

Capitolo 4

Cartografia

*Egli aveva comprato una grande carta del mare
Senza la minima traccia di terra:
L'equipaggio fu molto contento di vedere che
Era una carta che ognuno poteva capire.*
Lewis Carroll, Hunting of the Snark

4.1 Carte

Si chiama *carta* di $\mathbb{S}(r)$ una coppia (A, f) dove A è una parte di $\mathbb{S}(r)$ e $f : A \rightarrow \mathbb{R}^2$ un'applicazione iniettiva.

Quasi sempre si richiede che f sia un omeomorfismo di A su $f(A)$. Per esempio le proiezioni stereografiche sono delle carte dove $A = \mathbb{S}(r) - \{P\}$ con P punto di $\mathbb{S}(r)$.

Lemma 4.1.1 *Non può esistere una carta $(\mathbb{S}(r), f)$, cioè un omeomorfismo*

$$f : \mathbb{S}(r) \rightarrow f(\mathbb{S}(r)) \subset \mathbb{R}^2.$$

Dimostrazione. Sia $\mathbf{x} \in \mathbb{S}(r)$; per le ipotesi si ha $f(\mathbb{S}(r) - \{\mathbf{x}\}) = f(\mathbb{S}(r)) - \{f(\mathbf{x})\}$. Ora $f(\mathbb{S}(r) - \{\mathbf{x}\})$ è un aperto di \mathbb{R}^2 per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{S}(r)$, quindi anche $f(\mathbb{S}(r)) - \{f(\mathbf{x})\}$ deve essere un aperto di \mathbb{R}^2 , cioè $f(\mathbb{S}(r)) - \{f(\mathbf{x})\}$ deve coincidere con il suo interno. Ma $f(\mathbb{S}(r))$ è un compatto, cioè un chiuso e limitato di \mathbb{R}^2 , che possiede più di un punto di frontiera, quindi $f(\mathbb{S}(r)) - \{f(\mathbf{x})\}$ non può essere un aperto di \mathbb{R}^2 . \square

Si chiama *carta delle coordinate terrestri* la coppia $(\mathbb{S}(r) - \Gamma, f_0)$ dove per ogni $P \in \mathbb{S}(r)$

$$f_0(P) = (\phi(P), \theta(P))$$

dove $\phi(P)$ è la longitudine di P e $\theta(P)$ è la latitudine di P . Ne segue chiaramente che

$$f_0(\mathbb{S}(r) - \Gamma) =] - \pi, \pi[\times] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [.$$

L'applicazione $\tau = f_0^{-1}$ è definita da

$$\tau(\phi, \theta) = (r \cos \phi \cos \theta, r \sin \phi \cos \theta, r \sin \theta).$$

Praticamente ogni carta f di $\mathbb{S}(r)$ (o della Terra) è data non dall'applicazione f ma dall'applicazione $g = f \circ \tau$ che è della forma

$$x = u(\phi, \theta) \quad \text{e} \quad y = v(\phi, \theta).$$

Notazioni. Indicheremo con d la metrica intrinseca sulla sfera e con \tilde{d} la metrica euclidea del piano denotato con E .

4.2 Distorsione

Sia U un sottoinsieme non degenere di $\mathbb{S}(r)$ (i.e. che contiene almeno due punti). Si dice *proiezione* ogni applicazione $f : U \rightarrow E$.

Se f è una proiezione, fissati $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, si dice *scala di f rispetto ad \mathbf{x} e \mathbf{y}* il rapporto

$$\frac{\tilde{d}(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y}))}{d(\mathbf{x}, \mathbf{y})}.$$

Per studiare tale rapporto consideriamo

$$\sigma_1(f) = \inf_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U, \mathbf{x} \neq \mathbf{y}} \frac{\tilde{d}(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y}))}{d(\mathbf{x}, \mathbf{y})}, \quad \sigma_2(f) = \sup_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U, \mathbf{x} \neq \mathbf{y}} \frac{\tilde{d}(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y}))}{d(\mathbf{x}, \mathbf{y})}.$$

Dalla definizione segue che per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U$

$$\sigma_1(f)d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \tilde{d}(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) \leq \sigma_2(f)d(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Si definisce *distorsione* di f il numero reale

$$\delta(f) := \log \frac{\sigma_2(f)}{\sigma_1(f)}.$$

Lemma 4.2.1 *Se f è una proiezione valgono*

- 1) $\delta(f) < +\infty \Leftrightarrow 0 < \sigma_1(f) \leq \sigma_2(f) < +\infty$,
- 2) $\delta(f) < +\infty \Rightarrow f$ *bilipschitziana e iniettiva.*

Dimostrazione. La 1) segue dalle proprietà del logaritmo. Per la 2) osserviamo che $\sigma_2(f) = e^{\delta(f)}\sigma_1(f)$. Allora vale

$$\sigma_1(f)d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \tilde{d}(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) \leq e^{\delta}\sigma_1(f)d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (4.1)$$

per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U$. Pertanto f è bilipschitziana. Inoltre se $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U$ sono tali che $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y})$, allora per (4.1), $\sigma_1(f)d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$. Osservando che $\sigma_1(f) \neq 0$ e che d è una metrica sulla sfera, si conclude che $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Dunque f è iniettiva. \square

Osservazione 4.2.2 Se $\delta(f) = 0$ da (4.1) segue che

$$\tilde{d}(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) = \sigma_1(f)d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

dunque f è una similitudine, cioè un'isometria a meno di un fattore di proporzionalità.

I problemi della cartografia nascono dal seguente

Teorema 4.2.3 *Se U è un aperto di $\mathbb{S}(r)$, allora non esiste alcuna isometria $f : U \rightarrow E$.*

Dimostrazione. Se U è un aperto di $\mathbb{S}(r)$, esistono $A, B, C \in U$ tali che ABC sia un triangolo sferico equilatero contenuto in U . Sia α la lunghezza (sulla sfera) di un lato di tale triangolo e sia T un punto di $\mathbb{S}(r)$ equidistante da A, B, C , cioè tale che $d(T, A) = d(T, B) = d(T, C) =: \beta$. Utilizzando formule di trigonometria sferica si prova che $\alpha < \sqrt{3}\beta$.

