

Introduzione

La geografia tocca dunque sia il campo dell'astronomia, sia il campo della geometria e lega insieme in una sola realtà fenomeni terrestri e fenomeni celesti, considerandoli affini e uniti.

Tuttavia il lettore che per avventura si imbattesse in questa mia opera non deve essere così ignorante e incolto da non aver mai visto una sfera con dei cerchi attorno, alcuni paralleli, altri perpendicolari rispetto al piano, altri obliqui.

Così si esprime Strabone (63 a.C.) all'inizio della sua opera *Geografia*.

Già Pitagora aveva insegnato ai suoi discepoli che la Terra fosse un corpo di forma sferica col centro fisso e che essa fosse abitabile anche nell'emisfero opposto in cui si trova la Grecia.

Anche nella *Geografia* di Tolomeo la forma sferica della Terra è accettata come fatto stabilito. Tuttavia tra il 1200 e il 1500 varie opere continuarono a dibattere il problema. Una che ebbe grandissima diffusione fu scritta da John of Holywood, detto Sacrobosco, ed aveva come titolo semplicemente "Sphaera".

Quindi la geometria sulla sfera è premessa indispensabile per lo studio della Geografia. Lo strumento importante è la trigonometria sferica, che, come fa notare il Loria, curiosamente precedette quella piana nella storia della Matematica. Si vuol rispondere in particolare alla seguente questione: vivendo sulla terra come è possibile, con misure locali, stabilire che si è su una sfera?

In questo volumetto il problema centrale che si vuole affrontare è quello della cartografia matematica, cioè quello di rappresentare una porzione della superficie della terra su di un piano in modo tale da ridurre quanto più possibile le "distorsioni" delle distanze. Per ora prendiamo il termine "distorsione" nella sua accezione intuitiva, poi ne daremo la definizione precisa. È chiaro che la carta ideale sarebbe quella in cui la distorsione è nulla, cioè il caso in cui la rappresentazione conservi le distanze (naturalmente in scala).

Fino a quando la terra era considerata piatta, questo problema era risolubile dal punto di vista matematico, rimanendo la difficoltà puramente geografica della descrizione del contorno dei paesi; ma se identifichiamo la terra con una sfera \mathbb{S}^2 , la distorsione non sarà mai nulla, poiché non si può trovare un'isometria tra una porzione di \mathbb{S}^2 (con la sua metrica interna) e una porzione di piano

(con l'usuale distanza euclidea). Infatti la sfera non è "applicabile" sul piano, cioè non è una superficie sviluppabile come ad esempio lo sono il cilindro e il cono (che per questo motivo sono usate come superficie ausiliarie in geografia). L'impedimento deriva dal fatto che il piano e la sfera hanno diversa "curvatura", come aveva messo in evidenza C.F.Gauss nei suoi studi di Geodesia (1812-1816), che portarono poi alla geometria differenziale intrinseca, esposta nel suo celebre articolo *Disquisitiones generales circa superficies curvas* pubblicato in latino nel 1827.

Noi in questo fascicolo, dopo aver ricordato le proprietà elementari della circonferenza (Cap. 1) ci riferiremo alla sfera e alla sua geometria (Cap. 2), trascurando tutte le questioni di geodesia che possono trovarsi in testi specializzati (vedi [Be, Bi]). Nel Cap. 3 considereremo la proiezione stereografica, che è la più antica rappresentazione cartografica della terra; nel Cap. 4 tratteremo brevemente delle proiezioni geografiche classiche ponendo il problema della ricerca di quelle che hanno minima distorsione; proveremo che se il dominio della proiezione è un disco (geodetico) allora la minima distorsione è data dalla proiezione azimutale equidistante (la cui inversa in geometria differenziale è chiamata "applicazione esponenziale"). Per questo studio ci è stato di guida l'articolo di J.Milnor *A Problem in Cartography* [Mi] del 1969, nel quale (a priori) non si richiede alcuna differenziabilità alle proiezioni.

Infine in appendice riportiamo alcune nozioni essenziali di geometria differenziale (elementare) sulle superficie.

Capitolo 1

La circonferenza

*... o se del mezzo cerchio far si puote
triangol sì ch'un retto non avesse...*

Dante, Paradiso, XIII, 101–102

*Qual è 'l geometra che tutto s'affige
per misurar lo cerchio, e non ritrova,
pensando quel principio ond'elli indige,...*

Dante, Paradiso XXXIII, 133–135

La circonferenza e la sfera sono le figure più semplici delle quali si ha forse più esperienza diretta (ad esempio un sasso che cade in uno stagno produce onde perfettamente circolari). Al contrario, la retta ed il piano sono figure idealizzate che nascono come astrazioni. È più facile costruire una circonferenza che una porzione di retta (un filo teso ruotando intorno ad un paletto permette di descrivere una circonferenza).

Indubbiamente poi la circonferenza e la sfera hanno una loro armonia, bellezza che hanno impressionato scienziati ed artisti dai primordi dell'umanità. Anzi, in alcuni casi, l'attrazione per il cerchio fu una vera ossessione per gli astronomi.

Circonferenza e sfera hanno avuto poi sempre un significato mistico: per i popoli antichi, i dischi del Sole e della Luna che li guardavano dall'alto erano fonte di mistero e di infinito potere. Così la circonferenza è divenuta figura del tempo eterno, del tempo del mito e del rito, rappresenta l'eterno ritorno, il ritmo delle stagioni, il tempo degli astri. Analogamente per la sfera, che richiamava la volta celeste e l'armonia dei movimenti delle stelle e dei pianeti.

Per qualche storico della matematica, ad esempio A. Seidenberg (cfr. [S]), la Geometria, e più in generale tutta la matematica, ha un'origine rituale, collegata cioè alla religione. La necessità di costruire altari, il desiderio di spiegare alcuni misteri tramite corrispondenze numeriche con figure e forme, l'esigenza di fissare

calendari per le feste liturgiche, hanno spinto allo studio di relazioni geometriche ed osservazioni astronomiche.

In realtà, attività pratiche e significati simbolici non erano nel mondo antico tanto disgiunti come per lo più risultano oggi. In ogni caso possiamo dire che la visione pratica e quella razionale sono state entrambe fonti di ispirazione per la Geometria.

1.1 Definizioni

Nel Libro I degli *Elementi* si trovano le seguenti definizioni:

Definizione 1.1.1 (Euclide, 300 a.C.)

Def.XV *Cerchio* è una figura piana compresa da un'unica linea (che si chiama circonferenza) tale che tutte le rette, le quali cadano sulla (stessa) linea (cioè sulla circonferenza del cerchio) a partire da un punto fra quelli che giacciono internamente alla figura, sono uguali tra loro.

Def.XVI *Quel punto si chiama centro del cerchio.*

Def.XVII *Diametro del cerchio* è una retta condotta per il centro e terminata da ambedue le parti dalla circonferenza del cerchio, la quale retta taglia anche il cerchio per metà.

Def.XVIII *Semicerchio* è la figura compresa dal diametro e dalla circonferenza da esso tagliata. *E centro del semicerchio* è quello stesso che è anche centro del cerchio.

All'inizio del Libro II si trovano altre 11 definizioni riguardanti sempre il cerchio, sue parti e figure ad esso collegate. Nel Libro III vengono trattate, indipendentemente dalla teoria delle proporzioni, le proprietà del cerchio.

Osservazione 1.1.2

1. Le figure considerate da Euclide sono *finite*. La *retta* è ciò che noi chiamiamo "segmento di retta". Si tratta quindi di una retta potenzialmente, ma non attualmente, infinita.

2. Ricordiamo che i Greci procedevano dal concreto all'astratto: la *definizione* è concepita non come nominale, ma come mezzo per descrivere un oggetto esistente o al quale si attribuiva esistenza (in un mondo di idee platonico). Ad es. κύκλος (cerchio) è l'anello, σφαῖρα è la palla, περιφέρεια (circonferenza) è la "periferia", bordo di una figura, ἄγκων (angolo) è la piegatura del braccio.

3. Secondo L.Russo [R], la definizione XV (di cerchio) è particolarmente interessante, poichè si tratta dell'unica definizione degli *Elementi* di cui abbiamo una versione precedente la corruzione del testo euclideo avvenuta nel III secolo. La definizione che si ritiene originale è:

Il cerchio è una figura piana racchiusa da una linea (tale che) tutti i segmenti incidenti su di essa (tracciati) da un punto di quelli che giacciono all'interno della figura, sono tra di loro uguali.

Si osservi che manca la definizione esplicita di circonferenza, anche se viene usato il concetto. Per eliminare questo neo, sempre secondo L.Russo, fu inserita nell'età imperiale la definizione di circonferenza come bordo del cerchio.

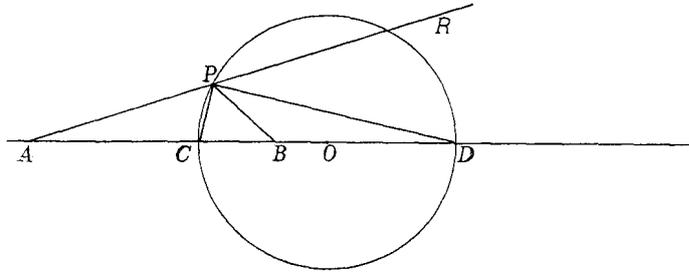
Nel corso dei secoli, prima e dopo Euclide, altre caratterizzazioni della circonferenza sono state date.

A Talete si attribuisce la proposizione che il diametro divide il cerchio in due parti uguali e che gli angoli inscritti di una semicirconferenza sono retti, anzi

Proposizione 1.1.3 (Talete, 625-540 a.C. circa) *Il luogo dei punti dai quali un dato segmento è visto sotto un angolo retto è una circonferenza.*

Dimostrazione. Si fissi il segmento AB e sia C un punto da cui AB è visto sotto un angolo retto. Nel triangolo rettangolo ABC si tracci la parallela ad AC passante per il punto medio M di AB . Considerazioni sui triangoli simili dimostrano che $\overline{CM} = \overline{MB} = \overline{AB}/2$. \square

Proposizione 1.1.4 (Apollonio, 225 a.C.) *Il luogo dei punti del piano le cui distanze da due punti fissati hanno un dato rapporto $k \neq 1$ è una circonferenza.*



Dimostrazione. Siano A, B i punti fissi della definizione e sia P appartenente al luogo dei punti definito; allora

$$\overline{AP} = k\overline{BP}.$$

Sia PC la bisettrice dell'angolo \widehat{APB} e PD quella dell'angolo \widehat{BPR} . Per il "teorema delle bisettrici" (applicato al triangolo APB)

$$AC : CB = AP : PB = AD : BD$$

dunque

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AP}{PB} = k = \frac{AD}{BD}$$

quindi C e D non dipendono da P . Si vede inoltre che tutti i punti P del luogo vedono il segmento CD sotto un angolo retto. Pertanto, per il teorema di Talete, il luogo descritto è una circonferenza. \square

Tralasciamo la dimostrazione della proposizione inversa che può ottenersi tramite considerazioni sull'*inversione rispetto alla circonferenza* (cfr. Capitolo 3), valendo la seguente proposizione.

Proposizione 1.1.5 *Se A e B sono i punti fissi della definizione di Apollonio, r è il raggio della circonferenza e O il suo centro, allora*

$$\overline{OA} \cdot \overline{OB} = r^2.$$

Dimostrazione. Infatti, ponendo $a = \overline{AO}$, $b = \overline{OB}$, valgono $b < r < a$ e

$$\frac{AC}{BC} = \frac{a-r}{r-b}, \quad \frac{AD}{DB} = \frac{a+r}{r+b},$$

dunque

$$\frac{a+r}{r+b} = \frac{a-r}{r-b}$$

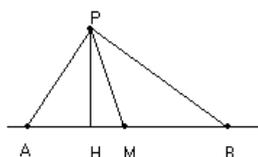
da cui segue facilmente che $ab = r^2$. \square

Osserviamo che per $k = 1$ si ottiene l'asse del segmento AB . Dunque la "definizione di Apollonio" si presta ad una generalizzazione della nozione di circonferenza: una circonferenza di raggio infinito è una retta. Sembra però che la proprietà lì descritta - come afferma C.B. Boyer [Bo] - fosse già nota ad Aristotele (384-322 a.C.), che l'aveva usata per fornire una spiegazione matematica della forma semicircolare dell'arcobaleno.

Apollonio, secondo quanto riferisce Tolomeo, riteneva che i moti della Luna, del Sole e dei cinque pianeti si potessero descrivere come svolgersi su cerchi i cui centri ruotano su cerchi più grandi intorno alla Terra collocata al centro.

Proposizione 1.1.6 (Roberval, 1602–1675) *Il luogo dei punti P del piano per i quali è costante la somma dei quadrati delle distanze da due punti dati A e B è una circonferenza (avente il centro nel punto medio M del segmento AB).*

Dimostrazione. Poniamo $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = 2d^2$ e $\overline{AM} = \overline{MB} = r$. Sia H la proiezione ortogonale di P su AB . Allora



$$\begin{aligned} \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 &= \\ &= \overline{AH}^2 + \overline{HP}^2 + \overline{HP}^2 + \overline{HB}^2 = \\ &= (\overline{AM} - \overline{HM})^2 + 2\overline{HP}^2 + (\overline{HM} + \overline{MB})^2 = \\ &= 2(\overline{AM}^2 + \overline{HM}^2 + \overline{HP}^2) = 2(\overline{AM}^2 + \overline{MP}^2). \end{aligned}$$

Ne segue che $\overline{MP}^2 = d^2 - r^2$ per ogni punto P del luogo. Quindi, se $d > r$, P appartiene alla circonferenza di centro M e raggio $\sqrt{d^2 - r^2}$. \square

La proprietà trovata da Roberval si generalizza nella seguente:

Proposizione 1.1.7 *Siano A_1, A_2, \dots, A_n punti del piano. Il luogo dei punti P tali che*

$$m_1 \overline{PA_1}^2 + m_2 \overline{PA_2}^2 + \dots + m_n \overline{PA_n}^2 = \text{cost}$$

è una circonferenza.

Dimostrazione. Diamo una dimostrazione analitica. Se A_i ha coordinate (a_i, b_i) , la condizione si traduce nella seguente:

$$\sum_{i=1}^n m_i (x^2 - 2a_i x + a_i^2 + y^2 - 2b_i y + b_i^2) = k^2$$

da cui segue

$$(x^2 + y^2) \left(\sum_{i=1}^n m_i \right) +$$

$$-2 \left(\sum_{i=1}^n m_i a_i \right) x - 2 \left(\sum_{i=1}^n m_i b_i \right) y - 2 \sum_{i=1}^n m_i (a_i^2 + b_i^2) = k^2$$

che è l'equazione di una circonferenza di centro nel baricentro dei punti A_i con pesi m_i . \square

Siano x_1, x_2, x_3 coordinate omogenee nel piano affine ampliato. Una *circonferenza generalizzata* è il luogo dei punti $P(x_1, x_2, x_3)$ tali che

$$\lambda(x_1^2 + x_2^2) + 2ax_1x_3 + 2bx_2x_3 + cx_3^2 = 0. \quad (1.1)$$

Le circonferenze generalizzate sono caratterizzate, tra le curve del secondo ordine, dalla condizione di passare per i punti (impropri) ciclici $(1, \pm i, 0)$. Se $\lambda \neq 0$ e $x = \frac{x_1}{x_3}, y = \frac{x_2}{x_3}$, dividendo l'equazione (1.1) per x_3^2 si ottiene la nota equazione della circonferenza nel piano.

Per $\lambda = 0$ si ottiene la retta impropria e in generale una retta propria.

Concludiamo ricordando che la circonferenza è l'unica curva (chiusa) piana avente curvatura costante non nulla (uguale ad $1/R$, dove R è il raggio della circonferenza).

1.2 La lunghezza della circonferenza e l'area del cerchio

Data una circonferenza \mathcal{C} consideriamo l'insieme $A(\mathcal{C})$ dei perimetri dei poligoni inscritti in \mathcal{C} e l'insieme $B(\mathcal{C})$ dei perimetri dei poligoni circoscritti a \mathcal{C} . Si dimostra che tali insiemi sono contigui in \mathbb{R} (vedi e.g. [EA], Capitolo 5), quindi

per l'assioma di Dedekind esiste un unico elemento di separazione. Tale numero reale $l(\mathcal{C})$ è detto *lunghezza della circonferenza* \mathcal{C} .

Vale inoltre il seguente teorema (per la cui dimostrazione si rimanda ancora [EA]).

Teorema 1.2.1 *Le lunghezze di due circonferenze stanno fra loro come i rispettivi raggi.*

Definizione 1.2.2 *Data una circonferenza \mathcal{C} di raggio r , si pone*

$$\pi := \frac{l(\mathcal{C})}{2r}.$$

Tale rapporto, per il teorema precedente, risulta essere indipendente dalla circonferenza fissata.

Nel libro *La misura del cerchio*, Archimede stabilisce i seguenti tre teoremi:

Teorema 1.2.3 (Archimede, 287-212 a.C.)

1. *Il cerchio è equivalente ad un triangolo che ha per base la lunghezza della circonferenza e per altezza il raggio.*
2. *Il cerchio è equivalente approssimativamente ad $11/14$ di un quadrato che ha come lato il diametro del cerchio.*
3. *La lunghezza della circonferenza è compresa tra $3 + 1/7$ e $3 + 10/71$ volte il diametro.*

Archimede ottenne la stima in **3.** partendo da due esagoni regolari, uno inscritto e l'altro circoscritto alla circonferenza, e spingendosi, raddoppiando il numero dei lati, sino a poligoni con 96 lati.

Osservazione 1.2.4 Il problema del calcolo della lunghezza di una circonferenza e dell'area del cerchio si è imposto per motivi di ordine pratico sin da epoche remotissime e si trovano regole empiriche per tale calcolo in vari documenti di tutte le più antiche civiltà (vedi [GR]). Nel Papiro Rhind, risalente al 1650 a.C. circa, lo scriba egizio Ahmes scrive:

Togli $1/9$ ad un diametro e costruisci un quadrato sulla parte che ne rimane; questo quadrato ha la stessa area del cerchio.

Tale metodo implica per il rapporto tra la lunghezza della circonferenza ed il suo diametro il valore 3,16049.... che si discosta di meno dell'un per cento dal valore di π (circa 3,141592).... Il risultato contenuto nel Papiro Rhind non ebbe molta diffusione: infatti mille anni dopo i babilonesi e gli ebrei continuavano ad usare 3 come valore approssimato.

Nel Papiro Rhind c'è anche il primo tentativo documentato di quadrare il cerchio, cioè di costruire un quadrato avente la stessa area del cerchio. Furono i

Greci ad affrontare tale problema più rigorosamente, chiedendosi se fosse possibile quadrare il cerchio usando solo riga e compasso (cioè rette e circonferenze). Vari tentativi furono fatti da Anassagora di Clazomene, Antifonte il Sofista e Ippocrate di Chio nel V secolo a.C.. Ad Ippocrate si attribuisce anche una prima dimostrazione della proporzionalità dell'area del cerchio al quadrato del raggio. La dimostrazione di tale risultato riportata negli Elementi di Euclide (Libro XII, Prop.2), basata sul metodo di esaustione, è attribuita ad Eudosso di Cnido (408-355 a.C.).

L'ultima parola del mondo antico sul calcolo dell'area del cerchio la espresse Archimede con il teorema citato precedentemente.

Il problema della quadratura del cerchio, tramite riga e compasso, rimase aperto sino al 1882, quando il tedesco F.Lindemann dimostrò che π è un numero trascendente, cioè non è soluzione di alcuna equazione algebrica a coefficienti razionali. Da ciò discende l'impossibilità di trasformare, utilizzando solo riga e compasso, un cerchio in un poligono equivalente.

