

## Capitolo 3

# La proiezione stereografica

### 3.1 Definizione e proprietà

Consideriamo la sfera in  $\mathbb{R}^3$ :

$$\mathbb{S} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

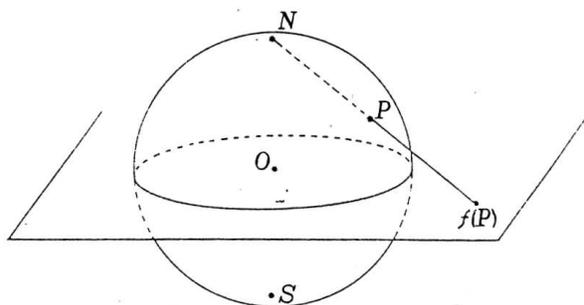
Si chiama *proiezione stereografica dal polo nord sul piano equatoriale*, che identifichiamo con  $\mathbb{R}^2$ , l'applicazione

$$f : \mathbb{S} - \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

tale che se  $P$  è un punto di  $\mathbb{S}$  allora  $N, P, f(P)$  sono allineati. Troviamone l'espressione. Se  $\tilde{P}(u, v, w)$  è un punto allineato con  $N$  e  $P(x, y, z)$  si ha

$$\tilde{P} = \lambda N + (1 - \lambda)P \tag{3.1}$$

per un opportuno  $\lambda$  reale.



Imponendo che  $\tilde{P}$  appartenga a  $\mathbb{R}^2$  ed esplicitando (3.1) si ha

$$\begin{aligned} u &= \lambda \cdot 0 + (1 - \lambda)x = (1 - \lambda)x \\ v &= \lambda \cdot 0 + (1 - \lambda)y = (1 - \lambda)y \\ 0 = w &= \lambda \cdot 1 + (1 - \lambda)z. \end{aligned}$$

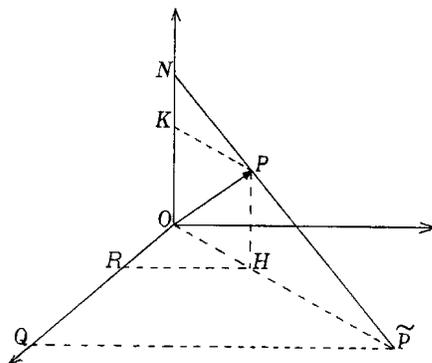
Dall'ultima uguaglianza si ottiene  $\lambda = z/(z - 1)$  e sostituendo nelle prime due si ha che  $f : (x, y, z) \mapsto (u, v)$  dove

$$u = \frac{x}{1 - z} \quad \text{e} \quad v = \frac{y}{1 - z}. \quad (3.2)$$

Notiamo che si può ottenere lo stesso risultato osservando che vale

$$u : x = v : y = O\tilde{P} : OH = ON : NK = 1 : (1 - z)$$

per la similitudine tra i triangoli  $ON\tilde{P}$  e  $NKP$  e tra i triangoli  $OQ\tilde{P}$  e  $ORH$ .



Se sostituiamo le espressioni (3.2) in  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  si hanno

$$\begin{cases} x = \frac{2u}{u^2 + v^2 + 1} \\ y = \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1} \\ z = \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \end{cases} \quad (3.3)$$

che possono essere considerate come equazioni parametriche (razionali) della sfera.

Notiamo che le equazioni precedenti individuano trasformazioni quadratiche.