Ora, se ci fosse un'isometria $f : U \rightarrow E$, l'immagine di ABC tramite f dovrebbe essere un triangolo equilatero in E di lato α e $f(T)$ sarebbe il circocentro di tale triangolo. Dunque si avrebbe $\alpha = \sqrt{3}\beta$, che è assurdo. \square

Da questo teorema e dall'osservazione precedente segue che non è possibile trovare una proiezione da un aperto di $\mathbb{S}(r)$ su E che abbia distorsione nulla; il problema diventa allora trovare le proiezioni aventi distorsione "minima" tra quelle di una certa classe. Dimostreremo più avanti che

Teorema 4.2.4 *Se U è un sottoinsieme di $\mathbb{S}(r)$ tale che $\bar{U} \neq \mathbb{S}(r)$, allora esiste una proiezione $f_0 : U \rightarrow E$ t.c. per ogni proiezione $f : U \rightarrow E$ risulta $\delta(f_0) \leq \delta(f)$.*

4.3 La proiezione equidistante azimutale

Consideriamo la sfera $\mathbb{S}(r)$. Sia \mathbf{x}_0 un suo punto fissato e $E = T_{\mathbf{x}_0}(\mathbb{S}(r))$. Per $\alpha \in]0, \pi[$ poniamo

$$D_\alpha := \{\mathbf{x} \in \mathbb{S}(r) \mid d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \leq r\alpha\}$$

ed indichiamo con τ il piano individuato da \mathbf{x}_0 , O e $P \in D_\alpha$.

quindi

$$\mathcal{L}(\gamma) = r \int \sqrt{(\sin^2 \psi) \phi'^2 + \psi'^2} dt$$

e

$$\mathcal{L}(f_a(\gamma)) = r \int \sqrt{\psi^2 \phi'^2 + \psi'^2} dt.$$

Osservando che $\sin \psi \leq \psi$ e che la funzione $\frac{\psi}{\sin \psi}$ è crescente e quindi che vale

$$\frac{\psi}{\sin \psi} \leq \frac{\alpha}{\sin \alpha},$$

si ha

$$\sin \psi \leq \psi \leq \left(\frac{\alpha}{\sin \alpha} \right) \sin \psi$$

da cui

$$\mathcal{L}(\gamma) \leq \mathcal{L}(f_a(\gamma)) \leq \left(\frac{\alpha}{\sin \alpha} \right) \mathcal{L}(\gamma).$$

Tenendo conto di questa disuguaglianza si prova che per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D_\alpha$

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \tilde{d}(f_a(\mathbf{x}), f_a(\mathbf{y})) \leq \left(\frac{\alpha}{\sin \alpha} \right) d(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Dunque

$$\sigma_1(f_a) \geq 1 \quad \text{e} \quad \sigma_2(f_a) \leq \frac{\alpha}{\sin \alpha} \Rightarrow \frac{\sigma_2(f_a)}{\sigma_1(f_a)} \leq \frac{\alpha}{\sin \alpha}$$

da cui la tesi

$$\delta(f) = \log \left(\frac{\sigma_2(f_a)}{\sigma_1(f_a)} \right) \leq \log \left(\frac{\alpha}{\sin \alpha} \right). \quad \square$$

Lemma 4.3.3 *Se f è una qualsiasi proiezione definita su D_α , allora*

$$\delta(f) \geq \log \left(\frac{\alpha}{\sin \alpha} \right).$$

Dimostrazione. Se $\delta(f) = \infty$ la tesi è banale. Assumiamo $\delta(f) < \infty$. Allora f è iniettiva e bilipschitziana. Se consideriamo $C_\alpha = \partial D_\alpha$, $f(C_\alpha)$ è una curva semplice e chiusa del piano perché f è iniettiva e continua. Dunque $f(C_\alpha)$ è una curva di Jordan e pertanto ogni semiretta uscente da $f(\mathbf{x}_0)$ incontra $f(C_\alpha)$ in almeno un punto (per il teorema di Jordan). Ma $\mathcal{L}(C_\alpha) = 2\pi r \sin \alpha$ e vale

$$\tilde{d}(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) \leq \sigma_2(f) d(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

dunque

$$\mathcal{L}(f(C_\alpha)) \leq 2\pi r \sigma_2(f) \sin \alpha. \quad (4.2)$$

Ogni punto di C_α ha distanza geodetica $r\alpha$ da \mathbf{x}_0 , quindi da

$$\sigma_1(f)d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \tilde{d}(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y}))$$

segue che ogni punto di $f(C_\alpha)$ ha distanza da $f(\mathbf{x}_0)$ maggiore di $\sigma_1(f)r\alpha$.

Se D^* è il disco del piano di raggio $\sigma_1(f)r\alpha$ e centro $f(\mathbf{x}_0)$, allora $f(C_\alpha)$ è fuori di D^* . Dunque

$$\mathcal{L}(f(C_\alpha)) \geq 2\pi\sigma_1(f)r\alpha \quad (4.3)$$

(poiché ogni semiretta uscente da $f(\mathbf{x}_0)$ incontra $f(C_\alpha)$ in almeno un punto).