Già un secolo prima, nel 1770, J.H.Lambert (che ritroveremo nel Capitolo 4), aveva dimostrato l'irrazionalità di π , ponendo fine alla speranza di conoscere il valore esatto di π .

Infine, osserviamo che nessuno usò un simbolo specifico per denotare il rapporto tra la lunghezza della circonferenza ed il suo diametro, sino a circa 250 anni fa. Sembra che il primo ad usare il simbolo π sia stato l'inglese William Jones nel 1706, ma la notazione si diffuse definitivamente dopo la pubblicazione nel 1748 della *Introductio in analysin infinitorum* del grande matematico svizzero Leonhard Euler (1707–1783), chiamato dai suoi contemporanei "l'analisi incarnata".

1.3 Simmetrie e circonferenza

Diamo ora un'altra descrizione della circonferenza, utile anche come costruzione, a partire da simmetrie assiali.

Siano r ed s due rette incidenti in C , formanti un angolo uguale a $\theta/2$; allora, indicando con σ_a la simmetria ortogonale rispetto ad una retta a , si ha che

$$\sigma_r \circ \sigma_s = \rho(C, \theta),$$

dove $\rho(C, \theta)$ è la rotazione intorno a C d'angolo θ .

È chiaro che

$$\rho(C, \theta) \circ \rho(C, \theta') = \rho(C, \theta + \theta')$$

dunque $\rho = \rho(C, \theta)$ ha ordine $m \in \mathbb{N}$ se

$$m\theta = 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

essendo $\rho(C, 2k\pi) = id$. Quindi

$$\rho \text{ ha ordine } m \text{ finito} \Leftrightarrow \frac{2\pi}{\theta} = \frac{m}{k} \in \mathbb{Q}$$

cioè θ è commensurabile con π .

In tal caso $\{\rho, \rho^2, \dots, \rho^m\}$ è un gruppo ciclico di ordine m ; quindi eseguendo tutte le simmetrie rispetto ad r e ad s , a partire da un punto P , otteniamo un numero finito di punti, giacenti sulla circonferenza di centro P e raggio CP .

Se invece $2\pi/\theta$ è irrazionale, cioè θ è incommensurabile con π , quell'insieme di punti è infinito, anzi denso nella circonferenza.

Si conclude allora che

Proposizione 1.3.1 *La curva simultaneamente simmetrica rispetto a due rette incidenti, formanti un angolo incommensurabile con π è una circonferenza.*

Si osservi che per rette, disegnate sullo schermo di un computer, $\text{tg}(\theta/2)$ è certamente razionale e quindi, per un teorema di Eulero, θ è “genericamente” irrazionale.

1.4 Il teorema isoperimetrico

Il problema che ci poniamo è il seguente:

Fra tutte le curve piane (semplici e) chiuse che delimitano una porzione di piano ed hanno lo stesso perimetro, qual è quella che racchiude la maggiore area?

Ebbene, se consideriamo n -agoni con il medesimo perimetro, già Zenodoro (circa 180 a.C.) provò che l' n -agone regolare ha l'area massima.

In generale vale:

Teorema 1.4.1 *Fra tutte le figure piane di ugual perimetro il cerchio ha l'area massima.*

Fra tutte le figure di uguale area il cerchio ha il perimetro minimo.

I due problemi sono equivalenti, basta scambiare le parole *massimo* con *minimo* e *perimetro* con *area*.

J.Steiner (1796–1863), un geometra di eccezionale valore e grande inventiva, si occupò profondamente della geometria dei cerchi e delle sfere ed escogitò varie dimostrazioni del teorema isoperimetrico. Una delle sue idee consisteva nel dimostrare che la figura massimale (supposta esistente) deve essere necessariamente convessa e simmetrica rispetto ad ogni retta che ne divida il perimetro in due parti uguali.

Un'altra dimostrazione è fondata sull'idea che la figura massimale deve avere un asse di simmetria in ogni direzione. Dapprima si fa vedere che, data una figura convessa, si può costruire un'altra figura con perimetro non maggiore e con asse di simmetria in una direzione data arbitraria. Fissata un'altra direzione, il teorema isoperimetrico segue da un procedimento iterativo e dalla Proposizione 1.3.1.

Dal teorema segue anche la celebre *disuguaglianza isoperimetrica*: se $\mathcal{A}(F)$ è l'area di una figura F e $\mathcal{P}(F)$ è il suo perimetro, allora

$$\mathcal{P}(F)^2 \geq 4\pi\mathcal{A}(F).$$

Osservazione 1.4.2 Il problema di massimizzare un'area è molto antico ed è noto anche come *problema di Didone* (Eneide I, 360–368):

... quanta cerchiar di un bue potesse un tergo.

I Greci però studiarono questi problemi con metodi puramente geometrici, mantenendosi quindi lontani dai procedimenti propri del “Calcolo delle variazioni”, ramo della matematica nato sul finire del sec. XVII, per opera in particolare dei fratelli Bernoulli, in connessione a problemi di massimo e di minimo di funzionali che dipendono da una o più curve o superficie (ad es. curva di minima lunghezza tra due punti dati o geodetica¹, curva di minimo tempo o brachistocrona, superficie di area minima, bolle di sapone). Le questioni di massimo e di minimo hanno sempre avuto un grande valore anche nell'interpretazione dei fenomeni naturali, perché su questi domina un principio generale di *economia*: la natura, nelle sue manifestazioni, tende a risparmiare il più possibile l'energia che deve impiegare.

Eulero diceva che, essendo la costruzione del mondo la più perfetta possibile, come quella di un Creatore infinitamente saggio, in natura nulla avviene che non presenti proprietà di massimo o di minimo. Ad esempio Erone, Fermat e Huygens hanno dedotto da un principio di minimo le leggi della riflessione, della rifrazione e della propagazione generale della luce; Hamilton ha studiato un profondo legame tra la meccanica e l'ottica, mentre H.R.Hertz (1857-1894) ha enunciato un principio di inerzia molto generale:

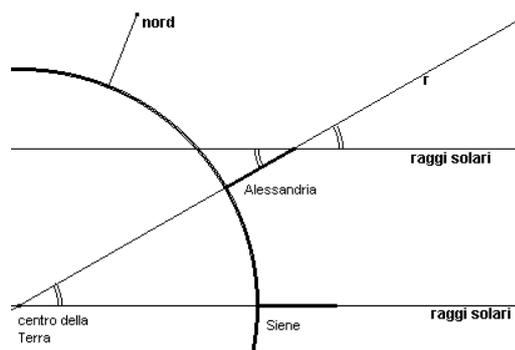
Un punto, che si muove su una superficie, per inerzia segue una geodetica della superficie stessa.

Se la superficie è un piano, allora le geodetiche sono le rette euclidee.

1.5 Un'applicazione geografica

Si può ricostruire l'intera circonferenza a partire da un qualsiasi piccolo arco. Questa proprietà permise ad Eratostene di Cirene (200 a.C.) di dedurre la misura dell'intera circonferenza della Terra dal piccolo arco compreso tra Alessandria e Siene (oggi Assuan), che si trova a sud di Alessandria, quasi sullo stesso meridiano. Quando il sole si trova direttamente allo zenit ad Assuan (a mezzogiorno del solstizio d'estate), si misura l'angolo formato tra la direzione del Sole e la verticale ad Alessandria usando l'ombra di un palo verticale (lo gnomone).

¹Sul concetto di geodetica si veda l'Appendice.



Come afferma Ossermann [O], la geniale semplicità del metodo di Eratostene non è sminuita dal fatto che la sua stima implicava varie imprecisioni ed incertezze. Secondo Eratostene la circonferenza era di 250.000 stadi. La lunghezza di uno *stadio* era pari a 500 *piedi*, ma la lunghezza del piede non era universale. Tuttavia la stima di Eratostene (corrispondente a 40.000 km) fornisce una testimonianza impressionante di un ragionamento geometrico semplice, ma ingegnoso, che permette di conseguire il successo là dove un approccio diretto era molto al di fuori delle possibilità pratiche di realizzazione. Era il tentativo di “misurare il non misurabile”.

È interessante notare che, dopo Eratostene, l’arco di meridiano fu misurato nuovamente solo nell’800 circa a Baghdad, sotto il regno del califfo al Mamun, che regnò dall’813 all’833 (cfr. [Y]).

Capitolo 2

La sfera

*...come veggian le terreni menti
non capere in triangolo due ottusi*
Dante, Paradiso XVII, 14-15

La sfera, nell'immaginario collettivo, ha avuto sempre una grande importanza come espressione di ordine e di armonia, simbolo di bellezza e di perfezione.

N.Copernico (1473–1543), nel suo primo trattato di astronomia, il *Commentariolus*, così scrive:

I nostri antenati hanno immaginato un gran numero di sfere celesti per una ragione speciale: spiegare il movimento apparente dei pianeti attraverso il principio di regolarità. Essi infatti giudicavano assurdo che un corpo celeste non si muova sempre a una velocità uniforme in un cerchio perfetto.

Il fatto che la terra fosse sferica è attribuito ora a Pitagora, ora a Parmenide, ora ad entrambi. Per i Pitagorici attorno alla sfera terrestre girano il Sole, la Luna e i pianeti, fissati a sfere concentriche. Le vivaci rotazioni di questi corpi producono la cosiddetta *armonia delle sfere*, che non è solo un'invenzione poetica, ma un concetto scientifico - come è messo bene in evidenza da A.Koestler [K]: "Dopo un'immensa deviazione, alla fine del XVI secolo, un certo Johann Kepler s'invaghì del sogno di Pitagora e su quel fondamento di fantasia, per mezzo di ragionamenti altrettanto azzardati, si mise a costruire il solido edificio dell'astronomia moderna".

Verso la fine del V secolo a.C., Filolao, eminente esponente del pitagorismo, pensò la Terra muoversi intorno ad un cerchio occupato da un "fuoco centrale", ma non ebbe l'idea di farla girare intorno al suo asse. Questo passo fu fatto da Eraclide Pontico (IV sec. a.C.), che così riuscì a spiegare l'alternarsi del giorno e della notte, ma non era ancora spiegato il movimento annuo dei pianeti. Chi pose al centro dell'universo planetario il Sole e non la Terra fu Aristarco di Samo

(circa 310 a.C.), che si può considerare il “Copernico greco”. Aristarco morì senza discepoli e non ebbe successori e ancora A.Koestler dice: “Per quasi due millenni il sistema eliocentrico venne dimenticato (o è il caso di dire rimosso?) fino a che un oscuro canonico di Varnia, nei lontani avamposti della cristianità, riprese il filo che aveva lasciato l’astronomo di Samo”.

Quando si perde la memoria storica e si procede basandosi solo sulle apparenze, senza chiedersi il perché, è possibile che si sia “condannati” dopo secoli a riscoprire ciò che già era stato intuito, forse con anticipo sui tempi non ancora maturi per quelle “rivoluzionarie” scoperte.

2.1 La sfera della geometria elementare

Nel libro XI dei suoi *Elementi*, dedicato alla trattazione della geometria elementare, Euclide così definisce la sfera:

Definizione 2.1.1 (Euclide)

1. Sfera è la figura che viene compresa quando, restando immobile il diametro di un semicerchio, si faccia ruotare il semicerchio intorno al diametro finché non torni nuovamente nella posizione da cui si cominciò a farlo muovere.
2. Centro di una sfera è quello stesso punto che è anche il centro del semicerchio.

Ne segue che la *superficie sferica* è la superficie generata da una semicirconferenza quando compie un giro completo attorno al suo diametro. È chiaro che la superficie sferica è caratterizzata dall’aver tutti i punti equidistanti da un punto fisso, ma questa definizione è di Teodoro di Bitinia (II sec. a.C.), anche se sembra possa risalire a Eudosso di Cnido (IV sec a.C.).

Apollonio di Perga (225 a.C.) definisce la superficie sferica come *luogo dei punti dello spazio per i quali il rapporto delle distanze da due punti fissi è una costante $k \neq 1$* .

Naturalmente le due definizioni sono equivalenti come abbiamo provato nel caso analogo della circonferenza.

Osserviamo che se $k = 1$ si ottiene il piano diametrale rispetto ad A e B . Il piano così si può pensare come una “sfera di raggio infinito”.

Osservazione 2.1.2 La sfera può essere caratterizzata in altri modi, ad esempio come l’unica superficie i cui *profili* e le cui *sezioni piane* sono circonferenze (vedi [HV]). Questa proprietà è stata usata per riconoscere che la terra è rotonda, osservando durante le eclissi che la sua ombra è circolare. Un’altra caratterizzazione, molto interessante è la seguente.

Teorema 2.1.3 *L’unica superficie (connessa) di rotazione, simultaneamente intorno a due rette incidenti, è la sfera.*

Dimostrazione. Diamo solo un cenno. Siano r e s i due assi di rotazione incidenti in O e Σ la superficie di rotazione simultaneamente intorno ad r e ad s . Se P è un punto di Σ , la superficie \tilde{S} generata da P intorno alle due rette è una porzione di sfera (di centro O e raggio OP), contenuta in Σ . Ripetendo il ragionamento per i punti di \tilde{S} si conclude che tutta la sfera S di centro O e raggio OP , appartenente a Σ . Per la connessione di Σ si conclude che $\Sigma \equiv S$. \square

Si osservi che qui, a differenza del caso piano, l'angolo tra le rette incidenti può essere arbitrario.

Usando questo teorema, L.Tonelli ha dimostrato elementarmente il *teorema isoperimetrico dello spazio*:

Teorema 2.1.4 *Fra tutti i solidi di uguale area laterale, la sfera è quello che ha volume massimo.*

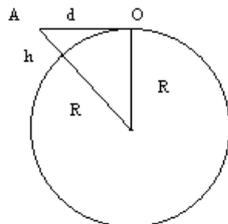
Fra tutti i solidi di uguale volume, la sfera è quello che ha l'area superficiale minima.

Per lo spazio la disuguaglianza perimetrica è: se $\mathcal{V}(F)$ è il volume del solido F e $\mathcal{A}(F)$ l'area della sua superficie, allora

$$\mathcal{A}(F)^3 \geq 36\pi\mathcal{V}(F)^2.$$

2.2 Un'applicazione geografica

Si legge che fin dai tempi più lontani una delle prove della rotondità della terra era offerta dal fatto che, quando una nave si avvicinava a riva, se ne scorgeva dapprima la sommità degli alberi e solo successivamente lo scafo. È questa prova davvero attendibile? Se indichiamo con O l'osservatore, h l'altezza dell'albero della nave al di sopra del livello del mare, d la distanza tra l'osservatore e la sommità dell'albero della nave e R il raggio della terra, si vede che ([SV])



$$(h + R)^2 = d^2 + R^2$$

e quindi

$$h^2 + 2hR = d^2.$$

Tenendo presente che $R \sim 6,3 \cdot 10^6 m$, si ha che il termine h^2 è trascurabile rispetto a $2hR$, per cui

$$d \sim \sqrt{2hR} \sim 3,54 \cdot 10^3 \sqrt{h}.$$

Ad esempio, se volessimo calcolare da che distanza sarebbe visibile il campanile del Duomo di Lecce (alto 68,38 m) se non ci fossero ostacoli, avremmo che il campanile è visibile da circa 29 km di distanza.

Comunque, il metodo più preciso per la determinazione della forma sferica della Terra è quello astronomico.

2.3 La sfera \mathbb{S}^n

Sia \mathbb{R}^{n+1} lo spazio euclideo standard. Se $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ e $r > 0$ si dice *sfera di raggio r e centro \mathbf{x}_0*

$$\mathbb{S}_{\mathbf{x}_0}^n(r) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| = r\},$$

dove, come è usuale, se $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$

$$\|\mathbf{y}\| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{n+1}^2}.$$

In particolare poniamo

$$\mathbb{S}^n(r) := \mathbb{S}_{\mathbf{0}}^n(r); \quad \mathbb{S}^n := \mathbb{S}^n(1);$$

\mathbb{S}^n si dice la *sfera unitaria* di \mathbb{R}^{n+1} .

Se k è un numero intero tale che $1 \leq k \leq n+1$, si chiama *k -sottosfera* l'intersezione di $\mathbb{S}^n(r)$ con un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^{n+1} di dimensione $k+1$. Se $k=1$ tale intersezione viene chiamata *cerchio massimo*.

Osserviamo che se \mathbf{x} e \mathbf{y} sono punti di $\mathbb{S}^n(r)$ e $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$, allora esiste un unico cerchio massimo contenente \mathbf{x} e \mathbf{y} .

Se V è il sottospazio $(k+1)$ -dimensionale individuato dalle $n-k-1$ equazioni lineari

$$\begin{cases} x_{k+2} = 0 \\ x_{k+3} = 0 \\ \vdots \\ x_{n+1} = 0 \end{cases}$$

si ha

$$\mathbb{S}^n(r) \cap V = \mathbb{S}^k(r).$$

Infatti un punto $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ appartiene a $\mathbb{S}^n(r) \cap V$ se e solo se le sue coordinate verificano il sistema

$$\begin{cases} x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = r^2 \\ x_{k+2} = 0 \\ x_{k+3} = 0 \\ \vdots \\ x_{n+1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 + \dots + x_{k+1}^2 = r^2 \\ x_{k+2} = 0 \\ x_{k+3} = 0 \\ \vdots \\ x_{n+1} = 0, \end{cases}$$

cioè $\mathbf{x} \in \mathbb{S}^n(r) \cap V$ se e solo se $\mathbf{x} \in \mathbb{S}^k(r)$.

Si ricordi che si dice *sottospazio affine k -dimensionale* di \mathbb{R}^{n+1} un insieme del tipo

$$A = V + \mathbf{a} = \{\mathbf{v} + \mathbf{a} : \mathbf{v} \in V\}$$

dove V è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^{n+1} di dimensione k e $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{n+1}$; si vede facilmente che se \mathbf{a} non appartiene a V , A non è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^{n+1} .

Si chiama *k -sfera piccola* l'intersezione $\mathbb{S}^n(r) \cap A$, dove A è un sottospazio affine $(k+1)$ -dimensionale di \mathbb{R}^{n+1} tale che $\mathbb{S}^n(r) \cap A \neq \emptyset$. Tale intersezione risulta essere la traslazione di una k -sottosfera di raggio minore di r .

Chiameremo *polo nord* di $\mathbb{S}^n(r)$ il punto $N = (0, \dots, 0, r)$, *polo sud* il punto $S = (0, \dots, 0, -r)$, *equatore* la $(n-1)$ -sottosfera intersezione di $\mathbb{S}^n(r)$ con l'iperpiano di \mathbb{R}^{n+1} di equazione $x_{n+1} = 0$.

Se \mathbf{x} è un punto di $\mathbb{S}^n(r)$, si dirà *iperpiano tangente* in \mathbf{x} a $\mathbb{S}^n(r)$, e si indicherà con $T_{\mathbf{x}}(\mathbb{S}^n)$, l'iperpiano affine passante per \mathbf{x} ed ortogonale ad \mathbf{x} ; i suoi elementi saranno detti *vettori tangenti* a $\mathbb{S}^n(r)$ in \mathbf{x} .

L'*angolo* di due vettori \mathbf{u} e \mathbf{v} , non nulli, tangenti a $\mathbb{S}^n(r)$ in \mathbf{x} sarà come al solito

$$\widehat{\mathbf{u}\mathbf{v}} = \arccos \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|} \in [0, \pi[.$$

La topologia naturale di $\mathbb{S}^n(r)$ sarà quella indotta da \mathbb{R}^{n+1} .

In seguito faremo riferimento alla sfera in \mathbb{R}^3 di centro $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e raggio $r > 0$, cioè a

$$\mathbb{S}_{P_0}^2(r) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2\}.$$

Per semplicità di notazione scriveremo $\mathbb{S}_{P_0}(r)$, $\mathbb{S}(r)$, \mathbb{S} intendendo rispettivamente $\mathbb{S}_{P_0}^2(r)$, $\mathbb{S}^2(r)$, \mathbb{S}^2 .