**Proprietà 3.1.1** *La proiezione stereografica trasforma circonferenze della sfera in circonferenze o rette del piano equatoriale.*

**Dimostrazione.** Sia  $C$  una circonferenza della sfera con rappresentazione analitica

$$C : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1; \\ ax + by + cz + d = 0 \end{cases} . \quad (3.4)$$

Sostituendo le espressioni trovate per  $x, y, z$  nella seconda delle (3.4) si ottiene

$$2au + 2bv + c(u^2 + v^2 - 1) + d(u^2 + v^2 + 1) = 0$$

che può essere riscritta

$$(c + d)(u^2 + v^2) + 2au + 2bv + d - c = 0. \quad (3.5)$$

Osserviamo che il piano di equazione  $ax + by + cz + d = 0$  passa per il polo nord se e solo se  $d = -c$ , come si può vedere facilmente sostituendo le coordinate di  $N$  nell'equazione del piano. Ne segue che se il piano non passa per  $N$  la (3.5) è l'equazione di una circonferenza del piano equatoriale, altrimenti è l'equazione di una retta.  $\square$

**Osservazione 3.1.2** Si può vedere anche che  $f^{-1}$ , la cui espressione è data ovviamente dalle (3.3), trasforma circonferenze del piano equatoriale in circonferenze della sfera. Infatti, data una circonferenza  $\tilde{C}$  del piano equatoriale di equazione

$$u^2 + v^2 + 2au + 2bv + d = 0;$$

tenendo conto delle (3.2) si ha

$$\frac{x^2}{(1-z)^2} + \frac{y^2}{(1-z)^2} + \frac{2ax}{1-z} + \frac{2by}{1-z} + d = 0$$

che può scriversi

$$x^2 + y^2 + 2ax(1-z) + 2by(1-z) + d(1-z)^2 = 0,$$

la quale è l'equazione del cono di vertice  $N$  passante per  $\tilde{C}$ .

Le coordinate dei punti appartenenti all'intersezione di tale cono con  $\mathbb{S}$  sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2ax(1-z) + 2by(1-z) + d(1-z)^2 = 0; \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

che può essere scritto

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2ax(1-z) + 2by(1-z) + d(1-z)^2 = 0; \\ x^2 + y^2 = (1-z)(1+z) \end{cases} .$$

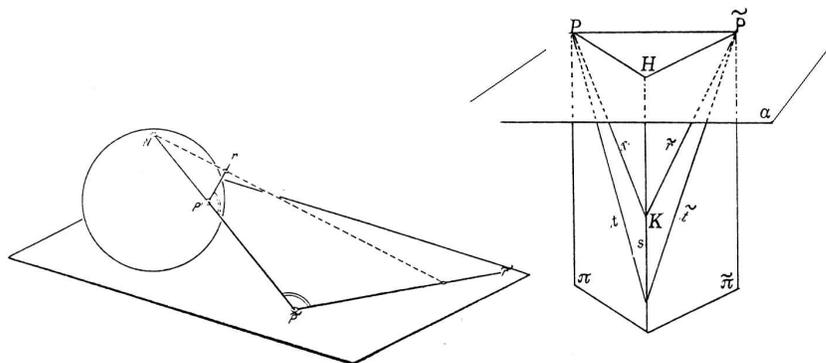
Il sistema precedente è equivalente ai seguenti

$$\begin{cases} 1 - z = 0; \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} 1 + z + 2ax + 2by + d(1 - z) = 0; \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1. \end{cases}$$

Il primo ha come soluzione  $N$  contato due volte, mentre il secondo individua una circonferenza di  $\mathbb{S}$ .

**Proprietà 3.1.3** *La proiezione stereografica è isogonale (i.e. conserva gli angoli).*

**Dimostrazione.** Sia  $P$  un punto di  $\mathbb{S}$  diverso dal polo nord e sia  $\tilde{P}$  l'immagine di  $P$  tramite la proiezione stereografica. Premettiamo che il piano  $\nu$ , tangente ad  $\mathbb{S}$  nel polo nord, ed il piano  $\pi$  tangente a  $\mathbb{S}$  in  $P$ , formano angoli uguali con la retta passante per  $NP$ . Inoltre  $\nu \cap \pi$  è una retta perpendicolare a  $NP$ . Naturalmente, poiché il piano  $\tilde{\pi}$  su cui proiettiamo è parallelo a  $\nu$ , si ha che  $\pi$  e  $\tilde{\pi}$  formano angoli uguali con la retta passante per  $P\tilde{P}$ .



