$3)\ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 .$$

L'aspetto matematico della probabilità si può riguardare come lo studio di tutte le funzioni P sulla famiglia di eventi che soddisfa le tre proprietà precedenti, ma nell'approccio soggettivo la probabilità è la misura del grado di fiducia nel verificarsi di E. Si può osservare che:

a) L'interpretazione di P(E) come grado di fiducia conserva la generalità di una impostazione assiomatica, ma - come si è detto - dà un significato alla probabilità di E.

b) P(E) non è una caratteristica intrinseca a E, ma dipende dallo stato di informazione.

c) Le scommesse sono da considerarsi fittizie come è fittizia la definizione di campo elettrico, come la forza che agirebbe su una carica se fosse portata nel punto in cui si misura il campo. . .

Si può inoltre dimostrare che non si possono assegnare in modo coerente due distinte probabilità allo stesso evento.

A differenza dell'introduzione misuristica (o di Kolmogorov) nell'approccio soggettivo vengono definiti anche gli eventi condizionati. Precisamente, quando non è noto che l'evento H è falso, cioè se $H \neq \emptyset$

$$E \mid H = \begin{cases} \text{evento } \textit{vero} \text{ se, essendo vero H, E è vero} \\ \text{evento } \textit{falso} \text{ se, essendo vero H, E è falso} \\ \text{evento } \textit{indeterminato} \text{ se H è falso} \end{cases}$$

Si dimostra che:

$$E \mid H = E \cap H \mid H$$

e con considerazioni di coerenza, si stabilisce che :

$$P(E \mid \Omega) = P(E) \text{ per ogni } E,$$

$$P(E \mid H) = \frac{P(E \cap H)}{P(H)} \quad \text{se } P(H) > 0,$$

o nel caso più generale che $P(H) \geq 0$, la probabilità condizionata è definita implicitamente dalla relazione:

$$P(E \cap H) = P(E \mid H)\, P(H)$$

L'indipendenza tra due eventi viene definita dalla relazione: $P(E \mid H) = P(E)$ e $P(H \mid E) = P(H)$ e quindi, nel caso che $P(E)$ e $P(H)$ siano entrambe positive, dalla relazione:

$$P(E \cap H) = P(E)\, P(H)$$

Si può poi dare la definizione di indipendenza per n eventi o per una qualunque famiglia di eventi e segnalare le conseguenze della condizione di indipendenza. Utili applicazioni sono fornite dal modello dell'urna da cui si eseguono estrazioni con e senza rimpiazzamento, con inserimento di oggetti del colore estratto e/o del colore non estratto. Il modello si adatta a molte circostanze diverse, come il contagio di una malattia, la riduzione del numero degli incidenti dopo un grave incidente, la diffusione di due gas ecc.

A conclusione di questa parte è obbligatorio parlare del teorema di Bayes per la fondamentale importanza che esso riveste nella statistica inferenziale. L'enunciato è il seguente:

Data una partizione dell' evento certo ($H_0, \ldots, H_N$) ed una famiglia di eventi $\mathcal{E}$, dato $E \in \mathcal{E}$ (E è l'evento osservato), allora:

$$P(H_r \mid E) = \frac{P(H_r)\, P(E|H_r)}{\sum_{i=0}^{N} P(H_i)\, P(E|H_i)}$$

Osservando che quanto è scritto a denominatore non dipende dall' evento H_r e quindi si comporta come una costante, la relazione precedente esprime che la probabilità dell'evento H_r condizionatamente all'evento osservato E è proporzionale al prodotto della probabilità di H_r che si aveva a priori per le probabilità di E condizionatamente al verificarsi di H_r. Quest'ultima è detta funzione di verosimiglianza. Con questa interpretazione, il teorema di Bayes ha il ruolo di aggiornare l'informazione a priori espressa da $P(H_r)$ con l'osservazione contenuta nella verosimiglianza. Nel caso di un'urna contenente un numero N di palline di due colori, se $H_0, H_1, \ldots, H_N$ indicano le possibili composizioni incognite dell'urna e p_r indica la probabilità dell'ipotesi H_r, il teorema di Bayes esprime che la probabilità che la composizione sia H_r (r palline bianche) a condizione di aver osservato s bianche in n estrazioni è proporzionale alla probabilità $P(H_r)$ di cui si disponeva a priori sulla composizione H_r moltiplicata per la funzione di verosimiglianza che nel caso osservato è pari a

$$p(E \mid H_r) = p_r^{\,s}\ (1 - p_r)^{\,n-s}$$

Un criterio frequentemente usato nella statistica classica è quello della massima verosimiglianza, fondato sulla ricerca dell'ipotesi H che rende massima la verosimiglianza. Tale criterio applicato per stimare la composizione dell'urna precedentemente considerata, indicherebbe come più probabile la composizione costituita da $p = \frac{s}{n}$ palline bianche, ma non terrebbe conto dall'informazione iniziale sulla composizione o riterrebbe ugualmente probabili tutte le composizioni (ipotesi). Nell'inferenza statistica Bayesiana invece si tiene conto di tali informazioni e si confrontano le probabilità a posteriori. Non tener conto dell'informazione iniziale cioè della probabilità a priori e utilizzare il criterio di massima verosimiglianza può portare a conseguenze curiose, come si rileva negli esempi seguenti [SC]:

ESEMPIO 1

Paolo suddivide gli amici che non gli scrivono da oltre un anno in due categorie: quelli deceduti e quelli molto indaffarati. Si considerino gli eventi:

E = {Pietro non scrive a Paolo da oltre un anno};
H_1 = {Pietro è molto indaffarato};
H_2 = {Pietro è deceduto}.

Risulta ovviamente che $P(E \mid H_2) = 1$ e quindi se $P(E \mid H_1) = \alpha$ con $\alpha < 1$, il criterio di massima verosimiglianza porta a scegliere l'ipotesi funebre come la più probabile! Se invece si tiene conto correttamente delle probabilità a priori cioè dello stato di conoscenze sugli eventi H_1 e H_2, il risultato potrà essere meno pessimista, in quanto usando il teorema di Bayes, risulta:

$$P(H_1 \mid E) = k\,P(H_1)\,\alpha \quad \text{e} \quad P(H_2 \mid E) = kP(H_2)$$

Quindi $P(H_1 \mid E) > P(H_2 \mid E)$ se e solo se $\alpha \geq \frac{P(H_2)}{P(H_1)}$

ESEMPIO 2

Un'industria produce lotti di oggetti che garantisce al 99% nel senso che nella selezione non viene accettato più di un oggetto difettoso tra 100 e non viene scartato più di un oggetto buono tra 100. Quale significato ha l'evento

$$H = \{\text{il lotto è garantito al } 99\%\},$$

in assenza di informazioni sulla composizione dei lotti?

Nessuna, in quanto il lotto potrebbe provenire da una produzione di oggetti tutti difettosi (ogni cento oggetti, pur inserendo solo un oggetto nel lotto, si costruirebbe un lotto di oggetti difettosi). Solo essendo a conoscenza del fatto che non più della metà della produzione è difettosa l'evento H ha significato. Infatti, anche senza eseguire il calcolo si può rilevare che se la produzione fosse di 200 pezzi dei quali 100 buoni e 100 difettosi, con una tale selezione l'evento H sarebbe verificato. A maggior ragione se il numero dei pezzi difettosi è meno della metà !

Gli esempi introdotti evidenziano quindi la necessità di fare riferimento alle informazioni iniziali.

Statistica inferenziale Bayesiana

Il teorema di Bayes costituisce il fondamento della statistica inferenziale. Con riferimento all'esempio riferito nell'introduzione, dall'osservazione di 10 lanci indipendenti di una moneta, costituenti l'ESPERIMENTO E, lo statistico cercherà di inferire il valore della probabilità θ che la moneta presenti la faccia "testa". Il tipico ragionamento Bayesiano con cui egli perviene al risultato è quello di aggiornare il suo stato di conoscenze iniziale o a priori su θ con l'osservazione del risultato sperimentale E, utilizzando il teorema di Bayes:

$$p(\theta \mid E) \propto p(\theta)\, g(E \mid \theta)$$

dove $p(\theta)$ è la densità a priori del parametro incognito θ esprimente l'informazione iniziale sulla distribuzione di θ, mentre $g(E \mid \theta)$ è la funzione di verosimiglianza che esprime la probabilità di osservare E se θ è la probabilità che venga testa. Nell'esempio in questione:

$$g(\theta \mid E) = \theta^8 (1 - \theta)^2$$

Essendo θ un numero reale compreso tra 0 e 1, la funzione densità di probabilità sarà positiva per valori in tale intervallo e nulla per valori esterni. Una famiglia di densità molto ricca, in grado di tradurre stati di conoscenze molto vari, è la densità Beta il cui grafico, al variare dei due parametri, assume molteplici forme.

La conoscenza della probabilità a posteriori di θ, dedotta dal teorema di Bayes, consente di determinare per esempio il valore di θ per cui la probabilità a posteriori è massima o di individuare un intervallo di variabilità per θ corrispondente a una regione di più alta probabilità a posteriori o altre caratteristiche di tale probabilità.

