RIFLESSIONI SUL DILEMMA FINITO/INFINITO

Francesco Speranza

1. L'ANTICHITA'

In questo seminario non tenterò di esporre sistematicamente il problema: mi limiterò ad alcune osservazioni che possono risultare stimolanti, specialmemte quando fanno intravvedere che avremmo potuto seguire strade diverse nel dare risposte al dilemma finito/infinito.

Quasi sicuramente furono i filosofi greci i primi a concepire in modo razionale il dilemma. La parola "infinito" aveva, di fatto, significati diversi:

a] infinitamente numeroso,

b] infinitamente esteso,

c] illimitato, nel senso di "privo di confine",

d] infinitamente divisibile.

Fra questi significati vi sono alcune ovvie implicazioni (per esempio, se è vera b], è vera anche a]). Si osservi che il primo è invariante per biiezioni, il secondo per isometrie (e richiede quindi una struttura metrica), il terzo per trasformazioni topologiche (e richiede una struttura topologica). Questo spiega come mai gli antichi abbiano avuto qualche curiosa incertezza fra l'uno e l'altro significato: il pensare per strutture è una caratteristica della matematica di oggi. Si può attribuire a confusioni di questo tipo lo stupore suscitato - nei principianti, ancora oggi - da constatazioni come quella dell'equipotenza di $\mathbb{N}$ e di $\mathbb{Q}$.

Questi significati sfumano, in alcuni pensatori, verso altri più filosofici che matematici, per esempio "indeterminato", "non conoscibile con completezza" ([12], p. 15): essi sono espressi dal termine "$\alpha\pi\epsilon\iota\rho o\nu$", del quale è per noi difficile valutare la portata.

Nei tempi più antichi erano presenti entrambe le concezioni: "l'infinito esiste", "l'infinito non esiste". A favore della seconda sembra sia stato Parmenide: l'Essere è limitato, perché "se mancasse il limite tutto gli mancherebbe". D'altro canto Aristotele ci dice che "tutti quelli che hanno discusso l'argomento hanno considerato l'infinito principio delle cose ... Secondo i Pitagorici e Platone, l'infinito è una sostanza ... I fisici d'altra parte non considerano l'infinito come ... una sostanza, ma qualcosa che è continua per contatto. Questa l'opinione di Anassagora e di Democrito" [1].

I pitagorici, ci ricorda ancora Aristotele, nella dicotomia finito/infinito, ponevano quest'ultimo fra le entità con connotazione negativa, iniziando così una lunga tradizione.

Fra i paradossi di Zenone, alcuni sono tipicamente centrati sull'infinito: la "dicotomia" (se percorri un tratto, prima ne devi fare la metà, poi la metà della metà, ... all'infinito); la "freccia" (una freccia in ogni istante occupa una certa posizione, quindi in quell'istante è ferma: dunque è sempre ferma); l'"Achille"; la "pluralità" (se la realtà è molteplice, deve essere infinitamente piccola, perché composta da indivisibili senza grandezza; ma anche infinitamente grande, perché fra due parti ce ne deve essere una terza, e così via all'infinito).

Aristotele affronta il problema dell'infinito con il suo stile che ricorda un rullo compressore. Dopo avere rammentato cinque argomenti a favore della tesi dell'esistenza dell'infinito (per esempio, una grandezza o un numero possono sempre essere aumentati), si propone di demolirla, con argomenti che assomigliano molto a quelli di Don Ferrante nei "Promessi Sposi" (ovviamente questi conosceva bene i testi di Aristotele). Curiosa è l'argomentazione finale contro l'esistenza d'una realtà infinita composta di infiniti corpi di grandezza finita: in tal caso, dice Aristotele, avremmo infiniti luoghi senza un alto né un basso né alcun'altra direzione, nonché un infinito numero di differenti elementi, che sarebbero inconoscibili, "del che non c'è alcuna prova" [1]. Insomma, sarebbe violato il principio base della cosmologia aristotelica, un "cosmo" bene ordinato con un centro, e quindi con significato intrinseco per le parole "alto" e "basso".

La conclusione è un compromesso (fra le tesi dell'esistenza e della non esistenza) che possiamo dire geniale, e che deve aver soddisfatto Aristotele in quanto si inquadrava in una sua teoria generale. L'infinito non esiste "in atto", ma "in potenza", nel senso che, per esempio, dato un numero ve n'è sempre uno che lo supera ("una cosa viene da un'altra senza fine, e ciascuna di esse è finita, ma ve ne sono sempre di nuove"). Per le grandezze, invece, ce n'è (per ogni specie) una massima (il cosmo è finito), ma abbiamo un infinito per divisione (dato un segmento e una sua suddivisione, se ne può trovare una più fine).

La fisica di Aristotele ha dunque influenza sulla sua matematica.