Quindi chiamando  $\alpha$  il piano ortogonale a  $s = \pi \cap \tilde{\pi}$  e passante per  $P\tilde{P}$ , risulta  $\widehat{HPP} = \widehat{H\tilde{P}P}$ .

Se  $r$  e  $\tilde{r}$  sono due rette ottenute segnando  $\pi$  e  $\tilde{\pi}$  con un piano passante per  $P\tilde{P}$  si ha anche  $\widehat{PPK} = \widehat{K\tilde{P}P}$ . Da qui segue che se  $r$  è una retta tangente a  $\mathbb{S}$  in  $P$  e  $\tilde{r}$  è l'immagine di  $r$  secondo la proiezione stereografica, allora  $r$  e  $\tilde{r}$  formano angoli uguali con  $P\tilde{P}$ . Se  $t$  è un'altra tangente alla sfera in  $P$  e  $\tilde{t}$  è la sua immagine, allora  $\widehat{rt} = \widehat{\tilde{r}\tilde{t}}$ .  $\square$

### 3.2 Generalizzazioni

Come nel caso della sfera di  $\mathbb{R}^3$  possiamo definire in  $\mathbb{R}^{n+1}$  la proiezione stereografica dal polo nord di  $\mathbb{S}^n$ . Identifichiamo  $\mathbb{R}^{n+1}$  con  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ . Allora

possiamo pensare un punto di  $\mathbb{R}^{n+1}$  come una coppia  $(\xi, \eta)$  con  $\xi \in \mathbb{R}^n$  e  $\eta \in \mathbb{R}$ . Un punto  $P(\xi, \eta)$  appartiene a  $\mathbb{S}^n$  se e solo se  $\|\xi\|^2 + \eta^2 = 1$ .

Si chiama proiezione stereografica dal polo nord l'applicazione

$$f : \mathbb{S}^n - \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

tale che  $N, P, f(P)$  siano allineati per ogni  $P \in \mathbb{S}^n - \{N\}$ . Troviamone l'espressione. Se  $Q$  è un punto allineato con  $N(0, 1)$  e  $P(\xi, \eta)$  si ha

$$Q = \lambda N + (1 - \lambda)P.$$

Imponendo che  $Q$  appartenga a  $\mathbb{R}^n$  si ha  $Q = (\tilde{\xi}, 0)$ , cioè

$$\tilde{\xi} = \lambda \cdot 0 + (1 - \lambda)\xi = (1 - \lambda)\xi; \quad 0 = \lambda \cdot 1 + (1 - \lambda)\eta.$$

Dall'ultima si ottiene  $\lambda = \frac{\eta}{\eta - 1}$  e quindi

$$f : (\xi, \eta) \longmapsto \frac{1}{1 - \eta}\xi.$$

Si vede poi che

$$f^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n, \quad \xi' \longmapsto \left( \frac{2\xi'}{\|\xi'\|^2 + 1}, \frac{\|\xi'\|^2 - 1}{\|\xi'\|^2 + 1} \right).$$

Infatti, posto  $\xi' = \frac{\xi}{1 - \eta}$ , si ha  $\xi = \xi'(1 - \eta)$  e quindi  $\|\xi\|^2 = \|\xi'\|^2(1 - \eta)^2$ .

Ma  $\|\xi\|^2 + \eta^2 = 1$ , dunque

$$\eta^2(\|\xi'\|^2 + 1) - 2\eta\|\xi'\|^2 + \|\xi'\|^2(1 - \eta)^2 - 1 = 0$$

da cui, risolvendo l'equazione, si ha  $\eta = 1$  o  $\eta = \frac{\|\xi'\|^2 - 1}{\|\xi'\|^2 + 1}$ . La soluzione  $\eta = 1$  si esclude, dunque si ha la tesi.