Anzi si può provare che

$$\mathcal{L}(f(C_\alpha)) = 2\pi\sigma_1(f)r\alpha \quad \Leftrightarrow \quad f(C_\alpha) = \partial D^*.$$

Tenendo conto di (4.2), (4.3) si ha

$$2\pi\sigma_1(f)r\alpha \leq 2\pi\sigma_2(f)r \sin \alpha$$

e dunque

$$\frac{\alpha}{\sin \alpha} \leq \frac{\sigma_2(f)}{\sigma_1(f)}$$

da cui segue la tesi. □

Dai lemmi 4.3.2, 4.3.3 segue il teorema iniziale e, in più,

Teorema 4.3.4 *La distorsione della proiezione azimutale equidistante su D_α è esattamente uguale a $\log \frac{\alpha}{\sin \alpha}$.*

Osservazione 4.3.5 La distorsione della proiezione azimutale è piccola per valori di α piccoli. Infatti asintoticamente si ha per $\alpha \rightarrow 0$:

$$\log \frac{\alpha}{\sin \alpha} \sim -\log \left(\frac{\alpha - \frac{\alpha^3}{6}}{\alpha} \right) = -\log \left(1 - \frac{\alpha^2}{6} \right) \sim \frac{\alpha^2}{6} + o(\alpha^2).$$

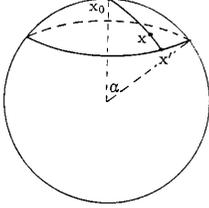
Nota. L'inversa della proiezione azimutale equidistante è quella che in geometria differenziale si chiama *applicazione esponenziale*. Ne segue che f_0 è C^∞ anche in \mathbf{x}_0 .

Dimostriamo ora l'inverso del teorema precedente:

Teorema 4.3.6 *Se $f : D_\alpha \rightarrow E$ è una proiezione con $\delta(f) = \log \frac{\alpha}{\sin \alpha}$ allora f è la proiezione azimutale equidistante.*

Dimostrazione. Se $\delta(f) = \log \frac{\alpha}{\sin \alpha}$, allora, per (4.3), $\mathcal{L}(f(C_\alpha))$ deve essere uguale alla lunghezza della circonferenza C di centro $f(\mathbf{x}_0)$ e di raggio $\sigma_1(f)r\alpha = \sigma_2(f)r \sin \alpha$.

Il teorema di Schönflies ci assicura che $f(D_\alpha)$ deve essere proprio il disco delimitato da C . Ora consideriamo un punto arbitrario $\mathbf{x} \in D_\alpha$ e il segmento di cerchio massimo passante per \mathbf{x}_0 e \mathbf{x} ; questo taglia ∂D_α nel punto \mathbf{x}' .



Se $d = d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})$, allora $d(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = r\alpha - d$ e $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) > r\alpha - d$ per ogni $\mathbf{y} \in C_\alpha$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$.

Usando la disuguaglianza

$$\tilde{d}(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) \geq \sigma_1(f)d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

segue che

- (a) $d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{x}_0)) \geq \sigma_1(f)d$
- (b) $d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{x}')) \geq \sigma_1(f)(r\alpha - d)$
- (c) $\tilde{d}(f(\mathbf{x}), z) \geq \sigma_1(f)(r\alpha - d) \quad \forall z \in f(C_\alpha)$.

Si vede che esiste un solo punto $f(\mathbf{x})$ che verifica (a), (b), (c) e tale punto si trova sul raggio passante per $f(\mathbf{x}_0)$ e $f(\mathbf{x}')$ ad una distanza da $f(\mathbf{x}_0)$ uguale a $\sigma_1(f)d$.

Abbiamo così trovato un modo per costruire f . Dobbiamo provare ora che circonferenze di centro \mathbf{x}_0 sulla sfera hanno come immagine tramite f circonferenze del piano di centro $f(\mathbf{x}_0)$. Verifichiamo che f porta la circonferenza C_α nella circonferenza $f(C_\alpha)$ mediante una similitudine di fattore di proporzionalità $\sigma_2(f)$.

Dividiamo C_α in due curve γ e γ' . Allora

$$\mathcal{L}(\gamma) + \mathcal{L}(\gamma') = \mathcal{L}(C_\alpha) = 2\pi r \sin \alpha.$$

Per la condizione di Lipschitz

$$\mathcal{L}(f(\gamma)) \leq \sigma_2(f)\mathcal{L}(\gamma) \quad \text{e} \quad \mathcal{L}(f(\gamma')) \leq \sigma_2(f)\mathcal{L}(\gamma')$$

dunque

$$\mathcal{L}(f(C_\alpha)) \leq \sigma_2(f)\mathcal{L}(C_\alpha) = \sigma_2(f)(2\pi r \sin \alpha),$$

ma $\mathcal{L}(f(C_\alpha)) = 2\pi\sigma_1(f)r\alpha = 2\pi\sigma_2(f)r \sin \alpha$, quindi tutte le disuguaglianze diventano uguaglianze e si ha la tesi. \square

Torniamo al caso di proiezioni definite su un qualsiasi sottoinsieme U di $\mathbb{S}(r)$.

Lemma 4.3.7 *Se $f : U \rightarrow E$ è una proiezione, allora f si estende in modo unico ad una proiezione $\bar{f} : \bar{U} \rightarrow E$ che ha la stessa distorsione di f .*

Dimostrazione. Ricordiamo che

$$\sigma_1(f)d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \tilde{d}(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) \leq \sigma_2(f)d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (4.4)$$

dunque f è uniformemente continua. Pertanto f si estende in modo unico ad una funzione continua su \overline{U} t.c. valga ancora (4.4). \square

Notazione. Poniamo

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(U) &:= \{f : U \longrightarrow E \mid f \text{ proiezione}\}; \\ \delta_0 &:= \inf\{\delta(f) : f \in \mathcal{P}(U)\}.\end{aligned}$$

Come abbiamo visto, il problema è se sia possibile costruire $f_0 \in \mathcal{P}(U)$ tale che $\delta(f_0) = \delta_0$. Il seguente teorema risponde al quesito:

Teorema 4.3.8 *Per ogni insieme non degenere $U \subset \mathbb{S}(r)$, esiste una proiezione f avente minima distorsione finita se e solo se $\overline{U} \neq \mathbb{S}(r)$.*