Osserviamo che $\mathbb{S}_{P_0}(r)$ corrisponde alla superficie sferica definita da Euclide, però successivamente diremo semplicemente sfera invece di superficie sferica.

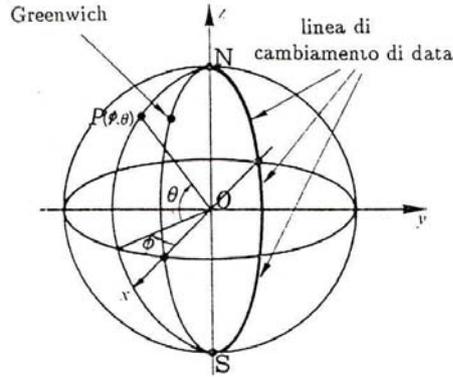
2.4 Rappresentazione della sfera in coordinate geografiche

Consideriamo la sfera $\mathbb{S}(r)$ di \mathbb{R}^3 . Per ogni $P \in \mathbb{S}(r)$ si chiama *latitudine*¹ di P il numero reale

$$\theta(P) = \frac{\pi}{2} - (\widehat{ON, OP})$$

¹da *latitudo* =larghezza e da *longitudo*=lunghezza, perché nella direzione Nord-Sud il mondo conosciuto dagli antichi si estendeva di meno che in quella Est-Ovest

dove $\widehat{(ON, OP)}$ è l'angolo assoluto (non orientato) tra le semirette ON e OP , detto anche *colatitudine*. I punti dell'equatore hanno latitudine 0 mentre $\theta(N) = \frac{\pi}{2}$ e $\theta(S) = -\frac{\pi}{2}$.



Se $P \in \mathbb{S}(r) - \{N, S\}$ si chiama *longitudine* di P il numero reale $\phi(P) \in]-\pi, \pi[$, misura dell'angolo orientato individuato dalle rette orientate OA e OP' dove $A = (r, 0, 0)$ e P' è la proiezione di P sul piano xy .

Sia Γ il semicerchio massimo passante per N, S e $(-r, 0, 0)$. Se $P \notin \Gamma$ allora $\phi(P)$ è ben determinata; per N e S è completamente indeterminata; per gli altri punti di Γ la longitudine va scelta tra i valori $-\pi$ e π .

Gli elementi della coppia (ϕ, θ) si dicono *coordinate geografiche* sulla sfera. Dalle definizioni segue che

$$\begin{cases} x = r \cos \phi \cos \theta \\ y = r \sin \phi \cos \theta \\ z = r \sin \theta \end{cases}$$

dove $\phi \in]-\pi, \pi[$ e $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right]$, sono anche equazioni parametriche della sfera (in coordinate terrestri).

I *meridiani*² (risp. *paralleli*) di $\mathbb{S}(r)$ sono le curve dove la longitudine (risp. latitudine) è costante. Si vede che i meridiani sono le intersezioni della sfera con i piani passanti per l'asse z e che i paralleli sono le intersezioni della sfera con i piani perpendicolari allo stesso asse.

Nota. Nel 1884 nel corso di una conferenza internazionale tenutasi a Washington, si scelse come meridiano fondamentale, o meridiano di longitudine 0, quello passante per l'osservatorio di Greenwich (Londra); il meridiano Γ (di

²Da *meridies*, perché sulla terra uniscono punti che hanno il mezzogiorno nello stesso momento.

longitudine 180°) è la linea di cambiamento di data che corre prevalentemente sull'Oceano Pacifico, incontrando quasi nessuna terra emersa.

Le coordinate geografiche di Lecce sono $\theta = 40^\circ 23'$ Nord e $\phi = 18^\circ 11'$ Est.

2.5 L'ellissoide terrestre

Come è noto l'equazione di un ellissoide Σ di rotazione riferito ai suoi assi si può porre nella forma

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

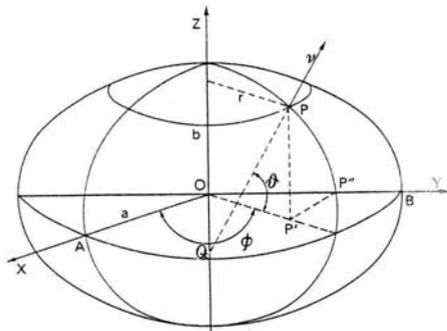
Supponiamo che $a \geq b$ e poniamo

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \quad \alpha = \frac{a - b}{a}.$$

Il numero e si dice l'*eccentricità* dell'ellissoide e α il suo *schacciamento*. Si vede che

$$e^2 = \alpha(2 - \alpha).$$

Le coordinate cartesiane (x, y, z) di un punto P dell'ellissoide si chiamano *coordinate geocentriche*. Definiamo ora le *coordinate geografiche* di P .



Sia ν la verticale per P , cioè la perpendicolare per P al piano tangente in P all'ellissoide. Chiamiamo *latitudine* di P l'angolo θ che ν forma col piano equatoriale (i.e. il piano $z = 0$); chiamiamo invece *longitudine* di P l'angolo ϕ tra il meridiano per P e il meridiano fondamentale, dove il meridiano per P è l'intersezione del piano passante per P e per l'asse z con l'ellissoide e il meridiano fondamentale è quello passante per $A(a, 0, 0)$.

Sia \mathcal{N} la "gran normale", cioè la misura del segmento PQ ; allora

$$\begin{cases} x = \mathcal{N} \cos \phi \cos \theta \\ y = \mathcal{N} \sin \phi \cos \theta \\ z = \mathcal{N}(1 - e^2) \sin \theta \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} \phi = \arctan \frac{y}{x} \\ \theta = \arcsin \frac{z}{\mathcal{N}(1-e^2)}. \end{cases}$$

Si verifica facilmente che

$$\mathcal{N} = \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \theta}}.$$

Naturalmente per $e = 0$, l'ellissoide diventa una sfera e \mathcal{N} è uguale al raggio della sfera.

Nota. L'Unione geodetica e geofisica internazionale ha stabilito, durante il congresso di Madrid del 1924, di assumere come ellissoide internazionale di riferimento quello calcolato da J.F.Hayford (1909) ponendo $a=6378388$ m, $\alpha=1/297$ e deducendo poi $b = a(1 - \alpha)=6356912$ m.

2.6 Geometria della sfera

Chiamasi geometria della sfera lo studio delle proprietà delle figure appartenenti ad una superficie sferica. La geometria della sfera fornisce un esempio abbastanza semplice di “geometria non-euclidea”, che ispirò certamente B. Riemann (1826-1866) nella sua rifondazione della geometria. Valgono le seguenti proprietà elementari.

Proposizione 2.6.1

1. *Da un punto di una superficie sferica escono quanti si vogliono cerchi massimi, i quali passano tutti anche per il punto diametralmente opposto a quello considerato.*
2. *Per due punti non diametralmente opposti passa uno ed un solo cerchio massimo.*
3. *Due cerchi massimi si incontrano sempre in due punti tra loro diametralmente opposti.*
4. *Due punti A e B sono situati da bande opposte di un cerchio massimo, se questo viene segnato dall'arco AB.*
5. *Due cerchi massimi dividono la superficie sferica in quattro parti dette angoli sferici. Tali angoli sferici risultano quindi delimitati da due semicirconferenze massime (dette lati) che si incontrano in due punti opposti (detti vertici).*

Per misura di un angolo sferico si intende la misura del diedro corrispondente e la sezione normale di tale diedro è per esempio individuata dall'angolo formato dalle tangenti ai lati uscenti dallo stesso vertice.

Tutta la nomenclatura in uso per gli angoli piani si trasporta integralmente agli angoli sferici, cosicché si parlerà di angoli adiacenti, consecutivi, opposti al vertice, ecc..

2.6.1 Triangolo sferico

Consideriamo tre semirette non complanari r_A, r_B, r_C di comune origine O e il triedro convesso intersezione dei semispazi delimitati dai piani $r_A r_B, r_B r_C, r_C r_A$ e contenenti rispettivamente r_C, r_A, r_B .

Angoli piani o facce del triedro sono gli angoli convessi $\widehat{r_A r_B}, \widehat{r_B r_C}, \widehat{r_C r_A}$; *angoli diedri* del triedro sono i diedri convessi di spigoli r_A, r_B, r_C intersezioni delle coppie di semispazi considerate.

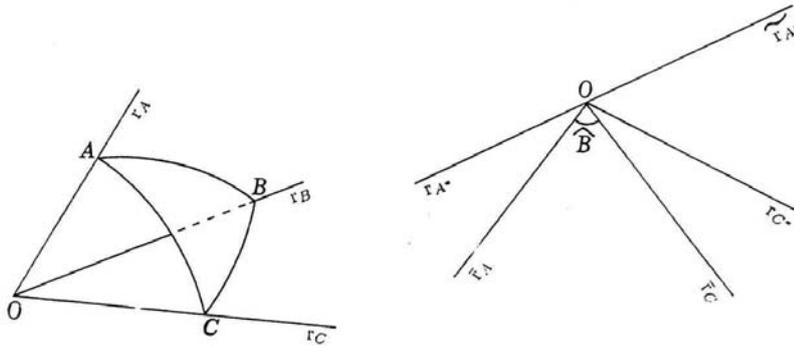
Indichiamo con τ il triedro in considerazione; $\tau \cap \mathbb{S}$ costituisce un *triangolo sferico* che ha per vertici $A = r_A \cap \mathbb{S}, B = r_B \cap \mathbb{S}, C = r_C \cap \mathbb{S}$; per lati gli archi di cerchi massimi $a = \widehat{BC} = r_B r_C \cap \mathbb{S}, b = \widehat{CA} = r_C r_A \cap \mathbb{S}, c = \widehat{AB} = r_A r_B \cap \mathbb{S}$; per angoli l'angolo \widehat{A} , che formano le semirette uscenti da A e tangenti agli archi \widehat{AC} e \widehat{AB} e gli angoli \widehat{B} e \widehat{C} definiti analogamente.

Assumendo il raggio della sfera come unità di misura per le lunghezze, si ha che le misure (in radianti) degli angoli piani di τ uguagliano le lunghezze dei corrispondenti lati del triangolo sferico e che le misure degli angoli diedri di τ sono uguali alle misure degli angoli del triangolo sferico. Quindi la misura di ogni lato e di ogni angolo di un triangolo sferico è compresa tra 0 e π .

Al triedro $Or_A r_B r_C$ si può far corrispondere un triedro $Or_{A^*} r_{B^*} r_{C^*}$ che dicesi *polare* (o *supplementare*) dove

- r_{A^*} è la semiretta perpendicolare al piano $r_B r_C$, situata dalla stessa parte di r_A ;
- r_{B^*} è la semiretta perpendicolare al piano $r_C r_A$, situata dalla stessa parte di r_B ;
- r_{C^*} è la semiretta perpendicolare al piano $r_A r_B$, situata dalla stessa parte di r_C .

Il triangolo sferico $A^* B^* C^*$, intersezione di $Or_{A^*} r_{B^*} r_{C^*}$ con \mathbb{S} si chiama *polare* (o *supplementare*) di ABC .



Teorema 2.6.2 *Per un triangolo sferico ABC valgono*

$$\begin{aligned}\widehat{A} + a^* &= \widehat{B} + b^* = \widehat{C} + c^* = \pi, \\ \widehat{A}^* + a &= \widehat{B}^* + b = \widehat{C}^* + c = \pi.\end{aligned}$$

Dimostrazione. Dimostriamo solo una di queste relazioni. Chiamiamo α il piano perpendicolare a r_B e passante per O . Siano $\bar{r}_A = r_B r_C \cap \alpha$ e $\bar{r}_C = r_A r_B \cap \alpha$. Allora $\widehat{\bar{r}_A \bar{r}_C} = \widehat{B}$.

Ora r_{C^*}, r_{A^*} sono contenute in α , $\widehat{r_{A^*} r_{C^*}} = \widehat{A^* C^*} = b^*$ e $\widehat{r_{C^*} \bar{r}_{A^*}} = \widehat{B}$, dove \bar{r}_{A^*} è la semiretta opposta di r_{A^*} .

Inoltre $\widehat{r_{A^*} r_{C^*}} + \widehat{r_{C^*} \bar{r}_{A^*}} = \pi$, dunque $b^* + \widehat{B} = \pi$.

Analogamente per le altre uguaglianze perché la relazione tra ABC e $A^* B^* C^*$ è simmetrica. \square

Ognuno dei criteri di uguaglianza stabiliti per i triedri dà luogo ad un analogo criterio per i triangoli sferici. Si hanno così i seguenti criteri di uguaglianza per i triangoli sferici.

Proposizione 2.6.3 *Sono uguali due triangoli sferici che abbiano ordinatamente uguali*

- 1) *due lati e l'angolo compreso;*
- 2) *due angoli e il lato comune;*
- 3) *i tre lati;*
- 4) *i tre angoli.*

Si osservi che da 4) segue che su una superficie sferica non esistono triangoli simili (e quindi nemmeno figure simili di qualsiasi specie) che non siano addirittura uguali.

2.6.2 Alcune importanti relazioni vettoriali

Se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono tre vettori dello spazio euclideo \mathbb{R}^3 , allora

$$(\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2) \wedge \mathbf{v}_3 = (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3) \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3) \mathbf{v}_1. \quad (2.1)$$

Per provare tale relazione basta considerare un riferimento ortonormale e verificare che i due membri sono uguali.

Analogamente si può verificare che vale la cosiddetta “identità di Lagrange”

$$(\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2) \cdot (\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2) = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_2 \end{vmatrix}. \quad (2.2)$$

Da questa identità segue che, se indichiamo con \mathcal{A} l'area del parallelogramma costruito sui vettori \mathbf{u}_1 e \mathbf{u}_2 , si ha

$$\mathcal{A}^2 = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2 \end{vmatrix}.$$

Osservazione 2.6.4 L'identità di Lagrange è caso particolare dell'identità di Gram. Considerati h vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_h$ si chiama determinante di Gram, relativo a tali vettori, il determinante della matrice

$$G(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_h) = (g_{ij}) \quad i, j = 1, \dots, h$$

dove $g_{ij} = \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j$. Si prova che

$$\det G(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_h) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_h \text{ dipendenti.}$$

Più precisamente si dimostra che

$$\det G(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_h) = \mathcal{V}_h^2$$

dove \mathcal{V}_h è il volume del parallelepipedo costruito sui vettori $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_h$. Ovviamente se i vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_h$ sono ortogonali, cioè $g_{ij} = 0$ per $i \neq j$, allora

$$\mathcal{V}_h = \|\mathbf{u}_1\| \cdot \dots \cdot \|\mathbf{u}_h\|.$$

Le identità precedenti ci permettono di dimostrare la “relazione fondamentale” della trigonometria sferica attribuita ad Eulero (1707-1783), benchè stabilita la prima volta dall'astronomo arabo Al Battani (850-929).

Teorema 2.6.5 Per un triangolo sferico ABC di lati a, b, c si ha

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \hat{A}.$$

Dimostrazione. Innanzitutto supponiamo fissato l'ordine delle semirette del triedro $Or_A r_B r_C$ in modo tale che i versori

$$\mathbf{r}_A = \overrightarrow{OA}, \quad \mathbf{r}_B = \overrightarrow{OB}, \quad \mathbf{r}_C = \overrightarrow{OC}$$

definiscano l'orientazione positiva dello spazio. Quindi, indicando con \sim la relazione di equiversità tra basi si ha

$$(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B, \mathbf{r}_C) \sim (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}).$$

Tenuto conto della definizione di triedro polare, se

$$\mathbf{r}_{A^*} = \overrightarrow{OA^*}, \quad \mathbf{r}_{B^*} = \overrightarrow{OB^*}, \quad \mathbf{r}_{C^*} = \overrightarrow{OC^*},$$

valgono

$$(\mathbf{r}_{A^*}, \mathbf{r}_{B^*}, \mathbf{r}_{C^*}) \sim (\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B, \mathbf{r}_C) \sim (\mathbf{r}_{A^*}, \mathbf{r}_B, \mathbf{r}_C) \sim (\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_{B^*}, \mathbf{r}_{C^*}).$$

Allora per le definizioni stesse di prodotto scalare e vettoriale si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_A \wedge \mathbf{r}_B &= (\sin c) \mathbf{r}_{C^*} & \mathbf{r}_A \cdot \mathbf{r}_B &= \cos c \\ \mathbf{r}_{A^*} \wedge \mathbf{r}_{B^*} &= (\sin c^*) \mathbf{r}_C = \sin(\pi - \widehat{C}) \mathbf{r}_C = (\sin \widehat{C}) \mathbf{r}_C \\ \mathbf{r}_{A^*} \cdot \mathbf{r}_{B^*} &= \cos c^* = \cos(\pi - \widehat{C}) = -\cos \widehat{C}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Valgono inoltre le analoghe relazioni permutando le lettere. Da (2.2) segue

$$(\mathbf{r}_A \wedge \mathbf{r}_B) \cdot (\mathbf{r}_C \wedge \mathbf{r}_A) = (\mathbf{r}_A \cdot \mathbf{r}_C)(\mathbf{r}_B \cdot \mathbf{r}_A) - (\mathbf{r}_B \cdot \mathbf{r}_C)(\mathbf{r}_A \cdot \mathbf{r}_A).$$

Tenuto conto delle (2.3) trovate, si ha per il primo membro

$$(\sin c) \mathbf{r}_{C^*} \cdot (\sin b) \mathbf{r}_{B^*} = -\sin b \sin c \cos \widehat{A}$$

e per il secondo

$$\cos b \cos c - \cos a$$

da cui la relazione fondamentale da dimostrare. \square

Se poniamo $\widehat{A} = \pi/2$, otteniamo

Corollario 2.6.6 *In un triangolo sferico rettangolo il coseno dell'ipotenusa è uguale al prodotto dei coseni dei cateti.*

Come vedremo dopo, questo è l'analogo del teorema di Pitagora.

Corollario 2.6.7 *Il lato a d'un triangolo sferico di lati b, c fissati è funzione strettamente crescente dell'angolo \widehat{A} .*

Corollario 2.6.8 *Per ogni triangolo sferico si ha*

$$|b - c| < a < b + c \quad e \quad a + b + c < 2\pi.$$

Inversamente, se tre numeri reali $a, b, c \in]0, \pi[$ verificano le condizioni di sopra, allora esiste un triangolo sferico di lati a, b, c e questo triangolo è unico a meno di isometrie.

Dimostrazione. Poiché $|\cos \widehat{A}| < 1$, dalla relazione fondamentale segue

$$-1 < \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} < 1$$

e quindi, poichè $\sin b \sin c > 0$, allora

$$-\sin b \sin c < \cos a - \cos b \cos c < \sin b \sin c$$

da cui

$$\cos(b + c) < \cos a < \cos(b - c),$$

la quale per $a, b, c \in]0, \pi[$ implica $a < b+c, b+c < 2\pi-a$ e pertanto $a+b+c < 2\pi$; poi, permutando i lati,

$$b < c+a, \quad c < a+b \quad \Rightarrow \quad |b-c| < a.$$

Inversamente, supponiamo che a, b, c verifichino le due condizioni del lemma, allora

$$\left| \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} \right| < 1$$

e quindi segue l'esistenza di un $\widehat{A} \in]0, \pi[$ tale che

$$\cos \widehat{A} = \left| \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} \right|.$$

Trascuriamo la dimostrazione dell'unicità a meno di isometrie. \square

Osservazione 2.6.9 Da $0 < a+b+c < 2\pi$ e da $\widehat{A}^* + a = \widehat{B}^* + b = \widehat{C}^* + c = \pi$ segue che

$$\pi < \widehat{A}^* + \widehat{B}^* + \widehat{C}^* < 3\pi, \quad \pi < \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} < 3\pi.$$

La proprietà $0 < a+b+c < 2\pi$ si trova in Euclide (XI, 20, 21) dimostrata per i triedri, senza usare la geometria della sfera.