Ma al tempo di Aristotele si era già sviluppata in modo organico e autonomo la matematica: ne abbiamo solo notizie indirette, ma sappiamo che il matematico Archita sosteneva l'infinità dello spazio dicendo: "arrivato al limite della sfera delle stelle fisse, posso spingere oltre una mano? E' assurdo che non lo possa fare, e se lo posso, al di fuori ci deve essere un corpo o lo spazio ..." [6]. Ma per Aristotele fuori del cosmo non c'è alcunché, neppure lo spazio vuoto, perché (come non c'è materia senza estensione) non c'è estensione senza materia. L'obiezione di Archita suonava un po', a parer mio, come il trucco degli scrittori di fantascienza che, per superare distanze interstellari, fanno uscire le astronavi nell'iperspazio.

In Euclide si può notare un compromesso fra la posizione democriteo-platonica e quella aristotelica. Una "retta" è quasi sempre "terminata", vale a dire è un segmento, ma è sempre prolungabile (postulato 2). Anzi, vi sono occasioni in cui si deve dire "indefinitamente prolungata" (come nella definizione di rette parallele, e più esplicitamente nel postulato 5). Euclide non parla mai della totalità dei punti d'una retta, e tanto meno dice che essa ha infiniti punti: si potrebbe dire che i punti appartengono a una retta "potenzialmente" (su una retta si possono prendere dei punti), ma non "in atto".

Si osservi che il 5^{o} libro degli *Elementi* di Euclide contiene la teoria, attribuita a Eudosso, delle proporzioni fra grandezze. Di fatto essa è equivalente alla teoria dei numeri reali: ma dal punto di vista sintattico essa evita di parlare di classi infinite (come sono le classi di Dedekind), anche se si fanno quantificazioni su $\mathbb{N}$.

L'impostazione della scienza greca tendeva a separare la matematica dalla fisica: la prima si poteva permettere delle astrazioni che per la seconda non avevano senso. Si spezzava l'armonia pitagorico-platonica fra mondo ideale e mondo fisico: Aristotele arrivava ad affermare che "la matematica non è lo stile delle scienze della natura". Il problema si presenta anche oggi, e la filosofia della scienza ha dovuto escogitare nuove spiegazioni.

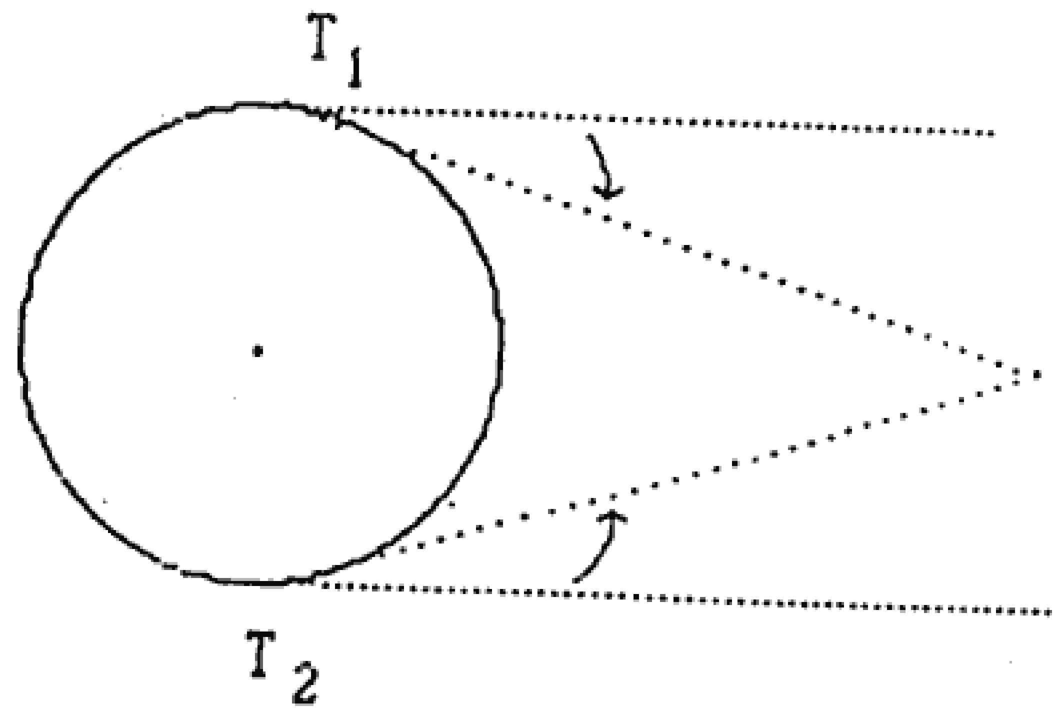
2. RINASCIMENTO ED ETA' MODERNA

Durante il Medioevo prevalse la concezione di un cosmo "finito, chiuso e gerarchicamente ordinato" (12), il cui significato è espresso dalle caratteristiche *qualitative* dei luoghi che lo compongono.