**Osservazione 3.2.1** Le applicazioni  $f, f^{-1}$  sono biunivoche e continue, anzi  $C^\infty$ , il che prova che  $\mathbb{S}^n - \{N\}$  è diffeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ .

La proiezione stereografica mostra anche che  $\mathbb{R}^n$  si può “compattificare” (seguendo Alexandroff) mediante l'aggiunta di un solo punto (detto *punto improprio*), cioè

$$\mathbb{S}^n \cong \mathbb{R}^n \cup \{\infty\} = \overline{\mathbb{R}^n}.$$

Inoltre

$$\mathbb{S}^1 \cong \overline{\mathbb{R}} \cong P^1(\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad \mathbb{S}^2 \cong \overline{\mathbb{C}} \cong P^1(\mathbb{C}).$$

Più in generale, se  $P$  è un punto di  $\mathbb{S}^n(r)$  ed  $H$  un iperpiano parallelo all'iperpiano tangente a  $\mathbb{S}^n(r)$  in  $P$  e differente da questo iperpiano, si chiama *proiezione stereografica* di  $\mathbb{S}^n(r)$  l'applicazione

$$f : \mathbb{S}^n(r) - \{P\} \longrightarrow H$$

tale che, se  $Q \in \mathbb{S}^n(r) - \{P\}$ ,  $P$ ,  $Q$  e  $f(Q)$  sono allineati.

Usualmente si considera  $H$  passante per il centro di  $\mathbb{S}^n(r)$  oppure  $H$  tangente nel punto antipodale di  $P$ .

Si può dimostrare che ogni proiezione stereografica conserva gli angoli e trasforma le  $(n-1)$ -sfere piccole di  $\mathbb{S}^n(r) - \{P\}$  in sfere di  $H$ . Abbiamo visto le precedenti affermazioni nel caso  $n = 2$ .

### 3.3 Proiezione stereografica ed inversione rispetto ad una circonferenza

Considerata una circonferenza di centro  $O$  e raggio  $r$ , chiamasi *inversione rispetto ad una circonferenza* l'applicazione

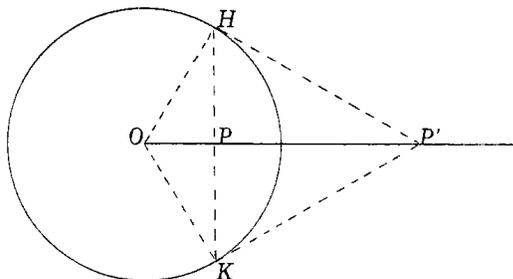
$$\iota : \mathbb{R}^2 - \{O\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

che a  $P$  associa il punto  $P'$  della semiretta  $OP$  tale che risulti

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2.$$

Al punto  $O$  per convenzione si associa la retta impropria del piano. Esso è chiamato *polo* e  $r^2$  è chiamato la *potenza*. Evidentemente se il punto  $P$  è interno (risp. esterno) al cerchio fondamentale, il punto  $P'$  è esterno (risp. interno), mentre, se  $P$  è sulla circonferenza,  $P \equiv P'$ .

L'inversione si può costruire geometricamente come segue:



sia  $P$  interno al cerchio fondamentale; consideriamo da  $P$  la perpendicolare alla retta  $OP$ , sino ad incontrare la circonferenza in  $H$  e  $K$ ; le tangenti alla circonferenza in  $H$  e  $K$  si incontrano nel punto corrispondente, poiché applicando il

primo teorema di Euclide si ha  $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = \overline{OH}^2 = r^2$ . Se invece il punto  $P$  è esterno, basta condurre da esso le tangenti alla circonferenza fondamentale e congiungere i loro punti di contatto; tale congiungente incontra  $OP$  nel punto corrispondente  $P'$ .