Osservazione 2.6.10 Tenendo conto che

$$\tan \frac{\widehat{A}}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \widehat{A}}{1 + \cos \widehat{A}}} = \sqrt{\frac{\sin b \sin c - \cos a + \cos b \cos c}{\sin b \sin c + \cos a - \cos b \cos c}},$$

dopo semplici manipolazioni si ha

$$\tan \frac{\widehat{A}}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-b) \sin(p-c)}{\sin p \sin(p-a)}} \quad (2.4)$$

dove p è il semiperimetro del triangolo. Da $\widehat{A} = \widehat{B}$ segue $\tan \frac{\widehat{A}}{2} = \tan \frac{\widehat{B}}{2}$ e per la (2.4)

$$\widehat{A} = \widehat{B} \Leftrightarrow a = b.$$

Quindi un triangolo sferico sarà *equilatero* (cioè $a = b = c$) se e solo se i tre angoli sono uguali. Ma contrariamente al caso piano questo valore comune dei tre angoli non è univocamente individuato, ma può variare in tutto $] \pi/3, \pi[$: per esempio si possono costruire facilmente triangoli aventi tre angoli retti. Analogamente, se $a < 2\pi/3$, esiste un triangolo equilatero di lato a .

Teorema 2.6.11 (dei seni per i triangoli sferici) *Per un triangolo sferico ABC vale*

$$\frac{\sin \widehat{A}}{\sin a} = \frac{\sin \widehat{B}}{\sin b} = \frac{\sin \widehat{C}}{\sin c}.$$

Dimostrazione. Da (2.1) si ha

$$|(\mathbf{r}_A \wedge \mathbf{r}_B) \wedge (\mathbf{r}_C \wedge \mathbf{r}_A)| = |(\mathbf{r}_A \cdot \mathbf{r}_C \wedge \mathbf{r}_A)\mathbf{r}_B - (\mathbf{r}_B \cdot \mathbf{r}_C \wedge \mathbf{r}_A)\mathbf{r}_A| = |\mathbf{r}_A \cdot \mathbf{r}_B \wedge \mathbf{r}_C|$$

e quindi

$$|\mathbf{r}_A \cdot \mathbf{r}_B \wedge \mathbf{r}_C| = |\sin \widehat{C} \mathbf{r}_{C^*} \wedge \sin b \mathbf{r}_{B^*}| = \sin b \sin c \sin \widehat{A}.$$

Poiché $\mathbf{r}_A \cdot \mathbf{r}_B \wedge \mathbf{r}_C$ resta inalterato per una permutazione ciclica dei tre vettori si ha

$$\sin b \sin c \sin \widehat{A} = \sin c \sin a \sin \widehat{B} = \sin a \sin b \sin \widehat{C},$$

da cui il teorema voluto. \square

Nota storica. Le origini dello studio della geometria sulla sfera risalgono, confondendosi con quelle dell'Astronomia, a quando l'uomo, attratto dal fascino della volta celeste, cercò di sottomettere al ragionamento i fenomeni celesti.

La Sferica, sorta tra i Caldei e i Babilonesi, ebbe, accanto all'Astronomia, grande sviluppo presso i Greci. Il più antico trattato di Sferica giunto fino a noi è dovuto ad un contemporaneo di Euclide, Autolico da Pitone.

Anche Euclide trattò della Sferica in uno dei suoi scritti, seguito da Teodosio da Tripoli (107-ca 43 a.C.) e più tardi da Menelao di Alessandria (I sec. A.C.), con il quale la geometria sferica raggiunge l'apogeo. Egli introduce la nozione di "triangolo sferico" e trova il seguente teorema dal quale si può dedurre tutta la trigonometria sferica (come ha fatto Tolomeo).

Teorema 2.6.12 (di Menelao) *Se i lati \widehat{BC} , \widehat{CA} , \widehat{AB} di un triangolo sferico ABC sono tagliati nei punti L, M, N da un arbitrario circolo massimo, allora*

$$\left| \frac{\sin \widehat{BL}}{\sin \widehat{CL}} \cdot \frac{\sin \widehat{CM}}{\sin \widehat{AM}} \cdot \frac{\sin \widehat{AN}}{\sin \widehat{BN}} \right| = 1.$$

Una proposizione equivalente al teorema è la seguente:

Proposizione 2.6.13 *Se il triangolo sferico ABC è rettangolo in A si ha*

$$\tan \widehat{AB} = \tan \widehat{BC} \cos \widehat{B}.$$

Osservazione 2.6.14 Nella relazione fondamentale della trigonometria gli archi sono misurati in radianti. Se però vogliamo confrontare triangoli appartenenti a sfere di raggio diverso, dalla dimostrazione di quella formula segue subito che essa si scrive

$$\cos \frac{a}{r} = \cos \frac{b}{r} \cos \frac{c}{r} + \sin \frac{b}{r} \sin \frac{c}{r} \cos \widehat{A} \quad (2.5)$$

dove r è il raggio della sfera a cui appartiene il triangolo ABC .

Ora se sviluppiamo in serie le funzioni seno e coseno e poi consideriamo $r \rightarrow \infty$ la (2.5) diventa

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A}$$

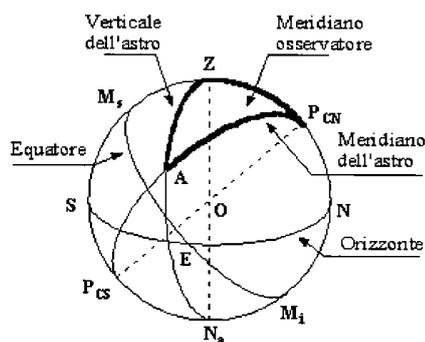
cioè la ben nota formula attribuita a Carnot (ma in effetti di F. Viète (1540-1603)). Dunque la trigonometria piana si presenta come limite della trigonometria sferica (quando il raggio della sfera va all'infinito).

Il Loria [L] nota il curioso fatto che storicamente la trigonometria sferica ha preceduto quella piana.

Il concetto di triangolo sferico fu generalizzato da A.F.Möbius nel seguente modo. Dati tre punti A, B, C di una sfera, non appartenenti allo stesso circolo massimo, si traccino i circoli massimi passanti per i punti a due a due e si fissi sopra di essi, a piacere, il senso in cui percorrerli positivamente. Così si ottengono 16 triangoli, poichè si hanno 2^4 modi di scambiare le direzioni positive sui circoli e il senso delle rotazioni sulla sfera.

2.7 Un'applicazione all'astronomia

Guardando il firmamento si ha l'impressione che la Terra sia al centro di una sfera di raggio grandissimo sulla quale sono proiettati gli astri. La "Sfera celeste" è solo un'illusione, ma viene presa in considerazione in astronomia per determinare la posizione di un astro rispetto alla terra. A tal fine si fissano degli elementi di riferimento.



Il prolungamento dell'asse terrestre (*asse del mondo*) incontra la Sfera celeste in due punti detti Polo Nord e Polo Sud celesti. L'Equatore celeste è la circonferenza massima ottenuta intersecando la Sfera celeste con il piano passante per l'equatore terrestre. I meridiani ed i paralleli celesti sono l'equivalente dei meridiani e paralleli terrestri. Per effetto della rotazione terrestre, gli astri sembrano percorrere dei paralleli celesti sulla Sfera che diventano sempre più piccoli quando gli astri si avvicinano al Polo Nord celeste. Il meridiano origine sulla Sfera celeste è per convenzione il meridiano passante per il punto γ o punto di Ariete (corrisponde al punto in cui la traiettoria apparente del Sole attraversa l'equatore celeste nell'equinozio di primavera). Si possono definire le coordinate celesti o coordinate equatoriali di un astro corrispondenti rispettivamente alla latitudine ed alla longitudine: la *declinazione celeste* $\delta \in]-\pi/2, \pi/2[$ e la *ascensione retta* $\alpha \in [0, 2\pi[$.

Accanto a questo sistema di riferimento si utilizza un sistema più intuitivo e legato all'osservatore.

Consideriamo un osservatore O sulla Terra. Date le distanze che intervengono, possiamo considerare la Terra puntiforme ed O posizionato al centro della Terra. Zenit è il punto in cui la verticale sopra la testa dell'osservatore incontra la Sfera celeste, mentre Nadir è il suo punto opposto. Orizzonte celeste è la circonferenza massima ottenuta intersecando la Sfera celeste con il piano perpendicolare alla verticale passante per l'osservatore. L'orizzonte celeste divide la Sfera nell'Emisfero visibile (che contiene lo Zenit) e l'Emisfero invisibile (che contiene il Nadir). I *verticali* sono le circonferenze massime passanti per lo Zenit ed il Nadir. Si dice *meridiano dell'osservatore* il meridiano celeste che passa per lo Zenit e che si ottiene intersecando il piano del meridiano terrestre passante per l'osservatore con la Sfera celeste. Più esattamente si definisce meridiano superiore la semicirconferenza passante per il Polo Nord Celeste, lo Zenit ed il Polo Sud Celeste e meridiano inferiore la restante semicirconferenza. Il piano del meridiano dell'osservatore interseca l'orizzonte nei due punti cardinali Nord e Sud.

Nel sistema altazimutale si determina la posizione di un astro tramite la sua latitudine e la sua longitudine calcolate rispetto all'orizzonte celeste ed al verticale passante per il Nord. Più precisamente, si chiama *azimut* (Az) l'angolo compreso tra il piano del verticale passante per il Nord ed il piano passante per il verticale dell'astro. *Altezza* h è l'angolo formato dalla retta congiungente l'astro con l'osservatore e l'orizzonte celeste.

Per passare da un sistema di coordinate all'altro è utile la formula di Eulero. A tal fine si considera il triangolo (sferico) astronomico o di posizione che ha vertici nell'astro A , nel Polo Nord celeste P_{CN} e nello Zenit Z .

È immediato che la distanza polare p , cioè la lunghezza del lato $P_{CN}A$, è $\pi/2 - \delta$, la distanza zenitale z , cioè la lunghezza del lato AZ , è $\pi/2 - h$ e la lunghezza c del lato ZP_{CN} è la colatitudine (nel sistema di riferimento terrestre) dell'osservatore.

L'angolo al polo $\widehat{P_{CN}}$ è pari alla differenza d tra l'ascensione retta dello Zenit e l'ascensione retta dell'astro se $d < \pi$ ed è $2\pi - d$ se $d \geq \pi$. L'angolo azimutale \widehat{Z} coincide con l'azimut Az se $Az < \pi$ ed è $2\pi - Az$ se $Az \geq \pi$.

Come è noto (vedi Teorema 2.6.5), valgono le formule

$$\begin{aligned}\cos z &= \cos c \cos p + \sin c \sin p \cos \widehat{P_{CN}} \\ \cos p &= \cos c \cos z + \sin c \sin z \cos \widehat{Z},\end{aligned}$$

da cui segue, tenendo conto delle espressioni di c , p e z ,

$$\begin{aligned}\sin h &= \sin \phi \sin \delta + \cos \phi + \sin \delta + \cos \phi \cos \delta \cos \widehat{P_{CN}} \\ \sin \delta &= \sin \phi \sin h + \cos \phi \cos h \cos \widehat{Z},\end{aligned}$$

dove ϕ è la latitudine dell'osservatore.

Dalle ultime formule, si vede facilmente come passare dalle coordinate celesti alle coordinate altazimutali e viceversa, nota la latitudine dell'osservatore e nota l'ascensione retta dello Zenit (dato fornito per ogni punto della Terra in un dato istante dalle cosiddette *Effemeridi*).

Nella navigazione astronomica, si suole utilizzare tali cambiamenti di coordinate per calcolare la posizione stimata dell'imbarcazione, tramite la determinazione dei cerchi d'altezza, cioè dei luoghi della terra dai quali si vede sotto una stessa altezza un astro. Più precisamente, si rileva con il sestante in un dato istante l'altezza h_o di un astro. Utilizzando le formule precedenti e le Effemeridi, si determina l'altezza calcolata h_c , ossia l'altezza sotto la quale l'osservatore vedrebbe l'astro se, in quello stesso istante, l'imbarcazione si trovasse nella posizione stimata dal navigatore. Valutando la differenza tra h_o e h_c , si traggono informazioni sulle coordinate dell'imbarcazione.

2.8 La metrica intrinseca sulla sfera

Siano $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{S}$. Si chiama *distanza geodetica* o *distanza intrinseca* tra \mathbf{x} e \mathbf{y} , $d_{\mathbb{S}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, la lunghezza dell'arco di cerchio massimo passante per essi non maggiore di π (se \mathbf{x} e \mathbf{y} sono diametralmente opposti qualunque sia l'arco di cerchio massimo considerato è $d_{\mathbb{S}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \pi$).

Sfruttando la struttura di spazio vettoriale euclideo di \mathbb{R}^{n+1} possiamo anche scrivere in generale per $\mathbf{S}^n(r) \subset \mathbb{R}^{n+1}$

$$d_{\mathbb{S}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = r \arccos \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{r^2}$$

dove $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n+1} x_i y_i$. Naturalmente $0 \leq d_{\mathbb{S}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq r\pi$.

Teorema 2.8.1 *L'applicazione*

$$d_{\mathbb{S}} : \mathbb{S} \times \mathbb{S} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

è una distanza.

Dimostrazione. Infatti ovviamente si ha $d_{\mathbb{S}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d_{\mathbb{S}}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ e $d_{\mathbb{S}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ se e solo se $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Resta da dimostrare la disuguaglianza triangolare. Se i vettori $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ non appartengono allo stesso piano essa segue dal Corollario 2.6.8; se invece sono complanari è immediata. \square

Siano A_0, A_1, \dots, A_k una successione di punti di \mathbb{S} e $A_i \widehat{A}_{i+1}$ gli archi di cerchio massimo (minori o uguali di π) congiungenti i punti A_i e A_{i+1} . L'insieme

$$A_0 \widehat{A}_1, A_1 \widehat{A}_2, \dots, A_{k-1} \widehat{A}_k$$

è detto *poligonale sferica* congiungente A_0 con A_k e si indica con $A_0 A_1 \dots A_k$.

La disuguaglianza triangolare valida per $d_{\mathbb{S}}$ ci permette di concludere che se $A_0 A_1 \dots A_k$ è una poligonale sferica congiungente $A_0 = \mathbf{x}$ e $A_k = \mathbf{y}$, allora l'arco di cerchio massimo $A_0 \widehat{A}_k$ è la "poligonale" di lunghezza minima congiungente i punti \mathbf{x} e \mathbf{y} .

Consideriamo ora una curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}$ congiungenti i punti \mathbf{x} e \mathbf{y} ; quindi $\gamma(0) = \mathbf{x}$ e $\gamma(1) = \mathbf{y}$.

Se $T = \{t_i : i = 0, \dots, k\}$ una decomposizione di $[0, 1]$, la poligonale sferica di vertici $A_i = \gamma(t_i)$ può dirsi inscritta nella curva γ .

Posto $\mu(T) = \sup |t_i - t_{i+1}|$, se come nel caso ordinario definiamo

$$\widetilde{\mathcal{L}}(\gamma) = \lim_{\mu(T) \rightarrow 0} \sum_i m(A_i \widehat{A}_{i+1})$$

segue facilmente che

$$d_{\mathbb{S}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \inf_{\gamma} \{\widetilde{\mathcal{L}}(\gamma) : \gamma(0) = \mathbf{x}, \gamma(1) = \mathbf{y}\}.$$

Ma γ è una curva anche di \mathbb{R}^3 e quindi

$$\mathcal{L}(\gamma) = \lim_{\mu(T) \rightarrow 0} \sum_i m(\overline{A_i A_{i+1}})$$

dove $m(\overline{A_i A_{i+1}})$ è la misura del segmento $\overline{A_i A_{i+1}}$. Ma in piccolo l'arco $A_i \widehat{A}_{i+1}$ si confonde con il segmento $\overline{A_i A_{i+1}}$, da cui la conclusione che $\mathcal{L}(\gamma) = \widetilde{\mathcal{L}}(\gamma)$.

2.9 Eccesso sferico e curvatura

Si chiama *eccesso sferico* di un triangolo sferico ABC il numero reale

$$\varepsilon = \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} - \pi.$$

Si vede subito che $\varepsilon > 0$, poichè $\pi < \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} < 3\pi$, come provato nell'osservazione 2.6.9.

Sia $A_1A_2\dots A_n$ un poligono sferico, cioè l'intersezione di \mathbb{S} con un angoloide convesso $Or_{A_1}r_{A_2}\dots r_{A_n}$ di vertice O e di spigoli $r_{A_1}, r_{A_2}, \dots, r_{A_n}$ considerati nell'ordine. Si chiama eccesso sferico del poligono

$$\varepsilon = \widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 + \dots + \widehat{A}_n - (n - 2)\pi.$$

Decomponendo il poligono sferico in triangoli sferici ottenuti congiungendo un vertice con gli altri $n - 3$ vertici non consecutivi mediante archi di cerchio massimo, si prova anche ora che $\varepsilon > 0$.

Richiamiamo ora alcune definizioni. Si dice *spicchio sferico* la porzione di spazio limitata dalla sfera e dalle facce di un diedro avente per spigolo un diametro di essa; *fuso sferico* è la parte di superficie sferica appartenente ad uno spicchio sferico.

Si osservi che per una stessa sfera, spicchi e fusi sono proporzionali ai corrispondenti diedri. Quindi, indicati con V_α e S_α rispettivamente il volume di uno spicchio e l'area di un fuso corrispondenti al diedro α , si ha

$$V_\alpha : \frac{4}{3}\pi r^3 = \alpha : 2\pi, \quad S_\alpha : 4\pi r^2 = \alpha : 2\pi.$$

Dunque $V_\alpha = \frac{2}{3}r^3\alpha$ e $S_\alpha = 2r^2\alpha$.

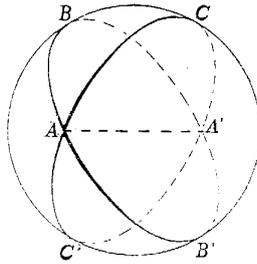
Dato un fuso sferico F , si dice *fuso sferico completo*, e si indica con \overline{F} , l'unione di F con il suo simmetrico rispetto allo spigolo del diedro che individua F .

Siamo ora in grado di dimostrare il notevole

Teorema 2.9.1 (Girard (1625)) *L'area di un triangolo sferico uguaglia il prodotto dell'eccesso sferico per il quadrato del raggio della sfera:*

$$\mathcal{A}(ABC) = \varepsilon r^2.$$

Dimostrazione. Indichiamo con F_A, F_B, F_C i fusi sferici individuati da diedri i cui spigoli passano rispettivamente per A, B e C e le cui misure valgono \widehat{A}, \widehat{B} e \widehat{C} .



Ora

$$ABC = F_A \cap F_B \cap F_C$$

anzi

$$F_A \cap F_B = ABC.$$

Indicati con A', B', C' gli antipodali di A, B, C si ha

$$\overline{F}_A \cap \overline{F}_B = ABC \cup A'B'C'.$$

D'altronde $\overline{F}_A, \overline{F}_B, \overline{F}_C$ ricoprono l'intera sfera sovrapponendosi tre volte sui triangoli $ABC, A'B'C'$. Quindi passando alle misure

$$m(\overline{F}_A) + m(\overline{F}_B) + m(\overline{F}_C) = m(\mathbb{S}) + 2m(ABC) + 2m(A'B'C').$$

Poiché ABC e $A'B'C'$ sono congruenti si ha:

$$4\widehat{A}r^2 + 4\widehat{B}r^2 + 4\widehat{C}r^2 = 4\pi r^2 + 4m(ABC)$$

e dunque

$$\mathcal{A}(ABC) = m(ABC) = [\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} - \pi]r^2 = \varepsilon r^2. \quad \square$$

Il teorema si estende facilmente ad un qualsiasi poligono sferico $A_1A_2\dots A_n$. Suddividendo il poligono in $n - 2$ triangoli sferici mediante gli $n - 3$ archi di cerchio massimo che congiungono un vertice con i vertici non consecutivi e applicando il risultato per i triangoli si ottiene per l'area del poligono sferico l'espressione εr^2 .