Una rivoluzione fu compiuta da Nicolas Krebs, detto Nicola Cusano, vescovo di Bressanone. L'universo non ha limiti (e quindi resterà sempre inconoscibile nella sua interezza per via razionale: è la "dotta ignoranza", titolo della sua opera principale). Qualunque punto può esserne considerato il centro, e quindi non vi sono luoghi più o meno nobili, né si possono distinguere moto e quiete assoluti. Giordano Bruno sostenne poi che l'universo è sostanzialmente omogeneo, popolato da infiniti astri, probabilmente centri di sistemi planetari.

A differenza di Cusano e di Bruno, i primi scienziati novatori non lo furono sul tema dell'infinità dello spazio. Copernico fu un rivoluzionario molto prudente: non abbandonò il principio che i movimenti degli astri fossero composizioni di movimenti circolari. Per lui l'universo ha la forma d'una sfera, anche se al di fuori di essa c'è pur sempre spazio. Per quanto concerne le misure astronomiche, sappiamo che Aristarco aveva escogitato dei metodi (concettualmente validi) per valutarne alcune, e con qualche considerazione piuttosto approssimativa si era arrivati a stimare in 2000 raggi terrestri l'ordine di grandezza dell'universo. Copernico si trovò di fronte a un'obiezione.

Nell'ambito del sistema solare, le teorie tolemaica e copernicana sono modelli cinematicamente equivalenti, nel senso che sono traducibili l'uno nell'altro. Ci si può tuttavia chiedere



che cosa vedrebbe un osservatore posto su una stella (così come Galileo vide al telescopio i "pianeti medicei" ruotare intorno a Giove). Secondo il sistema eliocentrico, una stella si dovrebbe vedere dalla Terra, quando questa si trova in punti opposti dell'orbita terrestre, in posizioni diverse sulla volta celeste (la differenza è la cosiddetta parallasse). Ebbene, a Copernico si poteva muovere l'obiezione che nessuna parallasse era stata osservata: egli fu portato così a dover ammettere che il cosmo fosse migliaia di volte più grande di quanto normalmente si pensasse, di modo che non si osservavano le parallassi (in effetti, la prima fu riscontrata solo nel 1838, ed era inferiore a 1").

Galileo, sull'infinità dell'universo, ha una posizione prudente e metodologicamente corretta: "Né voi né alcun altro ha mai provato che il mondo è finito ... o infinito ..." (12), e in un altro passo, dopo aver riconosciuto che vi sono "argute ragioni" in favore dell'una e dell'altra tesi, dichiara di propendere per l'infinitezza proprio a ragione della sua incomprensibilità.

Ma veniamo ad alcune di queste "ragioni". Vediamo quelle di Keplero. Egli osserva che (11) a] Le maggiori grandezze apparenti delle stelle sono dell'ordine di 1' (noi vediamo secondo ampiezze angolari!)

b] vi sono coppie di tali stelle che distano apparentemente di circa 83'.

Un osservatore posto nelle vicinanze d'una di esse vedrebbe l'altra circa 80 volte più grandi di quanto le vediamo noi, cioè con un diametro apparente triplo di quello del Sole. Il cielo, visto dalle altre stelle, apparirebbe quindi popolato da stelle molto più grandi di quelle che vediamo noi.

Il sistema solare si trova quindi, per così dire, entro una cavità vuota di stelle. e c'è un buon motivo per ritenere che si trovi proprio al centro. Quella che i Greci dicevano "via Lattea" e i medioevali "via di San Giacomo" (collegandola ai pellegrinaggi a San Giacomo de Compostela) appare più o meno la stessa in tutte le direzioni.

Alle argomentazioni di Keplero si poteva obiettare che una delle stelle "grandi" potrebbe essere molto più distante dell'altra che vista da noi le sembra vicina. Ma allora dovrebbe essere molto più grande anche nella realtà: ci sarebbero quindi stelle sempre più grandi via via che ci allontaniamo, e il luogo del sistema solare sarebbe sempre "speciale".

Purtroppo per Keplero, la premessa a] è sbagliata: i primi telescopi (e poi anche quelli più potenti) non hanno fatto aumentare la grandezza apparente delle stelle, perciò qualunque valutazione di questa è inattendibile.

Keplero si pone anche due domande:

" Non potrebbe qualcuna delle stelle visibili distare da noi di un intervallo infinito?"

La risposta negativa è abbastanza semplice: il diametro della stella dovrebbe essere infinito, e questo è impossibile per ragioni di principio.