Usando le coordinate cartesiane, se  $P(u, v)$  e  $P'(u', v')$ , si vede facilmente che l'inversione è rappresentata dalle equazioni

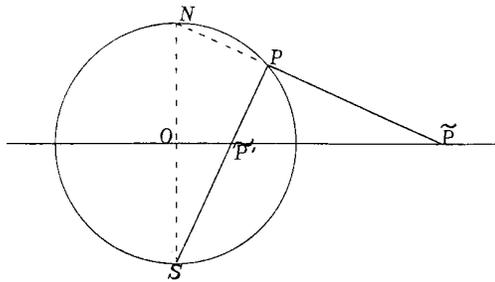
$$u' = \frac{ur^2}{u^2 + v^2}, \quad v' = \frac{vr^2}{u^2 + v^2}.$$

**Teorema 3.3.1** *Se  $f$  (risp.  $g$ ) è la proiezione stereografica dal polo nord (risp. dal polo sud) di  $\mathbb{S}$  su  $\mathbb{R}^2$ , allora*

$$g \circ f^{-1} : \mathbb{R}^2 - \{O\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

è l'inversione del piano di polo  $O$  e potenza 1.

**Dimostrazione.**



Dalla figura, tenendo conto della similitudine dei triangoli  $OSP\tilde{}$  e  $NOP\tilde{}$ , segue

$$\overline{OP\tilde{}} : \overline{OS} = \overline{NO} : \overline{OP}$$

da cui la conclusione poiché  $\overline{OS} = \overline{NO} = r$ .  $\square$

### 3.4 Proiezione stereografica e numeri complessi

Se ad ogni punto  $(u, v)$  del piano associamo il numero complesso  $\zeta = u + iv$ , le equazioni dell'inversione (per  $r = 1$ ) si possono porre nella forma

$$\zeta' = \bar{\zeta}^{-1}$$

e quelle della proiezione stereografica nella forma

$$x = \frac{\zeta + \bar{\zeta}}{\zeta\bar{\zeta} + 1}, \quad y = \frac{\zeta - \bar{\zeta}}{i(\zeta\bar{\zeta} + 1)}, \quad z = \frac{\zeta\bar{\zeta} - 1}{\zeta\bar{\zeta} + 1}. \quad (3.6)$$

Se  $P(x, y, z)$  e  $P'(x', y', z')$  sono punti di  $\mathbb{S}$ , posto  $\omega = \widehat{PP'}$ , si ha

$$\cos \omega = xx' + yy' + zz'$$

e quindi per le (3.6) si ha

$$\cos^2 \frac{\omega}{2} = \frac{1 + \cos \omega}{2} = \frac{|\zeta \bar{\zeta}' + 1|^2}{(\zeta \bar{\zeta} + 1)(\zeta' \bar{\zeta}' + 1)}.$$

Se  $P$  e  $P'$  sono punti antipodali,  $\omega = \pi$  e dunque

$$\cos^2 \frac{\omega}{2} = 0.$$

Quindi

$$|\zeta \bar{\zeta}' + 1| = 0$$

cioè  $\zeta' = -(\bar{\zeta})^{-1}$ .

Questa trasformazione può essere considerata come la composizione dell'inversione rispetto alla circonferenza unitaria di centro  $O$  e della riflessione  $\zeta' = -\bar{\zeta}$  o, equivalentemente, come l'inversione rispetto ad una circonferenza immaginaria di equazione

$$\zeta \bar{\zeta} = -1.$$

### 3.5 Proiezione stereografica e geometria differenziale

Consideriamo la sfera di centro l'origine e raggio  $r$  rappresentata tramite le coordinate geografiche

$$x = r \cos \phi \cos \theta, \quad y = r \sin \phi \cos \theta, \quad z = r \sin \theta \quad (3.7)$$

dove  $\theta$  è la latitudine e  $\phi$  è la longitudine. Si vede facilmente che <sup>1</sup>

$$E = r^2 \cos^2 \theta; \quad F = 0; \quad G = r^2$$

da cui

$$ds^2 = r^2 \cos^2 \theta d\phi^2 + r^2 d\theta^2 \quad \text{e} \quad d\sigma = r^2 \cos \theta d\phi d\theta.$$