I risultati precedenti si possono considerare come casi particolari di un teorema più generale del quale diamo solo l'enunciato:

Theorema elegantissimum (Gauss, 1827) *Sia M una superficie e T un triangolo geodetico di vertici A, B, C . Allora*

$$\int_T K(p)d\sigma = \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} - \pi$$

dove $K(p)$ è la curvatura gaussiana della superficie in p .

Se K è costante su M , allora $K(p) = K_0$ per ogni $p \in M$ e quindi

$$K_0 \int_T d\sigma = \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} - \pi$$

dunque

$$K_0 \mathcal{A}(T) = \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} - \pi.$$

Se $K_0 = 0$ (i.e. M è una superficie sviluppabile), segue

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \pi$$

cioè su M vale l'*ipotesi dell'angolo retto*; se $K_0 > 0$ (i.e. M è applicabile su una sfera di raggio $r = \sqrt{1/K_0}$) segue

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} > \pi$$

cioè su M vale l'*ipotesi dell'angolo ottuso*; se $K_0 < 0$ (i.e. M è applicabile su una pseudosfera) segue

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} < \pi$$

cioè su M vale l'*ipotesi dell'angolo acuto*.

Risulta così che la geometria sopra una superficie a curvatura costante positiva o negativa si può considerare come un'interpretazione concreta della geometria non euclidea che si ottiene in una regione *limitata* di piano adottando l'ipotesi dell'angolo ottuso o quella dell'angolo acuto.

Il teorema precedente mette anche in evidenza che la curvatura gaussiana dipende solo dalla metrica intrinseca della superficie (Theorema egregium). L'invariante

$$K(p) = \lim_{T \rightarrow p} \frac{\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} - \pi}{\mathcal{A}(T)}.$$

misura il *difetto di euclidicità* della superficie nell'intorno di p .

Osservazione 2.9.2 Gli abitanti della Terra, capaci solo di misurazioni locali, dal fatto che la somma degli angoli di un triangolo sia diversa da due retti, possono dedurre di vivere su una superficie non piana, ma curva. Se essi vedono che la somma è sempre maggiore di due retti, la curvatura sarà positiva e dall'ultima formula, se $K(p)$ è costante, possono dedurre di vivere su una sfera di raggio $1/\sqrt{K}$. Naturalmente, affinché la conclusione sia attendibile, il triangolo deve essere abbastanza grande e non si devono commettere errori di misurazione.

Se M è una superficie con curvatura costante K , la formula (2.5) si generalizza in quella di E.F.A. Minding (1840):

$$\cos a\sqrt{K} = \cos b\sqrt{K} \cos c\sqrt{K} + \sin b\sqrt{K} \sin c\sqrt{K} \cos \widehat{A},$$

che per la sfera ($K = 1/r^2$) ridà quella nota. Se la superficie ha curvatura negativa $K = -1$, allora $\sqrt{K} = i$ e usando le funzioni trigonometriche iperboliche

$$\cosh x = \cos ix, \quad \sinh x = \frac{1}{i} \sin ix$$

si ottiene

$$\cosh a = \cosh b \cosh c - \sinh b \sinh c \cos \widehat{A}$$

che (con motivazione diversa) è identica ad una formula data da N.I.Lobacevsky nel 1837, per la sua geometria immaginaria. La connessione tra la geometria sferica “reale” e quella sferica “immaginaria” era stata adombrata alla fine del 1700 da J.H. Lambert (1728-1777). Chi provò che Lobacevskij e Minding avevano descritto due versioni della stessa geometria fu Eugenio Beltrami nel 1868 nel celebre *Saggio di interpretazione della geometria non euclidea*.

Osservazione 2.9.3 Un teorema, molto usato in Geodesia, dovuto a A.M. Legendre (1752-1833) e perfezionato da Gauss, permette di ricondurre la “risoluzione di un triangolo sferico” ad uno rettilineo, quando il triangolo considerato è “piccolo”.

Sia ABC un triangolo geodetico su una superficie Σ , avente lati di lunghezza a, b, c . Consideriamo nel piano euclideo un triangolo di vertici A', B', C' , avente lati di lunghezza ancora a, b, c . Se indichiamo con \widehat{A} l'angolo nel vertice A e con σ l'area del triangolo $A'B'C'$, il teorema di Gauss afferma che

$$\widehat{A} = \widehat{A'} + \frac{\sigma}{12} (2K(A) + K(B) + K(C)) + o(a^4 + b^4 + c^4);$$

analogamente per gli altri angoli.

Quindi se Σ è una sfera, allora $K(A) = K(B) = K(C) = K$ e

$$\widehat{A} = \widehat{A'} + \frac{\sigma}{3} K + o(a^4 + b^4 + c^4),$$

che è il risultato di Legendre (1787).

Naturalmente se approssimiamo il nostro pianeta non ad una sfera, ma ad un ellissoide di rotazione, la correzione dipenderà dai vertici del triangolo.

2.10 La formula di Eulero e il teorema di Gauss-Bonnet

Esponiamo ora una dimostrazione molto ingegnosa della formula di Eulero dovuta a Legendre (1794).

Teorema 2.10.1 *Se \mathcal{P} è un poliedro convesso, indicati con v, s, f rispettivamente il numero di vertici, spigoli e facce di \mathcal{P} vale*

$$v - s + f = 2.$$

Dimostrazione. Sia \mathcal{P} un poliedro convesso e \mathbb{S} la sfera di raggio 1 e centro in un qualsiasi punto interno del poliedro. Se proiettiamo il poliedro su \mathbb{S} , allora

ogni faccia di \mathcal{P} si trasforma in un poligono sferico \mathcal{P}_h ($h = 1, \dots, f$) per il quale l'area è come sappiamo

$$\mathcal{A}(\mathcal{P}_h) = \sum_{i=1}^{n_h} \alpha_{i_h} - \pi(n_h - 2)$$

dove α_{i_h} sono gli angoli interni di \mathcal{P}_h e n_h è il numero dei lati di \mathcal{P}_h . Allora

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathbb{S}) &= \sum_{h=1}^f \mathcal{A}(\mathcal{P}_h) = \sum_{h=1}^f \left[\sum_{i=1}^{n_h} \alpha_{i_h} - \pi(n_h - 2) \right] = \\ &= \sum_{h=1}^f \left(\sum_{i=1}^{n_h} \alpha_{i_h} \right) - \pi \sum_{h=1}^f n_h + 2\pi f = 2\pi v - 2\pi s + 2\pi f \end{aligned}$$

da cui la conclusione poiché $\mathcal{A}(\mathbb{S}) = 4\pi$. □

Concludiamo dimostrando il teorema di Gauss-Bonnet a partire dal “theorem elegantissimum” di Gauss.

Ricordiamo che una superficie compatta orientabile di genere $g \geq 0$ è una superficie M omeomorfa ad una ciambella con g buchi; così la sfera è di genere 0, mentre il toro è di genere 1.

Considerata su una qualsiasi superficie M una reticolazione in poligoni geodetici, si chiama *caratteristica di Eulero-Poincaré* il numero

$$\chi(M) = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2,$$

dove α_0 è il numero di vertici della reticolazione, α_1 il numero dei lati, α_2 il numero delle facce (poligoni geodetici) della reticolazione.

Se M è una superficie compatta orientabile di genere g , si prova che

$$\chi(M) = 2 - 2g,$$

quindi $\chi(M)$ non dipende dalla reticolazione scelta, ma solo dal genere; esso è un invariante topologico, anzi omotopico. Se M è una sfera ($g = 0$), in accordo col teorema precedente si ha $\chi(M) = 2$.

Teorema 2.10.2 (di Gauss-Bonnet) *Se M è una superficie regolare compatta ed orientabile, allora*

$$\int_M K(p) d\sigma = 2\pi\chi(M),$$

dove $K(p)$ è la curvatura gaussiana in p .

Dimostrazione. Si consideri una reticolazione di M in triangoli geodetici, T_i , con $i = 1, \dots, n$. Allora, per il “theoremata elegantissimum”,

$$\begin{aligned} \int_M K(p) d\sigma &= \sum_{i=1}^n \int_M K(p) d\sigma = \sum_{i=1}^n (\widehat{A}_i + \widehat{B}_i + \widehat{C}_i - \pi) = \\ &= \sum_{i=1}^n (\widehat{A}_i + \widehat{B}_i + \widehat{C}_i) - n\pi, \end{aligned}$$

essendo $n = \alpha_2$ il numero delle facce della reticolazione. Ora $\sum_{i=1}^n (\widehat{A}_i + \widehat{B}_i + \widehat{C}_i) = 2\pi\alpha_0$. Quindi

$$\int_M K(p) d\sigma = 2\pi\alpha_0 - \alpha_2\pi = 2\pi\alpha_0 - 3\pi\alpha_2 + 2\pi\alpha_2.$$

Ma $3\alpha_2 = 2\alpha_1$, poichè ogni triangolo ha 3 lati e ogni lato appartiene a 2 triangoli adiacenti, per cui

$$\int_M K(p) d\sigma = 2\pi\alpha_0 - 2\pi\alpha_1 + 2\pi\alpha_2 = 2\pi\chi(M). \quad \square$$

L'interesse del teorema è ovvio: la quantità a primo membro, costruita mediante elementi geometrici differenziali locali, risulta un invariante topologico. Quindi se deformiamo M , la curvatura $K(p)$ nel singolo punto p può cambiare, ma la *curvatura complessiva* (detta anche curvatura totale) rimane invariata.

Il teorema è valido anche nel caso in cui M è un poliedro convesso: in tal caso $K(p) = 0$ in ogni punto diverso dai vertici, dove possiamo pensare concentrata la curvatura.

Se p è un vertice, indicata con $K(p)$ la differenza tra 2π e la somma degli angoli concorrenti in p , il teorema di Gauss-Bonnet ha la seguente forma discreta:

$$\sum_{i=1}^m K(p_i) = 2\pi\chi(M)$$

dove p_1, \dots, p_m sono i vertici del poliedro.

Per esempio, per un cubo

$$K(p_i) = 2\pi - \frac{3}{2}\pi = \frac{\pi}{2} \quad (i = 1, \dots, 8)$$

e

$$\sum_{i=1}^8 K(p_i) = 8 \cdot \frac{\pi}{2} = 4\pi = 2\pi\chi(M);$$

per un tetraedro

$$K(p_i) = 2\pi - 3 \cdot \frac{\pi}{3} = \pi \quad (i = 1, \dots, 4), \quad \sum_{i=1}^4 K(p_i) = 4\pi.$$

2.11 Nota storica

L'invenzione della geometria non-euclidea, nata dal famoso "problema delle parallele", è universalmente riconosciuta come una conquista del XIX secolo, principalmente di C.F.Gauss (1777-1855), J.Bolyai (1802-1860) e N.Lobatchevsky (1793-1856). Ma, come ha messo in luce I. Tòth (1967), già alcune opere di Aristotele contengono accenni alla possibilità di un approccio non euclideo al problema delle parallele. Per Aristotele l'essenza delle proposizioni geometriche sta nel loro essere euclidee o non euclidee e questo viene trasmesso alle loro conseguenze, come discute nell'*Ethica ad Eudemum*. Egli dice che "l'essenza del triangolo è la somma dei suoi angoli interni che può essere uguale, maggiore o minore di due retti". Ma per Aristotele sono considerate solo possibilità logiche e non geometriche, lontane quindi dalla realtà.

Capitolo 3

La proiezione stereografica

3.1 Definizione e proprietà

Consideriamo la sfera in \mathbb{R}^3 :

$$\mathbb{S} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

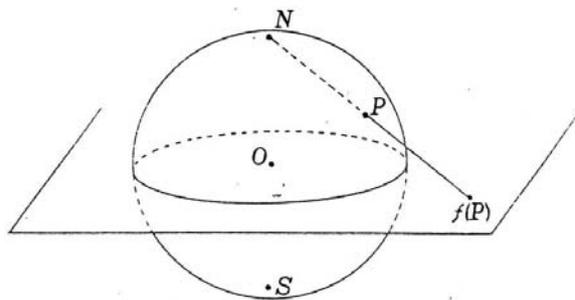
Si chiama *proiezione stereografica dal polo nord sul piano equatoriale*, che identifichiamo con \mathbb{R}^2 , l'applicazione

$$f : \mathbb{S} - \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

tale che se P è un punto di \mathbb{S} allora $N, P, f(P)$ sono allineati. Troviamone l'espressione. Se $\tilde{P}(u, v, w)$ è un punto allineato con N e $P(x, y, z)$ si ha

$$\tilde{P} = \lambda N + (1 - \lambda)P \tag{3.1}$$

per un opportuno λ reale.



Imponendo che \tilde{P} appartenga a \mathbb{R}^2 ed esplicitando (3.1) si ha

$$\begin{aligned} u &= \lambda \cdot 0 + (1 - \lambda)x = (1 - \lambda)x \\ v &= \lambda \cdot 0 + (1 - \lambda)y = (1 - \lambda)y \\ 0 = w &= \lambda \cdot 1 + (1 - \lambda)z. \end{aligned}$$

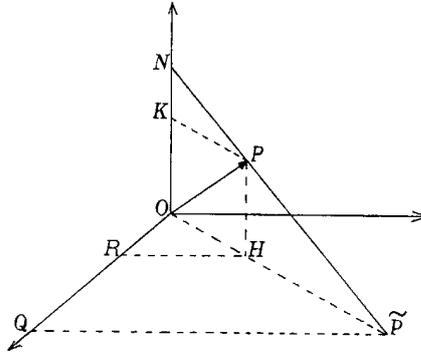
Dall'ultima uguaglianza si ottiene $\lambda = z/(z - 1)$ e sostituendo nelle prime due si ha che $f : (x, y, z) \mapsto (u, v)$ dove

$$u = \frac{x}{1 - z} \quad \text{e} \quad v = \frac{y}{1 - z}. \quad (3.2)$$

Notiamo che si può ottenere lo stesso risultato osservando che vale

$$u : x = v : y = O\tilde{P} : OH = ON : NK = 1 : (1 - z)$$

per la similitudine tra i triangoli $ON\tilde{P}$ e NKP e tra i triangoli $OQ\tilde{P}$ e ORH .



Se sostituiamo le espressioni (3.2) in $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ si hanno

$$\begin{cases} x = \frac{2u}{u^2 + v^2 + 1} \\ y = \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1} \\ z = \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \end{cases} \quad (3.3)$$

che possono essere considerate come equazioni parametriche (razionali) della sfera.

Notiamo che le equazioni precedenti individuano trasformazioni quadratiche.

Proprietà 3.1.1 *La proiezione stereografica trasforma circonferenze della sfera in circonferenze o rette del piano equatoriale.*

Dimostrazione. Sia C una circonferenza della sfera con rappresentazione analitica

$$C : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1; \\ ax + by + cz + d = 0 \end{cases} . \quad (3.4)$$

Sostituendo le espressioni trovate per x, y, z nella seconda delle (3.4) si ottiene

$$2au + 2bv + c(u^2 + v^2 - 1) + d(u^2 + v^2 + 1) = 0$$

che può essere riscritta

$$(c + d)(u^2 + v^2) + 2au + 2bv + d - c = 0. \quad (3.5)$$

Osserviamo che il piano di equazione $ax + by + cz + d = 0$ passa per il polo nord se e solo se $d = -c$, come si può vedere facilmente sostituendo le coordinate di N nell'equazione del piano. Ne segue che se il piano non passa per N la (3.5) è l'equazione di una circonferenza del piano equatoriale, altrimenti è l'equazione di una retta. \square

Osservazione 3.1.2 Si può vedere anche che f^{-1} , la cui espressione è data ovviamente dalle (3.3), trasforma circonferenze del piano equatoriale in circonferenze della sfera. Infatti, data una circonferenza \tilde{C} del piano equatoriale di equazione

$$u^2 + v^2 + 2au + 2bv + d = 0;$$

tenendo conto delle (3.2) si ha

$$\frac{x^2}{(1-z)^2} + \frac{y^2}{(1-z)^2} + \frac{2ax}{1-z} + \frac{2by}{1-z} + d = 0$$

che può scriversi

$$x^2 + y^2 + 2ax(1-z) + 2by(1-z) + d(1-z)^2 = 0,$$

la quale è l'equazione del cono di vertice N passante per \tilde{C} .

Le coordinate dei punti appartenenti all'intersezione di tale cono con \mathbb{S} sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2ax(1-z) + 2by(1-z) + d(1-z)^2 = 0; \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

che può essere scritto

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2ax(1-z) + 2by(1-z) + d(1-z)^2 = 0; \\ x^2 + y^2 = (1-z)(1+z) \end{cases} .$$

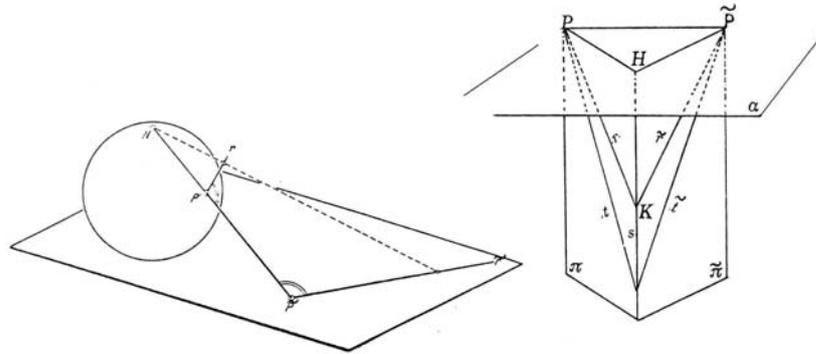
Il sistema precedente è equivalente ai seguenti

$$\begin{cases} 1 - z = 0; \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} 1 + z + 2ax + 2by + d(1 - z) = 0; \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1. \end{cases}$$

Il primo ha come soluzione N contato due volte, mentre il secondo individua una circonferenza di \mathbb{S} .

Proprietà 3.1.3 *La proiezione stereografica è isogonale (i.e. conserva gli angoli).*

Dimostrazione. Sia P un punto di \mathbb{S} diverso dal polo nord e sia \tilde{P} l'immagine di P tramite la proiezione stereografica. Premettiamo che il piano ν , tangente ad \mathbb{S} nel polo nord, ed il piano π tangente a \mathbb{S} in P , formano angoli uguali con la retta passante per NP . Inoltre $\nu \cap \pi$ è una retta perpendicolare a NP . Naturalmente, poiché il piano $\tilde{\pi}$ su cui proiettiamo è parallelo a ν , si ha che π e $\tilde{\pi}$ formano angoli uguali con la retta passante per PP .



Quindi chiamando α il piano ortogonale a $s = \pi \cap \tilde{\pi}$ e passante per PP , risulta $\widehat{HPP} = \widehat{H\tilde{P}P}$.