La domanda stessa è sorprendente: quando noi diciamo che una retta è illimitata, non intendiamo dire che esistano punti a distanza infinita! La nostra illimitatezza è, rispetto a quella sottintesa dalla domanda di Keplero, potenziale, anche se va oltre quella di Euclide.

"E se vi fossero stelle di grandezza finita sparse su spazi infiniti e quindi da un certo punto in poi invisibili?"

Delle ragioni che Keplero dà per sostenere la risposta negativa, una è di carattere epistemologico: "se non si vedono, non riguardano l'astronomia". Un'altra fa sentire come pesasse ancora la tradizione aristotelica: " se la regione delle stelle fisse è limitata verso il basso, verso (la cavità che contiene) il nostro mondo, perché non dovrebbe essere limitata verso l'alto?" [11]

"L'"alto" e il "basso" aristotelici giocano ancora un ruolo essenziale: eppure Keplero è stato il rivoluzionario che ha osato abbandonare il principio della circolarità dei movimenti celesti.

La terza ragione è piuttosto singolare: tutte assieme, le stelle costituirebbero un corpo infinito (anche come materia): ma ciò che è infinito manca di limite, e quindi anche di dimensioni (riecco l'$\alpha\pi\epsilon\iota\rho o\upsilon$!)

3. IL GRANDE MOMENTO DELLA "NUOVA SCIENZA"

Come si vede, in quei secoli l'infinito interessava soprattutto in quanto "illimitato", e in particolare applicato alla realtà fisica: Tuttavia, per Newton lo spazio e il tempo "veri" sono quelli "matematici" e assoluti.

Cartesio, Newton e Leibniz sono per un universo infinitamente esteso, il metodo cartesiano, facendo corrispondere numeri e punti d'una retta, tende a far pensare analoghi, e cioè infiniti, i loro insiemi. Leibniz inoltre si dichiara convinto che l'infinito, in particolare quello per divisione, esiste in atto (concordemente con la sua teoria delle monadi: la realtà non solo divisibile all'infinito, ma è effettivamente divisa).

Intorno al 1830, mentre l'astronomia mieteva successi grazie ai metodi newtoniani, Wilhelm Olbers sviluppò un'argomentazione "di plausibilità" nello stile di quella di Keplero.

A quell'epoca si riteneva ragionevole supporre che le stelle fossero distribuite abbastanza uniformemente nell'universo. Oggi si sa che sono raggruppate in galassie, basta allora sostituire "galassie" a "stelle". Immaginiamo una successione di superfici sferiche, di raggio R, 2R, 3R, ..., con centro nella Terra. il volume compreso fra l' n-esima e l' (n+1)-sima superficie è $\frac{4}{3}\pi$ [$(n+1)^3R^3 - n^3R^3$] cioè $\frac{4}{3}\pi$ $[3n^2 + 3n + 1]R^3$.

In base all'ipotesi di uniformità della distribuzione, il numero delle stelle comprese nello strato è proporzionale a $3n^2 + 3n + 1$, cioè, per n grande, approssimativamente al quadrato di n. Possiamo ammettere che in ogni strato la luminosità delle stelle sia statisticamente la stessa, e quindi che anch'essa sia proporzionale al quadrato della distanza. Ma la luce che arriva a noi viene ridotta proporzionalmente al quadrato della distanza, e quindi da ogni strato ci arriva all'incirca la stessa quantità di luce: gli strati sono infiniti, e quindi ci arriva infinita luce (e infinito calore). Per nostra fortuna, quasto non accade! (Ma che cosa avrebbe detto un novello Parmenide?)

Dobbiamo cercare eventuali ipotesi nascoste. Quella dell'uniforme distribuzione si potrebbe appoggiare al "principio di ragion sufficiente": non si vede un motivo perché la distribuzione non sia uniforme. Inoltre, già al tempo di Olbers si sapeva che la luce ha velocità finita, e poiché nell'argomentazione si ammette che ci arrivi luce da ogni strato, si ammette anche che ci arrivi luce da tempi arbitrariamente lontani. Basta supporre che l'universo esista da un tempo finito, per sciogliere il paradosso.

Se l'universo fosse finito, il volume dell'n-esimo strato non sarebbe più proporzionale a n^2. anzi, da un certo livello in poi il volume dello strato diminuirebbe. Però la luce circolerebbe più volte nell'universo ...

4. QUALCHE PRECISAZIONE METODOLOGICA

Abbiamo visto alcune argomentazioni, basate su certe ipotesi. un'ipotesi, una teoria possono essere sottoposte a controllo: si parla di "verifica" quando il risultato è positivo: la parola può tuttavia indurre in errore, perché, salvo in situazioni molto speciali, non è possibile controllare tutti i casi. E' invece corretto parlare di falsificazione, perché un solo caso negativo *dovrebbe* confutare l'ipotesi.