Dimostrazione. Se U è finito il teorema è banale. Supponiamo allora che U contenga infiniti punti. Sia $\{f_i\}$ una successione di proiezioni tali che, posto $\delta_i = \delta(f_i)$, risulti

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \delta_i = \delta_0.$$

Supponiamo che $\sigma_2(f_i) = 1$ e che $f_i(U)$ contenga l'origine e sia $f_i(\mathbf{x}) = 0$. Sia ora $U' = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n, \dots\}$ un insieme numerabile denso in U . Poiché per ogni $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbb{S}(r)$ vale $d(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) \leq \pi r$ si ha

$$\tilde{d}(f_i(\mathbf{x}_j), 0) \leq \sigma_2(f_i)d(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}) = d(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}) \leq \pi r.$$

Quindi esiste $\{f_{i_1}\}$ successione estratta da $\{f_i\}$ tale che $\{f_{i_1}(\mathbf{x}_1)\}$ converge ad un elemento \mathbf{a}_1 di E . Analogamente, esiste $\{f_{i_2}\}$ successione estratta da $\{f_{i_1}\}$ tale che $\{f_{i_2}(\mathbf{x}_2)\}$ converge ad un elemento \mathbf{a}_2 di E . Procedendo così si ha che per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste $\{f_{i_{k+1}}\}$ successione estratta da $\{f_{i_k}\}$ tale che $\{f_{i_{k+1}}(\mathbf{x}_{k+1})\}$ converge ad un elemento \mathbf{a}_k di E .

Definiamo

$$f : U' \longrightarrow E, \quad \mathbf{x}_k \mapsto \mathbf{a}_k.$$

Per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U'$ si ha

$$\sigma_1(f)d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \tilde{d}(f_i(\mathbf{x}), f_i(\mathbf{y})) \leq \sigma_2(f)d(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

da cui, ricordando che $\sigma_1 = \sigma_2 e^{-\delta_i}$,

$$e^{-\delta_i} d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \tilde{d}(f_i(\mathbf{x}), f_i(\mathbf{y})) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Passando al limite per $i \rightarrow \infty$ si ottiene

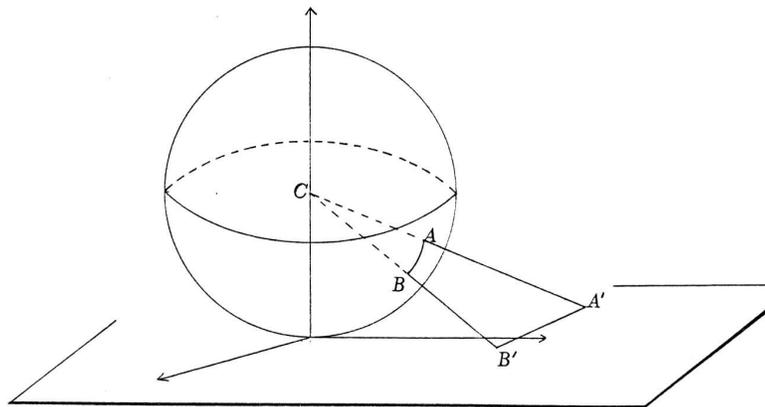
$$e^{-\delta_0} d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \tilde{d}(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Ne segue che f ha distorsione δ_0 . Definendo f_0 come l'estensione di f a $\overline{U'}$, per il lemma precedente si ha la tesi. Viceversa, se $\overline{U} = \mathbb{S}(r)$, sempre per il lemma precedente segue che una proiezione su U si dovrebbe estendere a $\mathbb{S}(r)$ e dunque si avrebbe un omeomorfismo tra $\mathbb{S}(r)$ e un sottoinsieme di E . \square

4.4 Altre proiezioni interessanti

4.4.1 La proiezione gnomonica

Con questa proiezione si proietta una semisfera dal centro sul piano tangente al polo sud.



Si vede subito che nella proiezione gnomonica² alle geodetiche sulla sfera corrispondono rette del piano e viceversa.

Troviamo l'equazione analitica della $f : \mathbb{S}_C(r) \rightarrow E$ che realizza tale proiezione. Le equazioni di $\mathbb{S}_C(r)$ sono

$$\begin{cases} x = r \cos \phi \cos \theta \\ y = r \sin \phi \cos \theta \\ z = r \sin \theta + r \end{cases}$$

dove ϕ e θ sono rispettivamente la longitudine e la latitudine di un punto sulla sfera. Il centro C di $\mathbb{S}_C(r)$ ha coordinate $(0, 0, r)$.

La retta per $P(x, y, z)$ e $C(0, 0, r)$ è descritta da

$$Q = \lambda C + (1 - \lambda)P.$$

Imponendo che $Q(u, v, w)$ abbia l'ultima coordinata nulla, cioè che Q appartenga al piano di equazione $z = 0$, si ha

$$\begin{cases} u = (1 - \lambda)x \\ v = (1 - \lambda)y \\ 0 = w = \lambda r + (1 - \lambda)z \end{cases} .$$

²Tale proiezione è così detta perché connessa al metodo di costruzione delle meridiane per mezzo di uno *gnomone*.

Dall'ultima equazione si trova $\lambda = \frac{1 + \sin \theta}{\sin \theta}$; sostituendo nelle prime due si ottiene

$$u = -r \cos \phi \cot \theta \quad \text{e} \quad v = -r \sin \phi \cot \theta.$$

Usando nel piano $z = 0$ le coordinate polari $(\tilde{\rho}, \tilde{\phi})$ si ha

$$\tilde{\rho} \cos \tilde{\phi} = -r \cos \phi \cot \theta \quad \text{e} \quad \tilde{\rho} \sin \tilde{\phi} = -r \sin \phi \cot \theta$$

da cui

$$\tilde{\rho}^2 = r^2 \cot^2 \theta \quad \text{e} \quad \tan \tilde{\phi} = \tan \phi$$

cioè

$$\tilde{\rho} = -r \cot \theta \quad \text{e} \quad \tilde{\phi} = \phi.$$

Quindi

$$d\tilde{s}^2 = \tilde{\rho}^2 d\tilde{\phi}^2 + d\tilde{\rho}^2 = r^2 \cot^2 \theta d\phi^2 + \frac{r^2}{\sin^4 \theta} d\theta^2.$$

La carta gnomonica non è né conforme né equivalente, ma come abbiamo detto prima conserva le geodetiche. Poichè le geodetiche in cartografia sono chiamate *curve ortodromiche* (= a corso dritto), le proiezioni che conservano le geodetiche sono anche dette ortodromiche.