Se r e \tilde{r} sono due rette ottenute segnando π e $\tilde{\pi}$ con un piano passante per PP si ha anche $\widehat{PPK} = \widehat{K\tilde{P}P}$. Da qui segue che se r è una retta tangente a \mathbb{S} in P e \tilde{r} è l'immagine di r secondo la proiezione stereografica, allora r e \tilde{r} formano angoli uguali con PP . Se t è un'altra tangente alla sfera in P e \tilde{t} è la sua immagine, allora $\widehat{rt} = \widehat{\tilde{r}\tilde{t}}$. \square

3.2 Generalizzazioni

Come nel caso della sfera di \mathbb{R}^3 possiamo definire in \mathbb{R}^{n+1} la proiezione stereografica dal polo nord di \mathbb{S}^n . Identifichiamo \mathbb{R}^{n+1} con $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Allora

possiamo pensare un punto di \mathbb{R}^{n+1} come una coppia (ξ, η) con $\xi \in \mathbb{R}^n$ e $\eta \in \mathbb{R}$. Un punto $P(\xi, \eta)$ appartiene a \mathbb{S}^n se e solo se $\|\xi\|^2 + \eta^2 = 1$.

Si chiama proiezione stereografica dal polo nord l'applicazione

$$f : \mathbb{S}^n - \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

tale che $N, P, f(P)$ siano allineati per ogni $P \in \mathbb{S}^n - \{N\}$. Troviamone l'espressione. Se Q è un punto allineato con $N(0, 1)$ e $P(\xi, \eta)$ si ha

$$Q = \lambda N + (1 - \lambda)P.$$

Imponendo che Q appartenga a \mathbb{R}^n si ha $Q = (\tilde{\xi}, 0)$, cioè

$$\tilde{\xi} = \lambda \cdot 0 + (1 - \lambda)\xi = (1 - \lambda)\xi; \quad 0 = \lambda \cdot 1 + (1 - \lambda)\eta.$$

Dall'ultima si ottiene $\lambda = \frac{\eta}{\eta - 1}$ e quindi

$$f : (\xi, \eta) \longmapsto \frac{1}{1 - \eta}\xi.$$

Si vede poi che

$$f^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n, \quad \xi' \longmapsto \left(\frac{2\xi'}{\|\xi'\|^2 + 1}, \frac{\|\xi'\|^2 - 1}{\|\xi'\|^2 + 1} \right).$$

Infatti, posto $\xi' = \frac{\xi}{1 - \eta}$, si ha $\xi = \xi'(1 - \eta)$ e quindi $\|\xi\|^2 = \|\xi'\|^2(1 - \eta)^2$.

Ma $\|\xi\|^2 + \eta^2 = 1$, dunque

$$\eta^2(\|\xi'\|^2 + 1) - 2\eta\|\xi'\|^2 + \|\xi'\|^2(1 - \eta)^2 - 1 = 0$$

da cui, risolvendo l'equazione, si ha $\eta = 1$ o $\eta = \frac{\|\xi'\|^2 - 1}{\|\xi'\|^2 + 1}$. La soluzione $\eta = 1$ si esclude, dunque si ha la tesi.

Osservazione 3.2.1 Le applicazioni f, f^{-1} sono biunivoche e continue, anzi C^∞ , il che prova che $\mathbb{S}^n - \{N\}$ è diffeomorfo a \mathbb{R}^n .

La proiezione stereografica mostra anche che \mathbb{R}^n si può "compattificare" (seguendo Alexandroff) mediante l'aggiunta di un solo punto (detto *punto improprio*), cioè

$$\mathbb{S}^n \cong \mathbb{R}^n \cup \{\infty\} = \overline{\mathbb{R}^n}.$$

Inoltre

$$\mathbb{S}^1 \cong \overline{\mathbb{R}} \cong P^1(\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad \mathbb{S}^2 \cong \overline{\mathbb{C}} \cong P^1(\mathbb{C}).$$

Piú in generale, se P è un punto di $\mathbb{S}^n(r)$ ed H un iperpiano parallelo all'iperpiano tangente a $\mathbb{S}^n(r)$ in P e differente da questo iperpiano, si chiama *proiezione stereografica* di $\mathbb{S}^n(r)$ l'applicazione

$$f : \mathbb{S}^n(r) - \{P\} \longrightarrow H$$

tale che, se $Q \in \mathbb{S}^n(r) - \{P\}$, P , Q e $f(Q)$ sono allineati.

Usualmente si considera H passante per il centro di $\mathbb{S}^n(r)$ oppure H tangente nel punto antipodale di P .

Si può dimostrare che ogni proiezione stereografica conserva gli angoli e trasforma le $(n-1)$ -sfere piccole di $\mathbb{S}^n(r) - \{P\}$ in sfere di H . Abbiamo visto le precedenti affermazioni nel caso $n=2$.

3.3 Proiezione stereografica ed inversione rispetto ad una circonferenza

Considerata una circonferenza di centro O e raggio r , chiamasi *inversione rispetto ad una circonferenza* l'applicazione

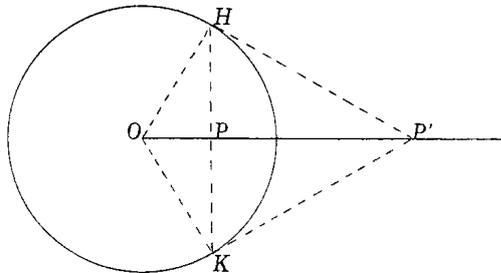
$$\iota : \mathbb{R}^2 - \{O\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

che a P associa il punto P' della semiretta OP tale che risulti

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2.$$

Al punto O per convenzione si associa la retta impropria del piano. Esso è chiamato *polo* e r^2 è chiamato la *potenza*. Evidentemente se il punto P è interno (risp. esterno) al cerchio fondamentale, il punto P' è esterno (risp. interno), mentre, se P è sulla circonferenza, $P \equiv P'$.

L'inversione si può costruire geometricamente come segue:



sia P interno al cerchio fondamentale; consideriamo da P la perpendicolare alla retta OP , sino ad incontrare la circonferenza in H e K ; le tangenti alla circonferenza in H e K si incontrano nel punto corrispondente, poiché applicando il

primo teorema di Euclide si ha $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = \overline{OH}^2 = r^2$. Se invece il punto P è esterno, basta condurre da esso le tangenti alla circonferenza fondamentale e congiungere i loro punti di contatto; tale congiungente incontra OP nel punto corrispondente P' .

Usando le coordinate cartesiane, se $P(u, v)$ e $P'(u', v')$, si vede facilmente che l'inversione è rappresentata dalle equazioni

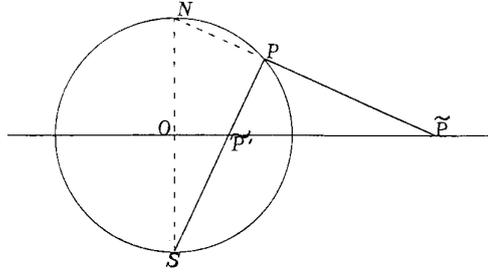
$$u' = \frac{ur^2}{u^2 + v^2}, \quad v' = \frac{vr^2}{u^2 + v^2}.$$

Teorema 3.3.1 *Se f (resp. g) è la proiezione stereografica dal polo nord (resp. dal polo sud) di \mathbb{S} su \mathbb{R}^2 , allora*

$$g \circ f^{-1} : \mathbb{R}^2 - \{O\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

è l'inversione del piano di polo O e potenza 1.

Dimostrazione.



Dalla figura, tenendo conto della similitudine dei triangoli OSP' e NOP' , segue

$$\overline{OP'} : \overline{OS} = \overline{NO} : \overline{OP}$$

da cui la conclusione poiché $\overline{OS} = \overline{ON} = r$. \square

3.4 Proiezione stereografica e numeri complessi

Se ad ogni punto (u, v) del piano associamo il numero complesso $\zeta = u + iv$, le equazioni dell'inversione (per $r = 1$) si possono porre nella forma

$$\zeta' = \bar{\zeta}^{-1}$$

e quelle della proiezione stereografica nella forma

$$x = \frac{\zeta + \bar{\zeta}}{\zeta\bar{\zeta} + 1}, \quad y = \frac{\zeta - \bar{\zeta}}{i(\zeta\bar{\zeta} + 1)}, \quad z = \frac{\zeta\bar{\zeta} - 1}{\zeta\bar{\zeta} + 1}. \quad (3.6)$$

Se $P(x, y, z)$ e $P'(x', y', z')$ sono punti di \mathbb{S} , posto $\omega = \widehat{PP'}$, si ha

$$\cos \omega = xx' + yy' + zz'$$

e quindi per le (3.6) si ha

$$\cos^2 \frac{\omega}{2} = \frac{1 + \cos \omega}{2} = \frac{|\zeta \bar{\zeta}' + 1|^2}{(\zeta \bar{\zeta} + 1)(\zeta' \bar{\zeta}' + 1)}.$$

Se P e P' sono punti antipodali, $\omega = \pi$ e dunque

$$\cos^2 \frac{\omega}{2} = 0.$$

Quindi

$$|\zeta \bar{\zeta}' + 1| = 0$$

cioè $\zeta' = -(\bar{\zeta})^{-1}$.

Questa trasformazione può essere considerata come la composizione dell'inversione rispetto alla circonferenza unitaria di centro O e della riflessione $\zeta' = -\zeta$ o, equivalentemente, come l'inversione rispetto ad una circonferenza immaginaria di equazione

$$\zeta \bar{\zeta} = -1.$$

3.5 Proiezione stereografica e geometria differenziale

Consideriamo la sfera di centro l'origine e raggio r rappresentata tramite le coordinate geografiche

$$x = r \cos \phi \cos \theta, \quad y = r \sin \phi \cos \theta, \quad z = r \sin \theta \quad (3.7)$$

dove θ è la latitudine e ϕ è la longitudine. Si vede facilmente che ¹

$$E = r^2 \cos^2 \theta; \quad F = 0; \quad G = r^2$$

da cui

$$ds^2 = r^2 \cos^2 \theta d\phi^2 + r^2 d\theta^2 \quad \text{e} \quad d\sigma = r^2 \cos \theta d\phi d\theta.$$

Le espressioni precedenti si potevano anche dedurre facilmente dal punto di vista geometrico tenendo presente che il meridiano di equazione $\phi = \text{cost}$ ha raggio r , mentre il parallelo $\theta = \text{cost}$ ha raggio $r \sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = r \cos \theta$.

¹cfr. Appendice.

Consideriamo la parametrizzazione di $\mathbb{S}(r)$ indotta dalla sua proiezione stereografica sul piano:

$$\begin{cases} x = \frac{2ur^2}{u^2 + v^2 + r^2} \\ y = \frac{2vr^2}{u^2 + v^2 + r^2} \\ z = \frac{u^2 + v^2 - r^2}{u^2 + v^2 + r^2}. \end{cases}$$

In questo caso si ha

$$E = G = \frac{4r^4}{(u^2 + v^2 + r^2)^2}, \quad F = 0$$

dunque i parametri u, v sono parametri isotermi.

Ponendo $d\tilde{s}^2 = du^2 + dv^2$, si ha

$$ds^2 = \frac{4r^4}{(u^2 + v^2 + r^2)^2} d\tilde{s}^2. \quad (3.8)$$

Naturalmente vale anche

$$d\sigma = \frac{4r^4}{(u^2 + v^2 + r^2)^2} d\tilde{\sigma}. \quad (3.9)$$

La (3.8) e la (3.9) esprimono rispettivamente il legame tra l'elemento lineare sulla sfera e l'elemento lineare sul piano e il legame tra l'elemento di area sulla sfera e l'elemento di area sul piano.

Introduciamo ora nel piano le coordinate polari $(\tilde{\rho}, \tilde{\phi})$. Allora

$$u = \tilde{\rho} \cos \tilde{\phi}; \quad v = \tilde{\rho} \sin \tilde{\phi}.$$

Vogliamo trovare le equazioni della proiezione stereografica $f : \mathbb{S}(r) - \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ usando sulla sfera le coordinate geografiche e sul piano quelle polari. Ricordiamo che

$$f : (x, y, z) \mapsto \left(\frac{xr}{r-z}, \frac{yr}{r-z} \right).$$

Allora

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} \cos \tilde{\phi} &= \frac{r^2 \cos \phi \cos \theta}{r - r \sin \theta} = \frac{r \cos \phi \cos \theta}{1 - \sin \theta} \\ \tilde{\rho} \sin \tilde{\phi} &= \frac{r^2 \sin \phi \cos \theta}{r - r \sin \theta} = \frac{r \sin \phi \cos \theta}{1 - \sin \theta}. \end{aligned}$$

da cui

$$\tilde{\rho}^2 = \frac{r^2 \cos^2 \theta}{(1 - \sin \theta)^2}; \quad \tan \tilde{\phi} = \tan \phi$$

quindi

$$\tilde{\rho} = \frac{r \cos \theta}{1 - \sin \theta}; \quad \tilde{\phi} = \phi.$$

Ne segue che

$$d\tilde{s}^2 = \tilde{\rho}^2 d\tilde{\phi}^2 + d\tilde{\rho}^2 = \frac{r^2 \cos^2 \theta}{(1 - \sin \theta)^2} d\phi^2 + \frac{r^2}{(1 - \sin \theta)^2} d\theta^2$$

e dunque

$$d\tilde{s}^2 = \frac{ds^2}{(1 - \sin \theta)^2}.$$

Si vede allora che la proiezione stereografica nell'infinitesimo si comporta come una similitudine, cioè è un'applicazione conforme (cfr. Appendice).

3.6 Note storiche

Il primo uso della proiezione stereografica della sfera su un piano risale ad Ipparco, il grande astronomo di Nicea del II secolo a.C.. Però noi troviamo descritta questa trasformazione solo in una versione araba (del 1000 circa) di un'opera di Claudio Tolomeo d'Alessandria (II secolo d.C.) conosciuta sotto il nome di Planisfero (*Planisphaerium*). Da notare però che in Tolomeo non trovasi mai enunciata esplicitamente (né tanto meno dimostrata) la prima proprietà generale di questa trasformazione, cioè di trasformare cerchi in cerchi, ma vengono costruiti soltanto i cerchi corrispondenti ad alcuni cerchi notevoli della sfera rappresentante la sfera celeste.

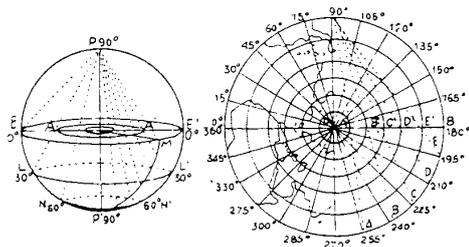
La prima esposizione completa della proiezione stereografica con la dimostrazione della proprietà sopra citata è dovuta a Ahmad al-Fergani, uno scienziato del IX secolo che lavorò a Baghdad. Molto probabilmente la sua dimostrazione è modellata su una risalente ad Apollonio di Perga (262-190 a.C.), il "Grande geometra" dell'antichità noto soprattutto per aver studiato in modo sistematico ed unitario le (sezioni) *coniche*. Sia nel Planisfero di Tolomeo che nell'opera di al-Fergani, la proiezione stereografica è usata per la costruzione dell'*astrolabio*, uno strumento per la misurazione delle coordinate delle stelle sulla sfera celeste. Nel Medioevo la proiezione stereografica era detta infatti *proiezione astrolabica*.

La seconda proprietà, la isogonalità, non trovasi né in Tolomeo né negli scrittori medievali.

Il nome odierno di "proiezione stereografica" (dalle parole greche $\sigma\tau\epsilon\rho\epsilon\acute{o}\nu$ (corpo solido) e $\gamma\rho\alpha\phi\acute{\eta}$ (disegno)) fu introdotto nel 1613 dal gesuita F. d'Aguilon (1567-1617), autore di un geniale trattato di ottica, *Opticorum libri sex*,

nel quale (Lib.VI, p.572) appare uno studio approfondito della proiezione ortogonale e centrale (detta “scenografia”). Il volume, illustrato con acqueforti del Rubens, amico dell'autore, era pensato anche per architetti, astronomi, naviganti, ingegneri militari, pittori; esso ebbe anche il merito di attirare l'attenzione di geometri sulle trasformazioni geometriche, che grande importanza e sviluppo ebbero nel secolo XIX. Eccellente divulgatore di questi metodi fu il tedesco L.Magnus (1790-1861).

Alle applicazioni della proiezione stereografica per la costruzione di carte geografiche dedicò molti lavori il grande matematico svizzero L.Euler (1707-1783), che lavorò a Pietroburgo e a Berlino. Egli studiò anche il legame tra la proiezione stereografica e le funzioni complesse.



Il primo germe della trasformazione per inversione circolare si trova in Viète (*Apollonius Gallus*, Paris 1600); però i primi studi sistematici vennero fatti da J. Plücker (1831) e da G. Bellavitis (1836). L'inversione circolare si può considerare come generalizzazione dell'usuale simmetria rispetto ad una retta, quando lo “specchio” diventa circolare.

Infatti se $\overline{OP} = r - h$, $\overline{OP'} = r + d$, allora

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2 \quad \Rightarrow \quad d - h = hd/r.$$

Quando $r \rightarrow \infty$ si ha $d = h$ cioè P e P' sono simmetrici rispetto alla retta, circonferenza di raggio infinito.

Capitolo 4

Cartografia

*Egli aveva comprato una grande carta del mare
Senza la minima traccia di terra:
L'equipaggio fu molto contento di vedere che
Era una carta che ognuno poteva capire.*
Lewis Carroll, Hunting of the Snark

4.1 Carte

Si chiama *carta* di $\mathbb{S}(r)$ una coppia (A, f) dove A è una parte di $\mathbb{S}(r)$ e $f : A \rightarrow \mathbb{R}^2$ un'applicazione iniettiva.

Quasi sempre si richiede che f sia un omeomorfismo di A su $f(A)$. Per esempio le proiezioni stereografiche sono delle carte dove $A = \mathbb{S}(r) - \{P\}$ con P punto di $\mathbb{S}(r)$.

Lemma 4.1.1 *Non può esistere una carta $(\mathbb{S}(r), f)$, cioè un omeomorfismo*

$$f : \mathbb{S}(r) \rightarrow f(\mathbb{S}(r)) \subset \mathbb{R}^2.$$

Dimostrazione. Sia $\mathbf{x} \in \mathbb{S}(r)$; per le ipotesi si ha $f(\mathbb{S}(r) - \{\mathbf{x}\}) = f(\mathbb{S}(r)) - \{f(\mathbf{x})\}$. Ora $f(\mathbb{S}(r) - \{\mathbf{x}\})$ è un aperto di \mathbb{R}^2 per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{S}(r)$, quindi anche $f(\mathbb{S}(r)) - \{f(\mathbf{x})\}$ deve essere un aperto di \mathbb{R}^2 , cioè $f(\mathbb{S}(r)) - \{f(\mathbf{x})\}$ deve coincidere con il suo interno. Ma $f(\mathbb{S}(r))$ è un compatto, cioè un chiuso e limitato di \mathbb{R}^2 , che possiede più di un punto di frontiera, quindi $f(\mathbb{S}(r)) - \{f(\mathbf{x})\}$ non può essere un aperto di \mathbb{R}^2 . \square

Si chiama *carta delle coordinate terrestri* la coppia $(\mathbb{S}(r) - \Gamma, f_0)$ dove per ogni $P \in \mathbb{S}(r)$

$$f_0(P) = (\phi(P), \theta(P))$$

dove $\phi(P)$ è la longitudine di P e $\theta(P)$ è la latitudine di P . Ne segue chiaramente che

$$f_0(\mathbb{S}(r) - \Gamma) =] - \pi, \pi[\times \left] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[.$$

L'applicazione $\tau = f_0^{-1}$ è definita da

$$\tau(\phi, \theta) = (r \cos \phi \cos \theta, r \sin \phi \cos \theta, r \sin \theta).$$

Praticamente ogni carta f di $\mathbb{S}(r)$ (o della Terra) è data non dall'applicazione f ma dall'applicazione $g = f \circ \tau$ che è della forma

$$x = u(\phi, \theta) \quad \text{e} \quad y = v(\phi, \theta).$$

Notazioni. Indicheremo con d la metrica intrinseca sulla sfera e con \tilde{d} la metrica euclidea del piano denotato con E .