Ebbene, l'affermazione che qualcosa è infinitamente esteso è inverificabile, o meglio incontrollabile. Non possiamo constatare che ci sono punti oltre ogni limite, o che qualcosa può essere divisa al di là di qualsiasi divisione già realizzata.

Corrispettivamente, la finitezza dell'universo, e l'atomismo (il fatto che la materia sia divisibile solo fino a un certo livello) sono infalsificabili. Anche se non abbiamo trovato limiti (all'estensione o alla suddivisibilità), con un ulteriore passo potremmo toccare questi limiti.

Fin qui abbiamo parlato di ipotesi prese isolatamente. Di solito le troveremo inserite in una teoria più complessa, per cui l'alternativa finito/infinito potrà rispecchiarsi in un'alternativa fra due possibilità di tipo diverso, e sottoponibili a controllo (almeno una delle due). Per esempio, nella teoria della relatività generale, lo spazio risulterebbe limitato se la somma delle masse fosse superiore a una certa soglia, e viceversa. Ma la falsificazione di una conseguenza dell'ipotesi non comporta automaticamente la falsificazione dell'ipotesi, perché la conseguenza è ottenuta nell'ambito di una teoria, e potrebbe essere falsa un'altra ipotesi implicita nella teoria.

Non abbiamo esperienza diretta dell'infinito, in qualunque sua accezione: come mai parliamo di infinito? Si tratta di una estrapolazione, per usare un termine matematico. Ci accorgiamo che a uno degli insiemi che usiamo comunemente possiamo aggiungere un nuovo elemento; generalizziamo il fatto, e diciamo che un numero ha sempre un successivo. Vediamo che un segno sulla carta si può prolungare: idealizzando e generalizzando, diciamo che un segmento si può prolungare, anzi addirittura che esiste la "chiusura" di tutti questi prolungamenti, una retta.

5. L'INFINITO MATEMATICO

Galileo si interessò al problema dell'infinito da diversi punti di vista. Uno è ben noto: associamo a ogni numero naturale il suo quadrato, otteniamo una corrispondenza biunivoca fra l'insieme dei naturali e quallo dei quadrati, che ne è una parte propria: abbiamo un esempio di "parte che è uguale al tutto": Galileo osserva che questa difficoltà proviene dall'applicare all'infinito gli stessi attributi del finito.

Meno nota è l'argomentazione delle "ruote". Prendiamo un poligono regolare e una retta r che contiene uno dei suoi lati. immaginiamo di farlo "rotolare" lungo la r. Prendiamo un poligono omotetico, con lo stesso centro, più piccolo, e sia s la retta del lato parallelo a r. Nel rotolamento, i lati del poligono minore si vanno a sovrapporre ad alcuni segmenti di s, intervallati da tratti "non tocchi". Aumentando il numero dei lati del poligono, diventano più piccoli sia questi che quelli. Prendiamo due circonferenze concentriche, "che son poligoni di lati infiniti" (affermazione impensabile nella tradizione euclidea, anche se qualche greco l'aveva fatta) accade una cosa inaspettata: ogni punto della s viene toccato dal rotolamento della circonferenza minore. Noi spieghiamo questo fatto dicendo che questa slitta su s, vale a dire che il punto di contatto ha velocità istantanea non nulla: neghiamo di fatto che qui si possa applicare il "principio di continuità" (quello che accade per ogni valore di n deve accadere anche per n tendente all'infinito).

Galileo, per salvare il principio, fa un'ardita ipotesi: "la linea passata dagl'infiniti lati del cerchio grande ... esser pareggiata in lunghezza dalla linea passata dagl'infiniti lati del minore, ma da questi con l'interposizione d'altrettanti vacui tra essi" [9].

Bonaventura Cavalieri, che si considerava discepolo di Galileo, basò il suo metodo degli indivisibili su "tutte le sezioni" d'una figura, ottenute con un sistema di rette o (se del caso) di piani paralleli. I critici del metodo, per esempio Guldino, non tardarono a trovare paradossi in applicazioni appena un po' generalizzate: per esempio, due triangoli di uguale altezza e basi diverse si possono ripartire in infiniti segmenti a due a due "uguali", e allora i triangoli sarebbero "uguali" (per area).

Il Settecento è pieno di veri e propri giochi dei matematici sull'infinito, dei quali non si sa se ammirare o deplorare la spregiudicatezza. Tutto dipende, in fondo, dal successo del "gioco". Come esempio d'un gioco cui ha arriso il successo, citiamo un'argomentazione di Eulero:

Sappiamo che $\sin x = 0$ se e solo se x è un multiplo intero relativo di π . Si ha allora che $1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \ldots = 0$ (che vale $\frac{\sin x}{x}$) se e solo se x è un multiplo non nullo di π.