4.4.2 La proiezione cilindrica della sfera

Rappresentiamo la sfera tramite le coordinate geografiche (ϕ, θ) e il cilindro \mathbf{C} tramite quelle cilindriche $(\bar{\phi}, \bar{h})$. L'equazione del cilindro sarà allora

$$\begin{cases} \bar{x} = r \cos \bar{\phi} \\ \bar{y} = r \sin \bar{\phi} \\ \bar{z} = \bar{h} \end{cases}$$

mentre quella della sfera sarà al solito

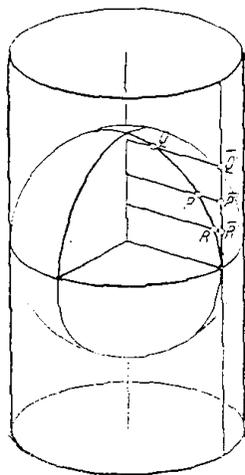
$$\begin{cases} x = r \cos \phi \cos \theta \\ y = r \sin \phi \cos \theta \\ z = r \sin \theta \end{cases}.$$

La proiezione cilindrica della sfera è l'applicazione

$$f : \mathbb{S}(r) \longrightarrow \mathbf{C}, (x, y, z) \mapsto (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$$

dove $\bar{x} = r \cos \phi$, $\bar{y} = r \sin \phi$, $\bar{z} = r \sin \theta$.

Si osservi che al polo nord e al polo sud corrispondono non singoli punti, ma intere circonferenze.



Proviamo che f è equivalente. Valgono

$$ds^2 = r^2 \cos^2 \theta d\phi^2 + r^2 d\theta^2;$$

$$E = r^2 \cos^2 \theta; \quad F = 0; \quad G = r^2$$

sulla sfera;

$$d\bar{s}^2 = r^2 d\phi^2 + r^2 \cos^2 \theta d\theta^2;$$

$$\bar{E} = r^2; \quad \bar{F} = 0; \quad \bar{G} = r^2 \cos^2 \theta$$

sul cilindro. Dunque

$$EG - F^2 = \bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2 = r^4 \cos^2 \theta,$$

$$d\sigma = d\bar{\sigma} = r^2 \cos \theta d\phi d\theta.$$

4.4.3 La proiezione classica di Mercatore

Si tratta ancora di una corrispondenza tra sfera e cilindro, nella quale meridiani e paralleli della sfera si mutano nelle generatrici e nei cerchi sezioni rette del cilindro, con la condizione ulteriore che la corrispondenza risulti conforme. Si tratta cioè di trovare una applicazione

$$g : (\phi, \theta) \mapsto (\phi, V(\theta)) = (\bar{\phi}, \bar{h})$$

dove V è una funzione da determinare in modo che g sia conforme. Ora, come nell'esempio precedente,

$$ds^2 = r^2(\cos^2 \theta d\phi^2 + d\theta^2)$$

$$d\bar{s}^2 = r^2 d\phi^2 + V'(\theta)^2 d\theta^2.$$

Imponendo la condizione

$$d\bar{s}^2 = \lambda(\phi, \theta) ds^2$$

si ha

$$\begin{cases} r^2 = \lambda(\phi, \theta) r^2 \cos^2 \theta \\ V'(\theta)^2 = \lambda(\phi, \theta) r^2 \end{cases}$$

da cui $V'(\theta) = \pm \frac{r}{\cos \theta}$.

Scelto il segno positivo e assunto $V(0) = 0$ (il che equivale a richiedere che all'equatore della sfera corrisponda la circonferenza centrale del cilindro) si ha

$$V(\theta) = \int_0^\theta \frac{r dx}{\cos x} = r \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+\theta} \frac{dy}{\sin y}$$

avendo posto $y = x + \frac{\pi}{2}$.

Ricordando che

$$\int \frac{dy}{\sin y} = \log \left| \tan \frac{x}{2} \right| + c$$

si ha

$$V(\theta) = r \log \left| \tan \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| = r \log \left(\tan \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right)$$

poiché per $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ si ha che $\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$.

Inoltre

$$\begin{aligned} V(-\theta) &= r \log \left(\tan \left(-\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right) = r \log \left(\cot \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right) = \\ &= -r \log \left(\tan \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right) = -V(\theta). \end{aligned}$$

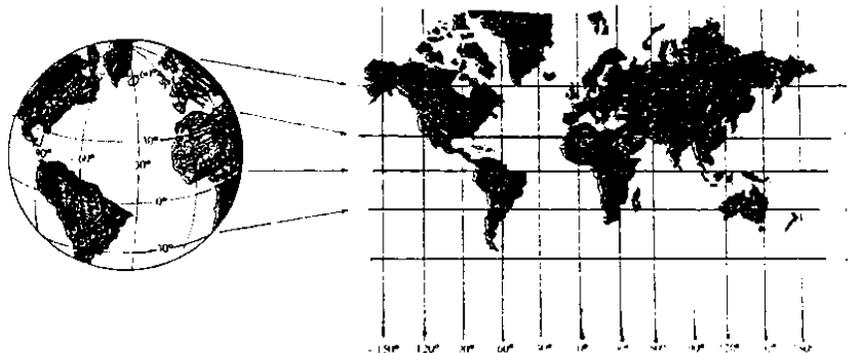
Quindi la corrispondenza così ottenuta è simmetrica rispetto al piano xy e l'intera sfera corrisponde alla superficie cilindrica indefinita poiché risulta

$$\lim_{\theta \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}} V(\theta) = \pm \infty.$$

Distendendo il cilindro su di un piano si passa alla proiezione piana di Mercatore descritta da

$$\bar{\phi} = \phi \quad V(\theta) = r \log \left(\tan \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right).$$

I paralleli si trasformano in segmenti di lunghezza uguale all'equatore $2\pi r$, mentre i meridiani diventano rette parallele, ortogonali ai segmenti piani considerati.