4.2 Distorsione

Sia U un sottoinsieme non degenere di $\mathbb{S}(r)$ (i.e. che contiene almeno due punti). Si dice *proiezione* ogni applicazione $f : U \rightarrow E$.

Se f è una proiezione, fissati $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, si dice *scala di f rispetto ad \mathbf{x} e \mathbf{y}* il rapporto

$$\frac{\tilde{d}(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y}))}{d(\mathbf{x}, \mathbf{y})}.$$

Per studiare tale rapporto consideriamo

$$\sigma_1(f) = \inf_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U, \mathbf{x} \neq \mathbf{y}} \frac{\tilde{d}(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y}))}{d(\mathbf{x}, \mathbf{y})}, \quad \sigma_2(f) = \sup_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U, \mathbf{x} \neq \mathbf{y}} \frac{\tilde{d}(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y}))}{d(\mathbf{x}, \mathbf{y})}.$$

Dalla definizione segue che per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U$

$$\sigma_1(f)d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \tilde{d}(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) \leq \sigma_2(f)d(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Si definisce *distorsione* di f il numero reale

$$\delta(f) := \log \frac{\sigma_2(f)}{\sigma_1(f)}.$$

Lemma 4.2.1 *Se f è una proiezione valgono*

- 1) $\delta(f) < +\infty \Leftrightarrow 0 < \sigma_1(f) \leq \sigma_2(f) < +\infty$,
- 2) $\delta(f) < +\infty \Rightarrow f$ *bilipschitziana e iniettiva.*

Dimostrazione. La 1) segue dalle proprietà del logaritmo. Per la 2) osserviamo che $\sigma_2(f) = e^{\delta(f)}\sigma_1(f)$. Allora vale

$$\sigma_1(f)d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \tilde{d}(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) \leq e^{\delta}\sigma_1(f)d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (4.1)$$

per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U$. Pertanto f è bilipschitziana. Inoltre se $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U$ sono tali che $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y})$, allora per (4.1), $\sigma_1(f)d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$. Osservando che $\sigma_1(f) \neq 0$ e che d è una metrica sulla sfera, si conclude che $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Dunque f è iniettiva. \square

Osservazione 4.2.2 Se $\delta(f) = 0$ da (4.1) segue che

$$\tilde{d}(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) = \sigma_1(f)d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

dunque f è una similitudine, cioè un'isometria a meno di un fattore di proporzionalità.

I problemi della cartografia nascono dal seguente

Teorema 4.2.3 *Se U è un aperto di $\mathbb{S}(r)$, allora non esiste alcuna isometria $f : U \rightarrow E$.*

Dimostrazione. Se U è un aperto di $\mathbb{S}(r)$, esistono $A, B, C \in U$ tali che ABC sia un triangolo sferico equilatero contenuto in U . Sia α la lunghezza (sulla sfera) di un lato di tale triangolo e sia T un punto di $\mathbb{S}(r)$ equidistante da A, B, C , cioè tale che $d(T, A) = d(T, B) = d(T, C) =: \beta$. Utilizzando formule di trigonometria sferica si prova che $\alpha < \sqrt{3}\beta$.

Ora, se ci fosse un'isometria $f : U \rightarrow E$, l'immagine di ABC tramite f dovrebbe essere un triangolo equilatero in E di lato α e $f(T)$ sarebbe il circocentro di tale triangolo. Dunque si avrebbe $\alpha = \sqrt{3}\beta$, che è assurdo. \square

Da questo teorema e dall'osservazione precedente segue che non è possibile trovare una proiezione da un aperto di $\mathbb{S}(r)$ su E che abbia distorsione nulla; il problema diventa allora trovare le proiezioni aventi distorsione "minima" tra quelle di una certa classe. Dimostriamo più avanti che

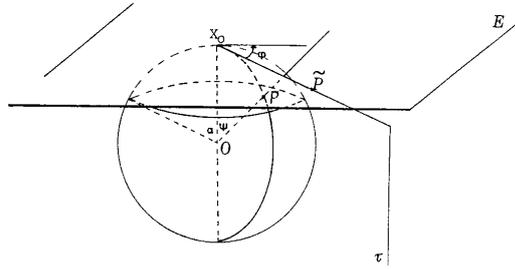
Teorema 4.2.4 *Se U è un sottoinsieme di $\mathbb{S}(r)$ tale che $\overline{U} \neq \mathbb{S}(r)$, allora esiste una proiezione $f_0 : U \rightarrow E$ t.c. per ogni proiezione $f : U \rightarrow E$ risulta $\delta(f_0) \leq \delta(f)$.*

4.3 La proiezione equidistante azimutale

Consideriamo la sfera $\mathbb{S}(r)$. Sia \mathbf{x}_0 un suo punto fissato e $E = T_{\mathbf{x}_0}(\mathbb{S}(r))$. Per $\alpha \in]0, \pi[$ poniamo

$$D_\alpha := \{\mathbf{x} \in \mathbb{S}(r) \mid d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \leq r\alpha\}$$

ed indichiamo con τ il piano individuato da \mathbf{x}_0 , O e $P \in D_\alpha$.



L'applicazione

$$f : D_\alpha \longrightarrow E, \quad P \longmapsto \tilde{P}$$

dove $\tilde{P} \in \tau \cap E$ e $d(\mathbf{x}_0, P) = \tilde{d}(\mathbf{x}_0, \tilde{P})$ si dice *proiezione equidistante azimutale*¹.

Se ϕ e θ sono rispettivamente la longitudine e la latitudine di P , ponendo $\psi = \frac{\pi}{2} - \theta$ (la colatitudine di P), analiticamente

$$f : (\phi, \psi) \longmapsto (r\psi \cos \phi, r\psi \sin \phi).$$

Quindi f porta ogni cerchio massimo passante per \mathbf{x}_0 in una retta di E passante per \mathbf{x}_0 . L'angolo tra i due cerchi massimi è uguale all'angolo tra le rette corrispondenti. Se $C_\beta = \partial D_\beta$ con $0 < \beta \leq \alpha$, allora $f(C_\beta)$ è una circonferenza di E con centro in \mathbf{x}_0 e raggio $r\beta$.

Osserviamo ancora che la proiezione azimutale conserva le distanze misurate sulle semirette di E uscenti da \mathbf{x}_0 . Questa proiezione perciò è molto utile quando si considerano distanze da un punto fissato.

Il risultato fondamentale che vogliamo dimostrare è

Teorema 4.3.1 *La proiezione $f_0 : D_\alpha \longrightarrow E$ che corrisponde alla minima distorsione è la proiezione equidistante azimutale.*

Dimostriamo prima due lemmi:

Lemma 4.3.2 *Se f_a è la proiezione azimutale equidistante su D_α , allora*

$$\delta(f_a) \leq \log \left(\frac{\alpha}{\sin \alpha} \right).$$

Dimostrazione. Sia γ una curva di D_α , quindi $\gamma(t) = (\phi(t), \psi(t))$. Ricordiamo che

$$ds^2 = r^2 \sin^2 \psi d\phi^2 + r^2 d\psi^2 \quad d\tilde{s}^2 = r^2 d\psi^2 + r^2 \psi^2 d\phi^2$$

¹Il piano sul quale si proietta è il piano dell'orizzonte rispetto ad un osservatore posto in \mathbf{x}_0 ; su tale piano ci si orienta tramite un angolo detto *azimut*. Da qui l'aggettivo azimutale.

quindi

$$\mathcal{L}(\gamma) = r \int \sqrt{(\sin^2 \psi) \phi'^2 + \psi'^2} dt$$

e

$$\mathcal{L}(f_a(\gamma)) = r \int \sqrt{\psi^2 \phi'^2 + \psi'^2} dt.$$

Osservando che $\sin \psi \leq \psi$ e che la funzione $\frac{\psi}{\sin \psi}$ è crescente e quindi che vale

$$\frac{\psi}{\sin \psi} \leq \frac{\alpha}{\sin \alpha},$$

si ha

$$\sin \psi \leq \psi \leq \left(\frac{\alpha}{\sin \alpha} \right) \sin \psi$$

da cui

$$\mathcal{L}(\gamma) \leq \mathcal{L}(f_a(\gamma)) \leq \left(\frac{\alpha}{\sin \alpha} \right) \mathcal{L}(\gamma).$$

Tenendo conto di questa disuguaglianza si prova che per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D_\alpha$

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \tilde{d}(f_a(\mathbf{x}), f_a(\mathbf{y})) \leq \left(\frac{\alpha}{\sin \alpha} \right) d(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Dunque

$$\sigma_1(f_a) \geq 1 \quad \text{e} \quad \sigma_2(f_a) \leq \frac{\alpha}{\sin \alpha} \Rightarrow \frac{\sigma_2(f_a)}{\sigma_1(f_a)} \leq \frac{\alpha}{\sin \alpha}$$

da cui la tesi

$$\delta(f) = \log \left(\frac{\sigma_2(f_a)}{\sigma_1(f_a)} \right) \leq \log \left(\frac{\alpha}{\sin \alpha} \right). \quad \square$$

Lemma 4.3.3 *Se f è una qualsiasi proiezione definita su D_α , allora*

$$\delta(f) \geq \log \left(\frac{\alpha}{\sin \alpha} \right).$$

Dimostrazione. Se $\delta(f) = \infty$ la tesi è banale. Assumiamo $\delta(f) < \infty$. Allora f è iniettiva e bilipschitziana. Se consideriamo $C_\alpha = \partial D_\alpha$, $f(C_\alpha)$ è una curva semplice e chiusa del piano perché f è iniettiva e continua. Dunque $f(C_\alpha)$ è una curva di Jordan e pertanto ogni semiretta uscente da $f(\mathbf{x}_0)$ incontra $f(C_\alpha)$ in almeno un punto (per il teorema di Jordan). Ma $\mathcal{L}(C_\alpha) = 2\pi r \sin \alpha$ e vale

$$\tilde{d}(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) \leq \sigma_2(f) d(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

dunque

$$\mathcal{L}(f(C_\alpha)) \leq 2\pi r \sigma_2(f) \sin \alpha. \quad (4.2)$$

Ogni punto di C_α ha distanza geodetica $r\alpha$ da \mathbf{x}_0 , quindi da

$$\sigma_1(f)d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \tilde{d}(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y}))$$

segue che ogni punto di $f(C_\alpha)$ ha distanza da $f(\mathbf{x}_0)$ maggiore di $\sigma_1(f)r\alpha$.

Se D^* è il disco del piano di raggio $\sigma_1(f)r\alpha$ e centro $f(\mathbf{x}_0)$, allora $f(C_\alpha)$ è fuori di D^* . Dunque

$$\mathcal{L}(f(C_\alpha)) \geq 2\pi\sigma_1(f)r\alpha \quad (4.3)$$

(poiché ogni semiretta uscente da $f(\mathbf{x}_0)$ incontra $f(C_\alpha)$ in almeno un punto).

Anzi si può provare che

$$\mathcal{L}(f(C_\alpha)) = 2\pi\sigma_1(f)r\alpha \quad \Leftrightarrow \quad f(C_\alpha) = \partial D^*.$$

Tenendo conto di (4.2), (4.3) si ha

$$2\pi\sigma_1(f)r\alpha \leq 2\pi\sigma_2(f)r \sin \alpha$$

e dunque

$$\frac{\alpha}{\sin \alpha} \leq \frac{\sigma_2(f)}{\sigma_1(f)}$$

da cui segue la tesi. \square

Dai lemmi 4.3.2, 4.3.3 segue il teorema iniziale e, in più,

Teorema 4.3.4 *La distorsione della proiezione azimutale equidistante su D_α è esattamente uguale a $\log \frac{\alpha}{\sin \alpha}$.*

Osservazione 4.3.5 La distorsione della proiezione azimutale è piccola per valori di α piccoli. Infatti asintoticamente si ha per $\alpha \rightarrow 0$:

$$\log \frac{\alpha}{\sin \alpha} \sim -\log \left(\frac{\alpha - \frac{\alpha^3}{6}}{\alpha} \right) = -\log \left(1 - \frac{\alpha^2}{6} \right) \sim \frac{\alpha^2}{6} + o(\alpha^2).$$

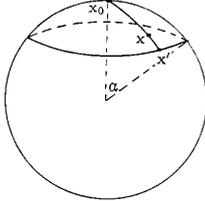
Nota. L'inversa della proiezione azimutale equidistante è quella che in geometria differenziale si chiama *applicazione esponenziale*. Ne segue che f_0 è C^∞ anche in \mathbf{x}_0 .

Dimostriamo ora l'inverso del teorema precedente:

Teorema 4.3.6 *Se $f : D_\alpha \rightarrow E$ è una proiezione con $\delta(f) = \log \frac{\alpha}{\sin \alpha}$ allora f è la proiezione azimutale equidistante.*

Dimostrazione. Se $\delta(f) = \log \frac{\alpha}{\sin \alpha}$, allora, per (4.3), $\mathcal{L}(f(C_\alpha))$ deve essere uguale alla lunghezza della circonferenza C di centro $f(\mathbf{x}_0)$ e di raggio $\sigma_1(f)r\alpha = \sigma_2(f)r \sin \alpha$.

Il teorema di Schönflies ci assicura che $f(D_\alpha)$ deve essere proprio il disco delimitato da C . Ora consideriamo un punto arbitrario $\mathbf{x} \in D_\alpha$ e il segmento di cerchio massimo passante per \mathbf{x}_0 e \mathbf{x} ; questo taglia ∂D_α nel punto \mathbf{x}' .



Se $d = d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x})$, allora $d(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = r\alpha - d$ e $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) > r\alpha - d$ per ogni $\mathbf{y} \in C_\alpha$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$.
Usando la disuguaglianza

$$\tilde{d}(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) \geq \sigma_1(f)d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

segue che

- (a) $d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{x}_0)) \geq \sigma_1(f)d$
- (b) $d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{x}')) \geq \sigma_1(f)(r\alpha - d)$
- (c) $\tilde{d}(f(\mathbf{x}), z) \geq \sigma_1(f)(r\alpha - d) \quad \forall z \in f(C_\alpha)$.

Si vede che esiste un solo punto $f(\mathbf{x})$ che verifica (a), (b), (c) e tale punto si trova sul raggio passante per $f(\mathbf{x}_0)$ e $f(\mathbf{x}')$ ad una distanza da $f(\mathbf{x}_0)$ uguale a $\sigma_1(f)d$.

Abbiamo così trovato un modo per costruire f . Dobbiamo provare ora che circonferenze di centro \mathbf{x}_0 sulla sfera hanno come immagine tramite f circonferenze del piano di centro $f(\mathbf{x}_0)$. Verifichiamo che f porta la circonferenza C_α nella circonferenza $f(C_\alpha)$ mediante una similitudine di fattore di proporzionalità $\sigma_2(f)$.

Dividiamo C_α in due curve γ e γ' . Allora

$$\mathcal{L}(\gamma) + \mathcal{L}(\gamma') = \mathcal{L}(C_\alpha) = 2\pi r \sin \alpha.$$

Per la condizione di Lipschitz

$$\mathcal{L}(f(\gamma)) \leq \sigma_2(f)\mathcal{L}(\gamma) \quad \text{e} \quad \mathcal{L}(f(\gamma')) \leq \sigma_2(f)\mathcal{L}(\gamma')$$

dunque

$$\mathcal{L}(f(C_\alpha)) \leq \sigma_2(f)\mathcal{L}(C_\alpha) = \sigma_2(f)(2\pi r \sin \alpha),$$

ma $\mathcal{L}(f(C_\alpha)) = 2\pi\sigma_1(f)r\alpha = 2\pi\sigma_2(f)r \sin \alpha$, quindi tutte le disuguaglianze diventano uguaglianze e si ha la tesi. \square

Torniamo al caso di proiezioni definite su un qualsiasi sottoinsieme U di $\mathbb{S}(r)$.

Lemma 4.3.7 *Se $f : U \rightarrow E$ è una proiezione, allora f si estende in modo unico ad una proiezione $\bar{f} : \bar{U} \rightarrow E$ che ha la stessa distorsione di f .*

Dimostrazione. Ricordiamo che

$$\sigma_1(f)d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \tilde{d}(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) \leq \sigma_2(f)d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (4.4)$$

dunque f è uniformemente continua. Pertanto f si estende in modo unico ad una funzione continua su \overline{U} t.c. valga ancora (4.4). \square

Notazione. Poniamo

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(U) &:= \{f : U \longrightarrow E \mid f \text{ proiezione}\}; \\ \delta_0 &:= \inf\{\delta(f) : f \in \mathcal{P}(U)\}.\end{aligned}$$

Come abbiamo visto, il problema è se sia possibile costruire $f_0 \in \mathcal{P}(U)$ tale che $\delta(f_0) = \delta_0$. Il seguente teorema risponde al quesito:

Teorema 4.3.8 *Per ogni insieme non degenero $U \subset \mathbb{S}(r)$, esiste una proiezione f avente minima distorsione finita se e solo se $\overline{U} \neq \mathbb{S}(r)$.*

Dimostrazione. Se U è finito il teorema è banale. Supponiamo allora che U contenga infiniti punti. Sia $\{f_i\}$ una successione di proiezioni tali che, posto $\delta_i = \delta(f_i)$, risulti

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \delta_i = \delta_0.$$

Supponiamo che $\sigma_2(f_i) = 1$ e che $f_i(U)$ contenga l'origine e sia $f_i(\mathbf{x}) = 0$. Sia ora $U' = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n, \dots\}$ un insieme numerabile denso in U . Poiché per ogni $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbb{S}(r)$ vale $d(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) \leq \pi r$ si ha

$$\tilde{d}(f_i(\mathbf{x}_j), 0) \leq \sigma_2(f_i)d(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}) = d(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}) \leq \pi r.$$

Quindi esiste $\{f_{i_1}\}$ successione estratta da $\{f_i\}$ tale che $\{f_{i_1}(\mathbf{x}_1)\}$ converge ad un elemento \mathbf{a}_1 di E . Analogamente, esiste $\{f_{i_2}\}$ successione estratta da $\{f_{i_1}\}$ tale che $\{f_{i_2}(\mathbf{x}_2)\}$ converge ad un elemento \mathbf{a}_2 di E . Procedendo così si ha che per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste $\{f_{i_{k+1}}\}$ successione estratta da $\{f_{i_k}\}$ tale che $\{f_{i_{k+1}}(\mathbf{x}_{k+1})\}$ converge ad un elemento \mathbf{a}_k di E .

Definiamo

$$f : U' \longrightarrow E, \quad \mathbf{x}_k \mapsto \mathbf{a}_k.$$

Per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U'$ si ha

$$\sigma_1(f)d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \tilde{d}(f_i(\mathbf{x}), f_i(\mathbf{y})) \leq \sigma_2(f_i)d(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

da cui, ricordando che $\sigma_1 = \sigma_2 e^{-\delta_i}$,

$$e^{-\delta_i}d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \tilde{d}(f_i(\mathbf{x}), f_i(\mathbf{y})) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Passando al limite per $i \rightarrow \infty$ si ottiene

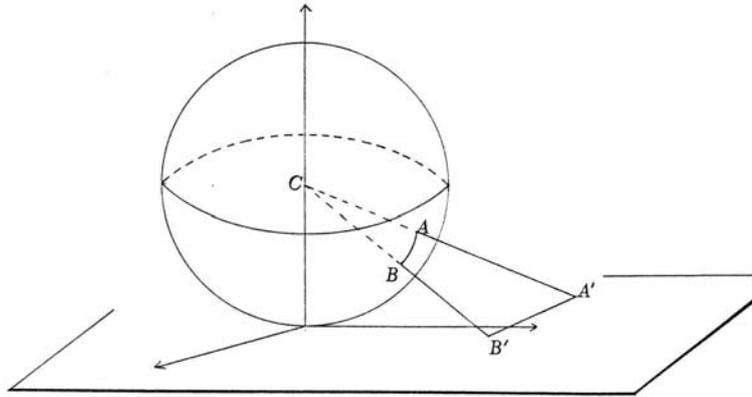
$$e^{-\delta_0}d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \tilde{d}(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Ne segue che f ha distorsione δ_0 . Definendo f_0 come l'estensione di f a $\overline{U'}$, per il lemma precedente si ha la tesi. Viceversa, se $\overline{U} = \mathbb{S}(r)$, sempre per il lemma precedente segue che una proiezione su U si dovrebbe estendere a $\mathbb{S}(r)$ e dunque si avrebbe un omeomorfismo tra $\mathbb{S}(r)$ e un sottoinsieme di E . \square

4.4 Altre proiezioni interessanti

4.4.1 La proiezione gnomonica

Con questa proiezione si proietta una semisfera dal centro sul piano tangente al polo sud.