Le espressioni precedenti si potevano anche dedurre facilmente dal punto di vista geometrico tenendo presente che il meridiano di equazione  $\phi = \text{cost}$  ha raggio  $r$ , mentre il parallelo  $\theta = \text{cost}$  ha raggio  $r \sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = r \cos \theta$ .

---

<sup>1</sup>cfr. Appendice.

Consideriamo la parametrizzazione di  $\mathbb{S}(r)$  indotta dalla sua proiezione stereografica sul piano:

$$\begin{cases} x = \frac{2ur^2}{u^2 + v^2 + r^2} \\ y = \frac{2vr^2}{u^2 + v^2 + r^2} \\ z = \frac{u^2 + v^2 - r^2}{u^2 + v^2 + r^2}. \end{cases}$$

In questo caso si ha

$$E = G = \frac{4r^4}{(u^2 + v^2 + r^2)^2}, \quad F = 0$$

dunque i parametri  $u, v$  sono parametri isotermi.

Ponendo  $d\tilde{s}^2 = du^2 + dv^2$ , si ha

$$ds^2 = \frac{4r^4}{(u^2 + v^2 + r^2)^2} d\tilde{s}^2. \quad (3.8)$$

Naturalmente vale anche

$$d\sigma = \frac{4r^4}{(u^2 + v^2 + r^2)^2} d\tilde{\sigma}. \quad (3.9)$$

La (3.8) e la (3.9) esprimono rispettivamente il legame tra l'elemento lineare sulla sfera e l'elemento lineare sul piano e il legame tra l'elemento di area sulla sfera e l'elemento di area sul piano.

Introduciamo ora nel piano le coordinate polari  $(\tilde{\rho}, \tilde{\phi})$ . Allora

$$u = \tilde{\rho} \cos \tilde{\phi}; \quad v = \tilde{\rho} \sin \tilde{\phi}.$$

Vogliamo trovare le equazioni della proiezione stereografica  $f : \mathbb{S}(r) - \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  usando sulla sfera le coordinate geografiche e sul piano quelle polari. Ricordiamo che

$$f : (x, y, z) \mapsto \left( \frac{xr}{r-z}, \frac{yr}{r-z} \right).$$

Allora

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} \cos \tilde{\phi} &= \frac{r^2 \cos \phi \cos \theta}{r - r \sin \theta} = \frac{r \cos \phi \cos \theta}{1 - \sin \theta} \\ \tilde{\rho} \sin \tilde{\phi} &= \frac{r^2 \sin \phi \cos \theta}{r - r \sin \theta} = \frac{r \sin \phi \cos \theta}{1 - \sin \theta}. \end{aligned}$$

da cui

$$\tilde{\rho}^2 = \frac{r^2 \cos^2 \theta}{(1 - \sin \theta)^2}; \quad \tan \tilde{\phi} = \tan \phi$$

quindi

$$\tilde{\rho} = \frac{r \cos \theta}{1 - \sin \theta}; \quad \tilde{\phi} = \phi.$$

Ne segue che

$$d\tilde{s}^2 = \tilde{\rho}^2 d\tilde{\phi}^2 + d\tilde{\rho}^2 = \frac{r^2 \cos^2 \theta}{(1 - \sin \theta)^2} d\phi^2 + \frac{r^2}{(1 - \sin \theta)^2} d\theta^2$$

e dunque

$$d\tilde{s}^2 = \frac{ds^2}{(1 - \sin \theta)^2}.$$

Si vede allora che la proiezione stereografica nell'infinitesimo si comporta come una similitudine, cioè è un'applicazione conforme (cfr. Appendice).