Per analogia con un'equazione algebrica di cui si conoscono le radici

$$\frac{\sin x}{x} = \left(1 - \frac{x}{\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{2\pi}\right)\ldots ,$$

e, trasformando il prodotto infinito in una serie,

$$1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \ldots = 1 + x^2\left(-\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{4\pi^2} - \ldots\right) + \ldots$$

Uguagliando termine a termine, la prima uguaglianza dà

$$\frac{\pi}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots \quad \text{(risultato corretto!)}$$

Come esempio di gioco senza successo possiamo citare la "serie di Grandi" $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots.$: se S è la sua somma, allora si può (!) scrivere

$S = (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots = 0$,

ma anche

$S = 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \ldots = 1$,

o ancora

$S = 1 - (1 - 1 + 1 - \ldots) = 1 - S$, da cui $S = \frac{1}{2}$

Oggi è fin troppo facile sorridere di queste speculazioni: invece, bisogna rifarsi allo spirito non formalista dell'epoca, influenzata dalla filosofia platonica, per cui S "deve esistere", in qualche modo, e allora si tratterebbe solamente di trovare un modo per calcolarla; ma ...

Nell'Ottocento, con il programma di rigorizzazione dell'analisi, si ripresenta il problema dell'infinito. Fino ad allora, l'"infinito" era uno solo (come si potrebbe aumentare qualcosa che è oltre ogni limite?): Bernhard Bolzano per primo concepì l'idea di infiniti far loro diversi, senza però (almeno, a quanto ci risulta) riuscire a indicarli.

Si potrebbe dire che fino a Bolzano matematici e filosofi guardarono all'infinito stando nel finito, o facendo al più rapide scorribande: Bolzano pose le tende al di là del limite, ma fu Georg Cantor che pose il dominio della matematica sull'infinito attuale. Infatti a lui si deve il riconoscimento dei diversi cardinali e ordinali transfiniti, stabilendo anzitutto l'equipotenza di $\mathbb{N}$ e di $\mathbb{Q}$, e la non equipotenza di $\mathbb{N}$ e di $\mathbb{R}$.

Per la maggior parte dei matematici, i numeri transfiniti sono indiscussi "abitanti" del "mondo 3" popperiano (il mondo delle teorie). Non così per gli intuizionisti, che non riconoscono la legittimità di un discorso che coinvolga totalità che vanno oltre quelle numerabili. per esempio, ritengono che sia lecito prendere in considerazione solo quei numeri irrazionali che si possono definire in modo esplicito (per esempio, e). E' noto che la cardinalità dell'insieme di questi numeri non può superare quella di $\mathbb{N}$(cardinalità delle frasi possibili con un linguaggio ad alfabeto finito); quindi "la maggior parte" dei numeri reali resterà sempre inesprimibile con i mezzi usuali (alcuni hanno voluto considerare paradossale questo fatto).

Non ci soffermeremo (poiché sono ben note) sulle gustose stranezze che si hanno generalizzando all'infinito fatti propri del finito, come per esempio l'"albergo di Hilbert" [14].

6. BELLEZZA DEL FINITO

In quest'ultimo paragrafo mi limiterò ad alcune considerazioni sul "finito" nel significato a], senza entrare nella problematica delle varie definizioni possibili. Osservo anzi che a volte si distinguono, fra gli insiemi finiti, quelli "molto grandi", così grandi che a essi in pratica può convenire applicare metodologie dell'infinito (per esempio, si può così giustificare il fatto che che configurazioni considerate finite dalla Fisica e dalla Chimica - per esempio, gli atomi contenuti in un oggetto fisico -vengano studiate con strumenti di Matematica infinitaria, per esempio la geometria euclidea o l'analisi infinitesimale). Per quanto la distinzione può avere senso, si parlerò qui del finito "piccolo".

La Matematica classica (diciamo, quella precedente alla "liberazione" dai riferimenti concreti) studia insiemi infiniti ($\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, gli spazi delle geometrie classiche,...), pur senza affrontare esplicitamente il problema dell'infinito. E' curioso che in molte trattazioni di geometria elementare si metta fra i primi assiomi che "una retta (o lo spazio) ha infiniti punti" (quando a studenti universitari ho chiesto di dirmi un assioma della geometria, spesso mi hanno indicato questo): affermazione estranea allo spirito della geometria euclidea e inutile per la dimostrazione degli usuali teoremi.

La "Matematica moderna" cerca invece, solitamente, di non caricare subito le trattazioni con sistemi di assiomi (che pretendono di essere) completi, lasciando quindi la possibilità di specie di strutture più ampie, in quanto vincolate da un sistema di assiomi più ridotto. Così si ottengono gli spazi proiettivi e affini finiti, gli spazi topologici finiti, le aritmetiche modulari, eccetera. In alcuni casi queste strutture hanno trovato applicazioni " concrete ", vorrei qui fare l'elogio di tutte, anche di quelle che (per ora) non l'hanno trovate.