Il problema della ricerca di valori di θ che rendono massima la probabilità ha l'analogo nella Statistica classica nel problema di stima puntuale, mentre quello della ricerca di intervalli di massima probabilità ha l'analogo nel problema della stima di intervallo. Esempi del tutto simili illustrano la possibilità di determinare la distribuzione di probabilità della composizione di un'urna o della percentuale dei votanti "si" al referendum, o della percentuale dei fumatori in una popolazione di fumatori e non fumatori, ecc. Il problema evidentemente è sempre lo stesso. Gli esempi monete-palline sono ben lungi dall'essere inutili giochi intellettuali, sono importanti modelli. Il ragionamento statistico Bayesiano si differenzia da quello classico essenzialmente perche scambia il ruolo di ciò che si ritiene aleatorio con ciò che non lo è: nella Statistica classica, il risultato sperimentale è il valore noto assunto da una variabile aleatoria e il parametro θ è un ben determinato numero incognito; nella Statistica Bayesiana, il risultato sperimentale è un dato e il parametro θ è aleatorio in quanto non è completa la nostra conoscenza sul suo valore e quindi gli si attribuisce una probabilità. E sempre lo stato di conoscenza sul verificarsi o meno di un evento che genera la probabilità, come si diceva all'inizio. Nella Statistica classica si considerano tre classi di problemi che con rifemento all'esempio introdotto sopra del lancio di una moneta dieci volte, si possono riassumere nei quesiti seguenti [SM]:

1) Quale valore ha θ (probabilità di testa nel lancio di una moneta). Questo è un problema chiamato di stima puntuale o variando di poco, è un problema di stima di intervalli. Alla domanda si può rispondere in infiniti modi e il procedimento statistico classico dà una regola per congetturare un possibile valore di θ.

2) E' $\theta = \frac{1}{2}$? (la moneta è equa?) Questo è un problema chiamato test delle ipotesi. La domanda che per esempio potrebbe porsi la zecca se intendesse collaudare ogni moneta prodotta e fondere tutte quelle non eque, ha solo due risposte: si o no.

3) La moneta è equa, è favorito l'evento testa o è favorito l'evento croce? Questo può diventare un problema di teoria delle decisioni nel caso per esempio che, se la moneta non è equa, un tale scommetta con una persona ignara puntando sull'evento favorito dalla moneta. Le prime due domande hanno costituito i principali quesiti della Statistica classica e in realtà non hanno equivalenti nella inferenza Bayesiana in cui il principale obbiettivo è di determinare una probabilità a posteriori.

La terza domanda introduce invece a un aspetto che è considerato e ha un notevole ruolo anche nella Statistica Bayesiana cioè alla utilità o alla perdita connessa per esempio con $\theta > \frac{1}{2}$. Per esempio, se:

$$\theta = P\ \{\text{una data medicina è salutare}\}$$
$$1 - \theta = P\ \{\text{la stessa medicina non è salutare}\}$$

una sovrastima di θ danneggia i consumatori, una sottostima porta alla non utilizzazione della medicina. Si deve valutare il danno e determinare il danno meno pericoloso. Ciò appunto è reso possibile dalla teoria delle decisioni: introducendo una funzione di utilità (o di perdita), tale teoria stabilisce regole per pervenire a decisioni corrispondenti a una perdita media minima o ad altre decisioni con altri requisiti.

A conclusione di questa esposizione, mi accorgo di essere caduta nello stesso tranello dal quale ho cercato di mettere in guardia, cioè ho voluto dire, forse con una certa superficialità molte cose. L'ho fatto nella speranza di stimolare una certo interesse a argomenti che per una esposizione al triennio delle scuole superiori possono in fondo ridursi all'esposizione di questi due argomenti: probabilità e probabilità condizionata. Il volume di Scozzafava che segnalo in bibliografia può essere un' utile traccia per i docenti interessati ad una impostazione soggettiva; i due saggi sugli argomenti di Probabilità e Statistica pubblicati sul volume Scienze Matematiche sono due esemplari esempi di intelligente divulgazione scientifica che possono essere letti da studenti e da docenti; il volume di Piccinato e Pintacuda presenta aspetti di notevole interesse didattico, pur essendo la probabilità introdotta in modo non soggettivo.

Bibliografia

[Ber] Berger J. **Statistical decision theory and Bayesian analysis.** Springer, Heidelberg (1985).

[PP] Piccinato L. - Pintacuda N. **Probabilità e Statistica. Matematica come scoperta.** Quaderno stampato nell'ambito di un contratto C. N. R. rintracciabile presso le segreterie dei Dipartimenti di Matematica delle Università di Pavia, Pisa e Trieste. (1985).

[SC] Scozzafava R. **La probabilità soggettiva e le sue applicazioni.** Ed. Veschi, Roma (1989).

[SM] **Le scienze Matematiche.** Raccolta di saggi a cura dell'Unione Matematica Italiana. Zanichelli, Bologna (1973).