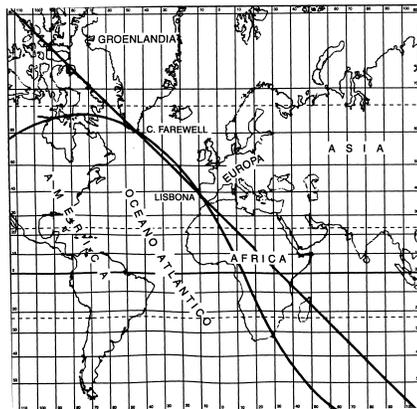
Poiché l'applicazione è conforme, allora la traiettoria d'una nave o di un aereo che segua una rotta costante è una retta della carta e quindi si può tracciare con una riga. Sulla sfera, queste traiettorie (cioè le curve che fanno un angolo costante con tutti i meridiani) sono chiamate *lossodromiche* (= a corso obliquo). Sulla carta esse hanno equazione

$$\bar{\phi} = \alpha \bar{h} + \beta$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, quindi sulla sfera

$$\phi = \alpha \log \left(\tan \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right) + \beta.$$

La lossodromica non è la più breve distanza tra due punti, ma per piccole distanze non si distingue molto da una geodetica e ha il valore pratico di essere un percorso che non richiede continue variazioni dell'angolo di rotta. Per lunghe distanze, in genere, la geodetica viene spezzata in lossodromiche più brevi su una carta di Mercatore per ridurre al minimo i mutamenti nella determinazione della rotta.



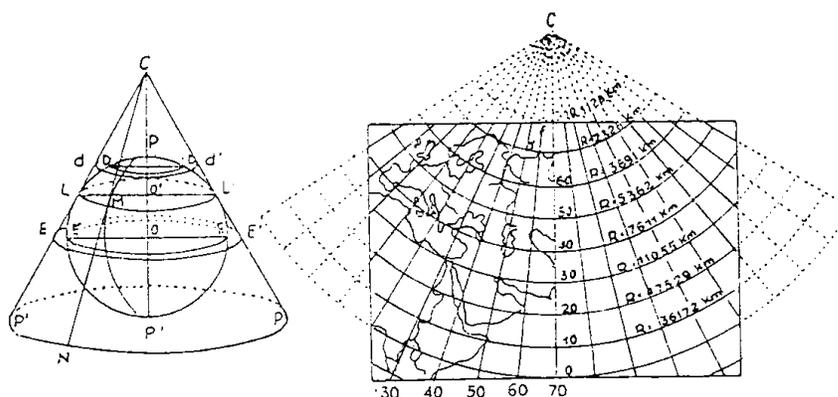
Osservazione 4.4.1 Le carte conformi, che sono la maggior parte di quelle utilizzate, non sono dei ripieghi. La ragione è questa: in $P \in A$, se (A, f) è conforme, le lunghezze vengono moltiplicate infinitesimalmente per un fattore di proporzionalità $k(P)$ che dipende solo da P e non dalle direzioni tangenti in P .

Poiché praticamente si lavora spesso in domini molto piccoli A di \mathbb{S} , se la carta non è troppo deformante, il coefficiente k varierà di poco in un piccolo dominio di A e si potrà quindi con un'approssimazione sufficiente, calcolare le lunghezze e le aree con metodi correttivi.

La carta di Mercatore classica è una vera catastrofe per il coefficiente k quando ci si avvicina ai poli, poiché esso tende all'infinito e dunque varia di molto.

I problemi di distanza e di area sono dunque praticamente irrisolvibili con buona precisione: al contrario la carta di Mercatore classica è eccellente in vicinanza dell'equatore, poiché il coefficiente k ammette un minimo e varia poco nelle vicinanze del minimo. Ma ogni punto può diventare un punto di un "equatore" opportuno. In genere si considera il meridiano passante per il punto e poi il cilindro tangente alla sfera lungo il meridiano considerato, ottenendo la proiezione trasversa di Mercatore. Prima chiamata di Gauss, ora detta MTU (Mercator Transversal Universal), è adottata da molti stati tra cui l'Italia per le carte topografiche a larga scala. La superficie cilindrica su cui viene trasferito il reticolato dei meridiani e dei paralleli avvolge l'ellissoide in modo tale da essere tangente al meridiano centrale dell'area limitata che si vuole rappresentare; di solito non più di 3° di longitudine a ovest e a est del meridiano centrale.

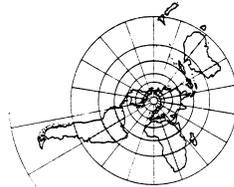
Esistono numerosi altri tipi di proiezioni. Per esempio si può proiettare la sfera su di un cono tangente lungo un parallelo fissato e poi sviluppare il cono sul piano chiedendo ad esempio che la proiezione sia conforme (proiezione di Lambert).



Come abbiamo visto ogni proiezione presenta vantaggi e svantaggi che variano in generale con le latitudini delle regioni da rappresentare; queste difficoltà hanno generato numerose idee originali, esempi delle quali sono le carte che riportiamo nelle pagine seguenti.