Quando un modello di assiomi ammette un modello finito, la coerenza è assicurata. In questo modo ci assicuriamo della coerenza di molte teorie significative della Matematica moderna (per esempio, le geometrie - proiettiva o affine - grafiche, la teoria dei gruppi, la topologia generale). Comunque, una configurazione finita si può analizzare pezzo per pezzo, si possono fare su di essa affermazioni sicure: queste possono essere congetture relative alla possibilità di dimostrare teoremi nella teoria stessa.

Prendiamo per esempio la geometria affine piana. Si ammettono gli assiomi

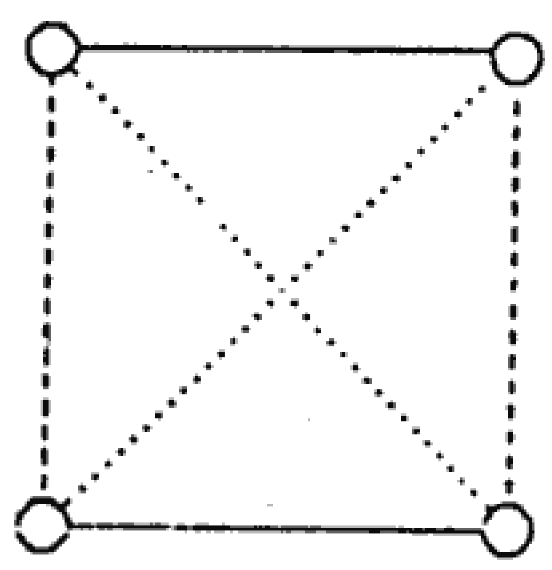
"Dati due punti, esiste una sola retta alla quale essi appartengono"

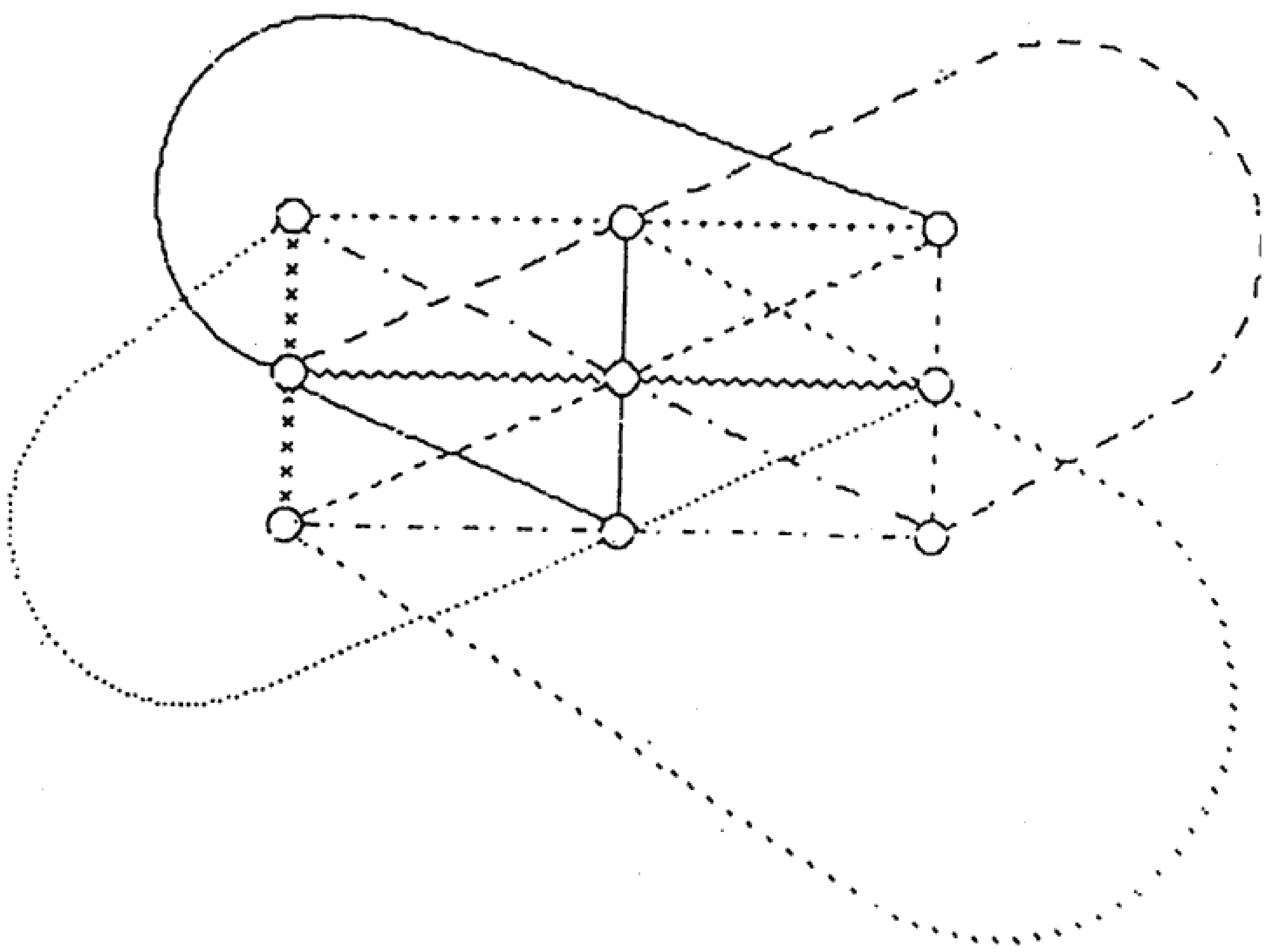
" Dati una retta r e un punto P che non le appartiene, esiste una sola retta cui P appartiene e disgiunta da r".