### 3.6 Note storiche

Il primo uso della proiezione stereografica della sfera su un piano risale ad Ipparco, il grande astronomo di Nicea del II secolo a.C.. Però noi troviamo descritta questa trasformazione solo in una versione araba (del 1000 circa) di un'opera di Claudio Tolomeo d'Alessandria (II secolo d.C.) conosciuta sotto il nome di Planisfero (*Planisphaerium*). Da notare però che in Tolomeo non trovasi mai enunciata esplicitamente (né tanto meno dimostrata) la prima proprietà generale di questa trasformazione, cioè di trasformare cerchi in cerchi, ma vengono costruiti soltanto i cerchi corrispondenti ad alcuni cerchi notevoli della sfera rappresentante la sfera celeste.

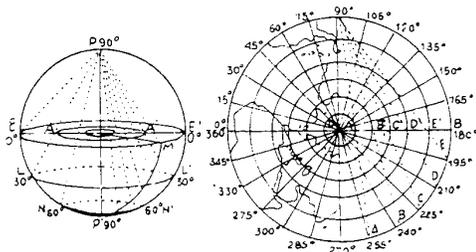
La prima esposizione completa della proiezione stereografica con la dimostrazione della proprietà sopra citata è dovuta a Ahmad al-Fergani, uno scienziato del IX secolo che lavorò a Baghdad. Molto probabilmente la sua dimostrazione è modellata su una risalente ad Apollonio di Perga (262-190 a.C.), il "Grande geometra" dell'antichità noto soprattutto per aver studiato in modo sistematico ed unitario le (sezioni) *coniche*. Sia nel Planisfero di Tolomeo che nell'opera di al-Fergani, la proiezione stereografica è usata per la costruzione dell'*astrolabio*, uno strumento per la misurazione delle coordinate delle stelle sulla sfera celeste. Nel Medioevo la proiezione stereografica era detta infatti *proiezione astrolabica*.

La seconda proprietà, la isogonalità, non trovasi né in Tolomeo né negli scrittori medievali.

Il nome odierno di "proiezione stereografica" (dalle parole greche *στερεόν* (corpo solido) e *γραφή* (disegno)) fu introdotto nel 1613 dal gesuita F. d'Aguilon (1567-1617), autore di un geniale trattato di ottica, *Opticorum libri sex*,

nel quale (Lib.VI, p.572) appare uno studio approfondito della proiezione ortogonale e centrale (detta “scenografia”). Il volume, illustrato con acqueforti del Rubens, amico dell’autore, era pensato anche per architetti, astronomi, naviganti, ingegneri militari, pittori; esso ebbe anche il merito di attirare l’attenzione di geometri sulle trasformazioni geometriche, che grande importanza e sviluppo ebbero nel secolo XIX. Eccellente divulgatore di questi metodi fu il tedesco L.Magnus (1790-1861).

Alle applicazioni della proiezione stereografica per la costruzione di carte geografiche dedicò molti lavori il grande matematico svizzero L.Euler (1707-1783), che lavorò a Pietroburgo e a Berlino. Egli studiò anche il legame tra la proiezione stereografica e le funzioni complesse.



Il primo germe della trasformazione per inversione circolare si trova in Viète (*Apollonius Gallus*, Paris 1600); però i primi studi sistematici vennero fatti da J. Plücker (1831) e da G. Bellavitis (1836). L’inversione circolare si può considerare come generalizzazione dell’usuale simmetria rispetto ad una retta, quando lo “specchio” diventa circolare.

Infatti se  $\overline{OP} = r - h$ ,  $\overline{OP'} = r + d$ , allora

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2 \quad \Rightarrow \quad d - h = hd/r.$$

Quando  $r \rightarrow \infty$  si ha  $d = h$  cioè  $P$  e  $P'$  sono simmetrici rispetto alla retta, circonferenza di raggio infinito.