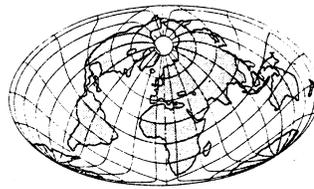


Projection de Lorgna transverse étendue à 360°
(transformation d'Hammer-Aitoff)



Extrapolation de la projection stéréographique
(aspect direct)

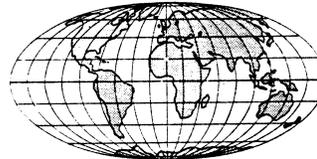
da R.Cuenin, *Cartographie générale*, t.I, Eyrolles



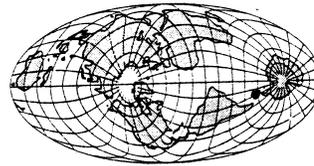
Projection de Briesemeister



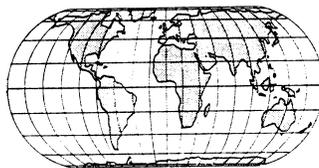
Projection de Sanson-Flamsteed



Projection de Mollweide



Projection « Atlantis » de Bartholomew

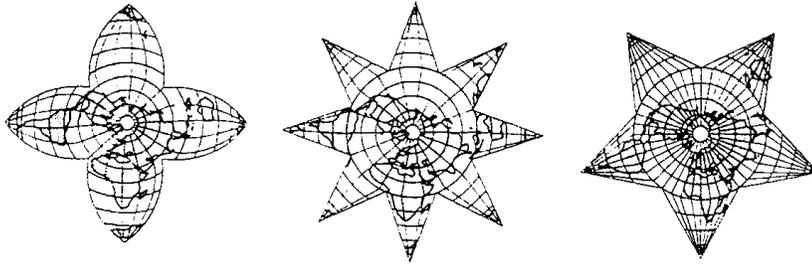


Projection d'Eckert IV

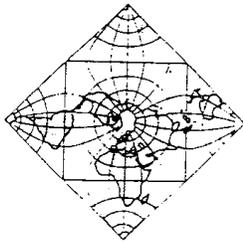


Projection « amardillo » de Raiz

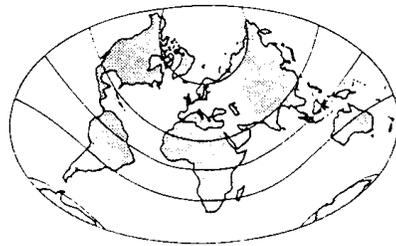
da R.Cuenin, *Cartographie générale*, t.I, Eyrolles



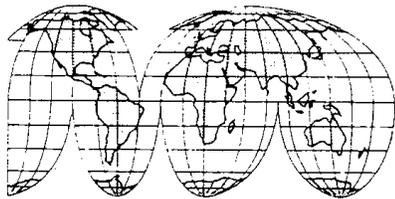
Projections étoilées



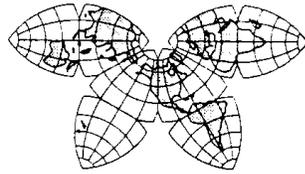
Projection périodique de Peirce



Projection compensée de Bertin



Projection interrompue de Goode



Projection interrompue de Cahill

da R.Cuenin, *Cartographie générale*, t.I, Eyrolles

4.5 Note storiche

Compito essenziale della Geografia (scientifica) è stato sempre quello di dare una rappresentazione cartografica di tutto il mondo conosciuto, anche quando la Terra era considerata un disco, come nel periodo della Geografia ionica. Quando poi si diffuse la dottrina della sfericità terrestre, che appare consolidata già al tempo di Platone, altri problemi basilari si aggiunsero: la determinazione delle dimensioni del globo e, più tardi, lo studio per rappresentare il globo su di un piano ([A]).

Le carte più antiche erano eseguite in maniera approssimativa riportando sul disegno le località rispettando, per quanto possibile, la loro posizione relativa e le reciproche distanze. Ciò indica che non si conosceva ancora un modo per assegnare una posizione assoluta dei punti rispetto alla superficie terrestre. Un grande passo in avanti in questa direzione fu compiuto da Dicearco da Messina (IV sec. a.C.), che può essere considerato come l'ideatore del reticolato geografico. Egli comprese che per individuare sulla carta le posizioni dei singoli punti era necessario riferirle a linee determinate. L'idea di Dicearco fu ripresa e sviluppata circa un secolo dopo da Eratostene di Cirene (273-193 a.C.), che aumentando le linee di riferimento sulla carta e basandosi sulle notizie fornite dai viaggiatori (come la lunghezza del giorno, l'identità di vegetazione, ecc.) arrivò ad una rappresentazione dell'ecumene (cioè della terra abitata) notevolmente progredita. La carta di Eratostene, che adombrava già gli elementi di una proiezione cilindrica è andata perduta, ma gli elementi rimasti consentono di ricostruirla nelle linee più generali, sebbene tra gli studiosi non vi sia accordo (Fig.1). Notiamo comunque che in tale carta le linee di riferimento erano poste a distanze disuguali.



Fig.1

Il problema della determinazione del punto e delle sue coordinate fu completamente risolto dal grande astronomo Ipparco di Nicea (II sec. a.C.). Egli,

contrariamente ad Eratostene, determinò la posizione dei punti sulla terra basandosi esclusivamente su metodi astronomici: trovò la latitudine con l'altezza degli astri misurata con lo gnomone e la longitudine valendosi delle differenze di ora osservate in occasione di eclissi (bisognerà aspettare la metà del '700 per poter misurare la longitudine accuratamente senza l'uso di complicati strumenti astronomici, cfr. [So]). Ipparco propose inoltre che nelle carte geografiche le linee di riferimento fossero equidistanti. Si introdusse così nelle carte geografiche quel carattere geometrico che è particolarmente evidente nel mappamondo di Claudio Tolomeo (II sec. a.C.), il solo che ci sia pervenuto dall'antichità e che è basato su un metodo matematico per la rappresentazione della terra: una lunga serie di dati di longitudine e di latitudine segnati su di una rete in proiezione conica, con paralleli circolari e meridiani convergenti verso i poli (Fig.2).