Si constata che la configurazione formata da n punti appartenenti alla stessa retta è un modello di questi assiomi, altrettanto si può dire di quella formata da n punti allineati e dalle rispettive rette singoletto. Per evitare questi modelli, si può introdurre un altro assioma

"Esistono almeno tre punti non allineati".

Ecco due modelli di questi assiomi





(i circoletti sono i "punti", una linea congiungente più circoletti è una "retta" alla quale quei "punti" appartengono).

In questi "mondi possibili" sono *vere* le affermazioni:

"due rette hanno lo stesso numero di punti"

"se una retta ha n punti, il piano ne ha n^2"

"presi due punti, esiste una traslazione che porta il primo nel secondo" (una traslazione è una biiezione che trasforma una retta in sé o in una parallela, e tale che le rette congiungenti punti corrispondenti sono parallele).

Le prime due congetture sono dimostrabili nella teoria, mentre la terza non lo è (come si prova esibendo un modello che non la soddisfa).

Le configurazioni finite sono dunque particolarmente "utili" per capire la distinzione tra fase sintattica e fase semantica, e fra teoria e metateoria. Sono anche significative per stabilire un contatto fra il quasi-empirismo (secondo il quale una teoria formale deve avere la sua base in una teoria informale, e trovare la sua significatività in questa (13)) e il formalismo (inteso nel senso originario di Hilbert: programma che si propone di dare veste formale alle teorie matematiche, per fondarle in modo coerente).

BIBLIOGRAFIA

[1] H.G. APOSTLE, Aristotle's Philosophy of Mathematics, University of Chicago Press, Chicago 1952

[2] G.ARRIGO, B.D'AMORE, Infiniti, in corso di pubbl.

[3] F. ARZARELLO, Matematica dell'infinito, CLU, Torino 1980

[4] B. BOLZANO, Paradoxien des Unendlichen, Elbert, Leipzig 1851

[5] G. CANTOR, Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts, Berlin 1932

[6] F.M. CORNFORD, Invention of space, in "Essays in Honor of Gilbert Murray", Allen and Unwin, London 1936

[7] F. ENRIQUES, Gli Elementi d'Euclide e la critica antica e moderna, Stock-Zanichelli, Roma-Bologna 1925-1935

[8] F. ENRIQUES, G. DE SANTILLANA, Compendio di storia del pensiero scientifico, Zanichelli, Bologna 1936

[9] G. GALILEI, Discorsi e dimostrazioni sopra due nuove scienze,in "Opere", Ed. Naz., v. 8, Barbera, Firenze 1933

[10] D. HILBERT, Ueber das Unendliche, Mat. Ann., 95, 161-190 (trad. ital. in "Ricerche sui fondamenti della Matematica", Bibliopolis, Napoli)

[11] J. KEPLER, Epitome astronomiae Copernicanae, I, in "Opera

omnia", Frisch, Frankfurt - Erlangen 1959

[12] A. KOYRE', From the closed world to the infinite universe, J. Hopkins Press, Baltimore 1957 (trad. ital. Dal mondo chiuso all'universo infinito , Feltrinelli, Milano)

[13] I. LAKATOS, A renaissance of empiricism in the philosophy of mathematics? in "Mathematics, science, epistemology", Cambridge University Press, Cambridge 1978

[14] C.MARCHINI, Difficoltà del concetto di finito in teoria degli insiemi, in corso di pubbl.

[15] R.RUCKER, Infinity and the mind, Birkhauser, Basel 1982 (trad. ital. in corso di pubbl.)