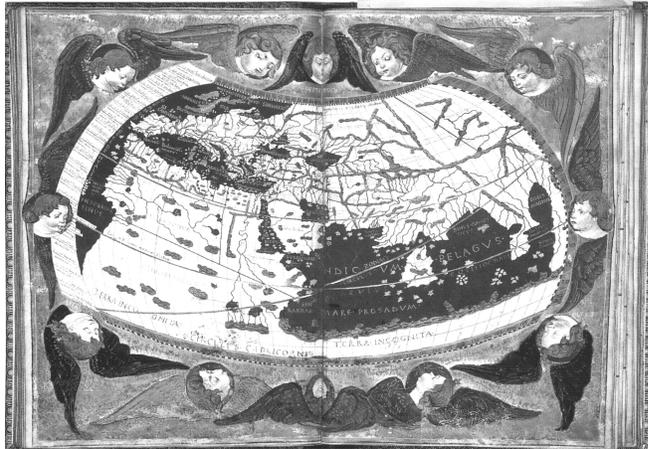


Fig.2

Riproduzione del mappamondo di Tolomeo di Nicolas Germanus, 1465-1470 circa

Al contrario della cartografia greca, che ebbe soprattutto carattere scientifico, la cartografia romana realizzò essenzialmente carte itinerarie per i mercanti, i funzionari e l'esercito, perseguì cioè scopi pratici.

Nel Medioevo, analogamente alle altre scienze, anche la geografia e la cartografia decadde molto. Tra l'altro nel mondo occidentale scomparve l'opera di Tolomeo, diffusa invece in Oriente dagli Arabi. "Le rappresentazioni del mondo dell'alto Medioevo erano in accordo con le Sacre Scritture. Potevano essere rettangolari per accordarsi con Isaia 11:12 o con l'Apocalisse 7:1, dove si parla dei "quattro angoli della terra", oppure ovali o circolari per accordarsi con Isaia 40:22 dove si parla del "circolo della terra". Ovviamente non vi era alcun bisogno di meridiani e di paralleli. Gerusalemme era esattamente al centro in

accordo con Ezechiele 5:5. La parte superiore della carta era orientata verso Est e comprendeva la collocazione del Paradiso terrestre. Le terre emerse erano circondate dalle “grandi acque” che un tempo avevano inondato la Terra e dalle sorgenti dei “quattro venti” (Daniele 7:2, Apocalisse 7:1) che soffiavano capricciosi intorno alla Città Santa.”([G]).

Nel periodo rinascimentale, la comparsa in Italia della versione latina della “Geografia” di Tolomeo (che si diffuse rapidamente nel mondo occidentale), il maggior numero di viaggi e di esplorazioni, le imprese dei navigatori, diedero nuovo impulso alla cartografia e fecero rinascere il vecchio problema della rappresentazione della superficie sferica della Terra sul piano tramite quei procedimenti geometrici detti proiezioni. È da ricordare, a tale proposito, l’opera “Breve compendio de la sphaera y de la arte de navigar”, scritta dallo spagnolo Martin Cortés nella prima metà del ‘500 ed adottata come libro di testo nella famosa scuola per piloti e navigatori di Siviglia. Il titolo stesso del libro conferma la tendenza, propria del XVI secolo, ad identificare la matematica con l’arte della navigazione (cfr. [Y]).

I paesi più attivi nel ‘500 e nel ‘600 sono l’Italia e l’Olanda. In Olanda in particolare operò Gerardo Kremer (1512-94), detto Mercatore che “inventò” la proiezione che porta il suo nome. Egli spiegò nel seguente modo i principi sulla base dei quali fu disegnata la sua carta:

Eseguendo questa rappresentazione del mondo abbiamo tentato di usare una nuova proporzione ed una nuova correlazione dei meridiani con i paralleli. Abbiamo aumentato progressivamente i gradi di latitudine verso ciascun polo in proporzione all’allungamento dei paralleli rispetto all’equatore.

Mercatore è autore della più omogenea ed elaborata raccolta di carte di tutto il mondo (pubblicata tuttavia integralmente solo dopo la sua morte), la prima che rechi il titolo, divenuto poi d’uso generale, di Atlante (*Atlas*). L’Atlas di Mercatore si presenta come un’elaborazione originale del vasto materiale cartografico allora in circolazione, e si venne poi ampliando in successive edizioni a cura dei continuatori del grande cartografo; essa è preceduta da una serie di considerazioni sui problemi generali del Cosmo e della Terra (*Cosmographicae meditationes de fabrica mundi et fabricati figura*) che è opera personale del Mercatore; le singole carte sono sempre corredate di un breve testo o commentario illustrativo.

I primi del ‘700 chiusero l’era della cartografia empirica praticata sino ad allora e diedero inizio alla cartografia scientifica, che si fonda sulla determinazione astronomica della posizione dei punti fondamentali, sulla triangolazione e sullo sviluppo sul piano della superficie terrestre mediante precisi procedimenti matematici volti a ridurre al minimo le inevitabili alterazioni. La tecnica della triangolazione, introdotta da W.Snellius van Roijen (1617) per motivi puramente di Geodesia, ha avuto poi enorme importanza in Geometria. Infatti l’idea che

triangolazioni sempre più fini permettessero di ricostruire la “forma” della terra, ha suggerito di approssimare ogni superficie (compatta) mediante poliedri. È stata questa l’idea guida che ha portato H. Poincaré (1859-1912) alla Topologia combinatoria.

Dopo la seconda guerra mondiale le tecniche cartografiche hanno subito una rivoluzione. I rilevamenti aerei, la misurazione elettronica delle distanze per mezzo di fasci laser e della luce, la fotogrammetria hanno permesso una rappresentazione cartografica molto accurata, non solo dal punto di vista geometrico, della maggior parte della superficie terrestre.