Si vede subito che nella proiezione gnomonica² alle geodetiche sulla sfera corrispondono rette del piano e viceversa.

Troviamo l'equazione analitica della $f : \mathbb{S}_C(r) \rightarrow E$ che realizza tale proiezione. Le equazioni di $\mathbb{S}_C(r)$ sono

$$\begin{cases} x = r \cos \phi \cos \theta \\ y = r \sin \phi \cos \theta \\ z = r \sin \theta + r \end{cases}$$

dove ϕ e θ sono rispettivamente la longitudine e la latitudine di un punto sulla sfera. Il centro C di $\mathbb{S}_C(r)$ ha coordinate $(0, 0, r)$.

La retta per $P(x, y, z)$ e $C(0, 0, r)$ è descritta da

$$Q = \lambda C + (1 - \lambda)P.$$

Imponendo che $Q(u, v, w)$ abbia l'ultima coordinata nulla, cioè che Q appartenga al piano di equazione $z = 0$, si ha

$$\begin{cases} u = (1 - \lambda)x \\ v = (1 - \lambda)y \\ 0 = w = \lambda r + (1 - \lambda)z \end{cases} .$$

²Tale proiezione è così detta perché connessa al metodo di costruzione delle meridiane per mezzo di uno *gnomone*.

Dall'ultima equazione si trova $\lambda = \frac{1 + \sin \theta}{\sin \theta}$; sostituendo nelle prime due si ottiene

$$u = -r \cos \phi \cot \theta \quad \text{e} \quad v = -r \sin \phi \cot \theta.$$

Usando nel piano $z = 0$ le coordinate polari $(\tilde{\rho}, \tilde{\phi})$ si ha

$$\tilde{\rho} \cos \tilde{\phi} = -r \cos \phi \cot \theta \quad \text{e} \quad \tilde{\rho} \sin \tilde{\phi} = -r \sin \phi \cot \theta$$

da cui

$$\tilde{\rho}^2 = r^2 \cot^2 \theta \quad \text{e} \quad \tan \tilde{\phi} = \tan \phi$$

cioè

$$\tilde{\rho} = -r \cot \theta \quad \text{e} \quad \tilde{\phi} = \phi.$$

Quindi

$$d\tilde{s}^2 = \tilde{\rho}^2 d\tilde{\phi}^2 + d\tilde{\rho}^2 = r^2 \cot^2 \theta d\phi^2 + \frac{r^2}{\sin^4 \theta} d\theta^2.$$

La carta gnomonica non è né conforme né equivalente, ma come abbiamo detto prima conserva le geodetiche. Poichè le geodetiche in cartografia sono chiamate *curve ortodromiche* (= a corso dritto), le proiezioni che conservano le geodetiche sono anche dette ortodromiche.

4.4.2 La proiezione cilindrica della sfera

Rappresentiamo la sfera tramite le coordinate geografiche (ϕ, θ) e il cilindro \mathbf{C} tramite quelle cilindriche $(\bar{\phi}, \bar{h})$. L'equazione del cilindro sarà allora

$$\begin{cases} \bar{x} = r \cos \bar{\phi} \\ \bar{y} = r \sin \bar{\phi} \\ \bar{z} = \bar{h} \end{cases}$$

mentre quella della sfera sarà al solito

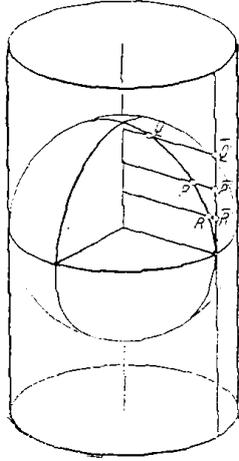
$$\begin{cases} x = r \cos \phi \cos \theta \\ y = r \sin \phi \cos \theta \\ z = r \sin \theta \end{cases}.$$

La proiezione cilindrica della sfera è l'applicazione

$$f : \mathbb{S}(r) \longrightarrow \mathbf{C}, (x, y, z) \mapsto (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$$

dove $\bar{x} = r \cos \phi$, $\bar{y} = r \sin \phi$, $\bar{z} = r \sin \theta$.

Si osservi che al polo nord e al polo sud corrispondono non singoli punti, ma intere circonferenze.



Proviamo che f è equivalente. Valgono

$$ds^2 = r^2 \cos^2 \theta d\phi^2 + r^2 d\theta^2;$$

$$E = r^2 \cos^2 \theta; \quad F = 0; \quad G = r^2$$

sulla sfera;

$$d\bar{s}^2 = r^2 d\phi^2 + r^2 \cos^2 \theta d\theta^2;$$

$$\bar{E} = r^2; \quad \bar{F} = 0; \quad \bar{G} = r^2 \cos^2 \theta$$

sul cilindro. Dunque

$$EG - F^2 = \bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2 = r^4 \cos^2 \theta,$$

$$d\sigma = d\bar{\sigma} = r^2 \cos \theta d\phi d\theta.$$

4.4.3 La proiezione classica di Mercatore

Si tratta ancora di una corrispondenza tra sfera e cilindro, nella quale meridiani e paralleli della sfera si mutano nelle generatrici e nei cerchi sezioni rette del cilindro, con la condizione ulteriore che la corrispondenza risulti conforme. Si tratta cioè di trovare una applicazione

$$g : (\phi, \theta) \longmapsto (\phi, V(\theta)) = (\bar{\phi}, \bar{h})$$

dove V è una funzione da determinare in modo che g sia conforme. Ora, come nell'esempio precedente,

$$ds^2 = r^2(\cos^2 \theta d\phi^2 + d\theta^2)$$

$$d\bar{s}^2 = r^2 d\phi^2 + V'(\theta)^2 d\theta^2.$$

Imponendo la condizione

$$d\bar{s}^2 = \lambda(\phi, \theta) ds^2$$

si ha

$$\begin{cases} r^2 = \lambda(\phi, \theta) r^2 \cos^2 \theta \\ V'(\theta)^2 = \lambda(\phi, \theta) r^2 \end{cases}$$

da cui $V'(\theta) = \pm \frac{r}{\cos \theta}$.

Scelto il segno positivo e assunto $V(0) = 0$ (il che equivale a richiedere che all'equatore della sfera corrisponda la circonferenza centrale del cilindro) si ha

$$V(\theta) = \int_0^\theta \frac{r dx}{\cos x} = r \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+\theta} \frac{dy}{\sin y}$$

avendo posto $y = x + \frac{\pi}{2}$.

Ricordando che

$$\int \frac{dy}{\sin y} = \log \left| \tan \frac{x}{2} \right| + c$$

si ha

$$V(\theta) = r \log \left| \tan \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| = r \log \left(\tan \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right)$$

poiché per $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ si ha che $\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Inoltre

$$\begin{aligned} V(-\theta) &= r \log \left(\tan \left(-\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right) = r \log \left(\cot \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right) = \\ &= -r \log \left(\tan \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right) = -V(\theta). \end{aligned}$$

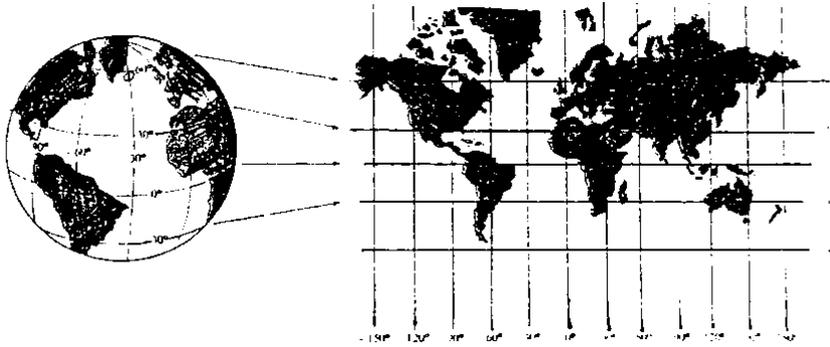
Quindi la corrispondenza così ottenuta è simmetrica rispetto al piano xy e l'intera sfera corrisponde alla superficie cilindrica indefinita poiché risulta

$$\lim_{\theta \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}} V(\theta) = \pm \infty.$$

Distendendo il cilindro su di un piano si passa alla proiezione piana di Mercatore descritta da

$$\bar{\phi} = \phi \quad V(\theta) = r \log \left(\tan \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right).$$

I paralleli si trasformano in segmenti di lunghezza uguale all'equatore $2\pi r$, mentre i meridiani diventano rette parallele, ortogonali ai segmenti piani considerati.



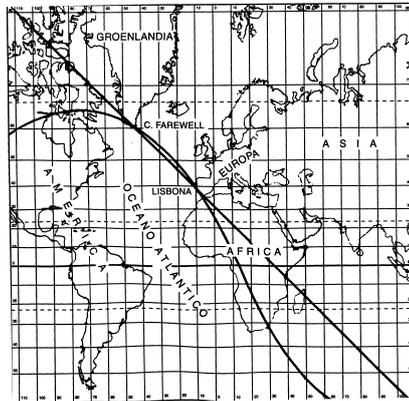
Poiché l'applicazione è conforme, allora la traiettoria d'una nave o di un aereo che segue una rotta costante è una retta della carta e quindi si può tracciare con una riga. Sulla sfera, queste traiettorie (cioè le curve che fanno un angolo costante con tutti i meridiani) sono chiamate *lossodromiche* (= a corso obliquo). Sulla carta esse hanno equazione

$$\bar{\phi} = \alpha \bar{h} + \beta$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, quindi sulla sfera

$$\phi = \alpha \log \left(\tan \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right) + \beta.$$

La lossodromica non è la più breve distanza tra due punti, ma per piccole distanze non si distingue molto da una geodetica e ha il valore pratico di essere un percorso che non richiede continue variazioni dell'angolo di rotta. Per lunghe distanze, in genere, la geodetica viene spezzata in lossodromiche più brevi su una carta di Mercatore per ridurre al minimo i mutamenti nella determinazione della rotta.



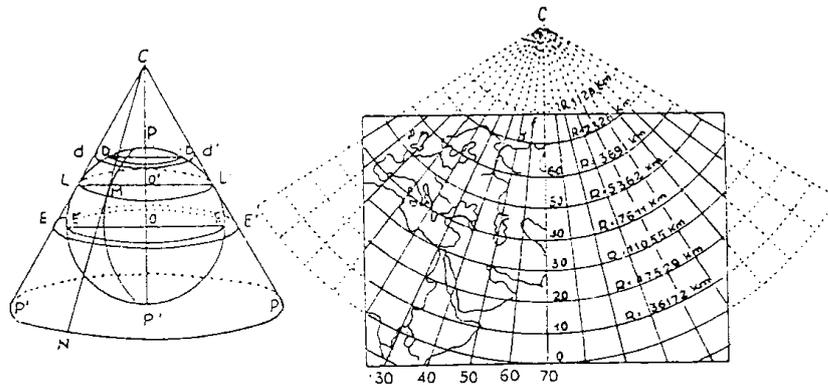
Osservazione 4.4.1 Le carte conformi, che sono la maggior parte di quelle utilizzate, non sono dei ripieghi. La ragione è questa: in $P \in A$, se (A, f) è conforme, le lunghezze vengono moltiplicate infinitesimalmente per un fattore di proporzionalità $k(P)$ che dipende solo da P e non dalle direzioni tangenti in P .

Poiché praticamente si lavora spesso in domini molto piccoli A di \mathbb{S} , se la carta non è troppo deformante, il coefficiente k varierà di poco in un piccolo dominio di A e si potrà quindi con un'approssimazione sufficiente, calcolare le lunghezze e le aree con metodi correttivi.

La carta di Mercatore classica è una vera catastrofe per il coefficiente k quando ci si avvicina ai poli, poiché esso tende all'infinito e dunque varia di molto.

I problemi di distanza e di area sono dunque praticamente irrisolvibili con buona precisione: al contrario la carta di Mercatore classica è eccellente in vicinanza dell'equatore, poiché il coefficiente k ammette un minimo e varia poco nelle vicinanze del minimo. Ma ogni punto può diventare un punto di un "equatore" opportuno. In genere si considera il meridiano passante per il punto e poi il cilindro tangente alla sfera lungo il meridiano considerato, ottenendo la proiezione trasversa di Mercatore. Prima chiamata di Gauss, ora detta MTU (Mercator Transversal Universal), è adottata da molti stati tra cui l'Italia per le carte topografiche a larga scala. La superficie cilindrica su cui viene trasferito il reticolato dei meridiani e dei paralleli avvolge l'ellissoide in modo tale da essere tangente al meridiano centrale dell'area limitata che si vuole rappresentare; di solito non più di 3° di longitudine a ovest e a est del meridiano centrale.

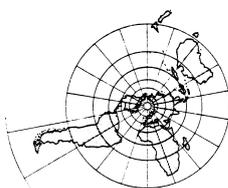
Esistono numerosi altri tipi di proiezioni. Per esempio si può proiettare la sfera su di un cono tangente lungo un parallelo fissato e poi sviluppare il cono sul piano chiedendo ad esempio che la proiezione sia conforme (proiezione di Lambert).



Come abbiamo visto ogni proiezione presenta vantaggi e svantaggi che variano in generale con le latitudini delle regioni da rappresentare; queste difficoltà hanno generato numerose idee originali, esempi delle quali sono le carte che riportiamo nelle pagine seguenti.



Projection de Lorgna transverse étendue à 360°
(transformation d'Hammer-Aitoff)

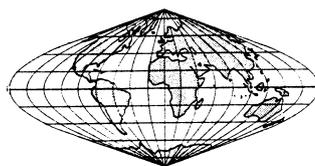


Extrapolation de la projection stéréographique
(aspect direct)

da R.Cuenin, *Cartographie générale*, t.I, Eyrolles



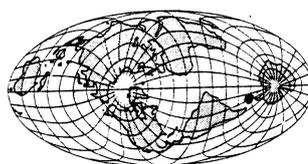
Projection de Briese meister



Projection de Sanson-Flamsteed



Projection de Mollweide



Projection « Atlantis » de Bartholomew

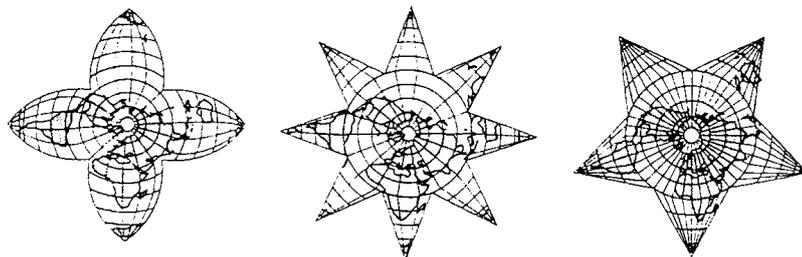


Projection d'Eckert IV

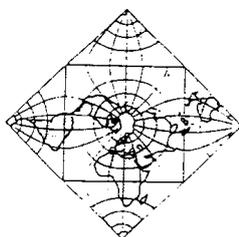


Projection « esmerillo » de Raisz

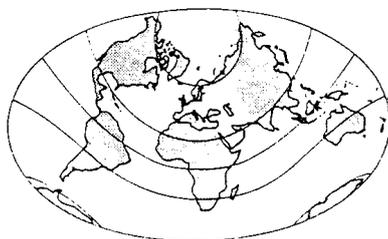
da R.Cuenin, *Cartographie générale*, t.I, Eyrolles



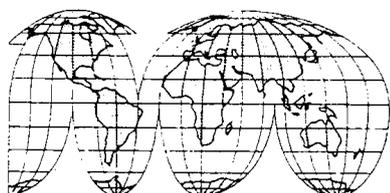
Projections étoilées



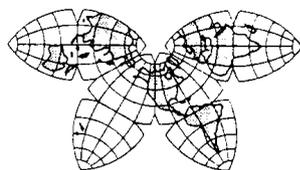
Projection périodique de Peuce



Projection compensée de Bertin



Projection interrompue de Goode



Projection interrompue de Cahill

da R.Cuenin, *Cartographie générale*, t.I, Eyrolles

4.5 Note storiche

Compito essenziale della Geografia (scientifica) è stato sempre quello di dare una rappresentazione cartografica di tutto il mondo conosciuto, anche quando la Terra era considerata un disco, come nel periodo della Geografia ionica. Quando poi si diffuse la dottrina della sfericità terrestre, che appare consolidata già al tempo di Platone, altri problemi basilari si aggiunsero: la determinazione delle dimensioni del globo e, più tardi, lo studio per rappresentare il globo su di un piano ([A]).

Le carte più antiche erano eseguite in maniera approssimativa riportando sul disegno le località rispettando, per quanto possibile, la loro posizione relativa e le reciproche distanze. Ciò indica che non si conosceva ancora un modo per assegnare una posizione assoluta dei punti rispetto alla superficie terrestre. Un grande passo in avanti in questa direzione fu compiuto da Dicearco da Messina (IV sec. a.C.), che può essere considerato come l'ideatore del reticolato geografico. Egli comprese che per individuare sulla carta le posizioni dei singoli punti era necessario riferirle a linee determinate. L'idea di Dicearco fu ripresa e sviluppata circa un secolo dopo da Eratostene di Cirene (273-193 a.C.), che aumentando le linee di riferimento sulla carta e basandosi sulle notizie fornite dai viaggiatori (come la lunghezza del giorno, l'identità di vegetazione, ecc.) arrivò ad una rappresentazione dell'ecumene (cioè della terra abitata) notevolmente progredita. La carta di Eratostene, che adombrava già gli elementi di una proiezione cilindrica è andata perduta, ma gli elementi rimasti consentono di ricostruirla nelle linee più generali, sebbene tra gli studiosi non vi sia accordo (Fig.1). Notiamo comunque che in tale carta le linee di riferimento erano poste a distanze disuguali.



Fig.1

Il problema della determinazione del punto e delle sue coordinate fu completamente risolto dal grande astronomo Ipparco di Nicea (II sec. a.C.). Egli,

contrariamente ad Eratostene, determinò la posizione dei punti sulla terra basandosi esclusivamente su metodi astronomici: trovò la latitudine con l'altezza degli astri misurata con lo gnomone e la longitudine valendosi delle differenze di ora osservate in occasione di eclissi (bisognerà aspettare la metà del '700 per poter misurare la longitudine accuratamente senza l'uso di complicati strumenti astronomici, cfr. [So]). Ipparco propose inoltre che nelle carte geografiche le linee di riferimento fossero equidistanti. Si introdusse così nelle carte geografiche quel carattere geometrico che è particolarmente evidente nel mappamondo di Claudio Tolomeo (II sec. a.C.), il solo che ci sia pervenuto dall'antichità e che è basato su un metodo matematico per la rappresentazione della terra: una lunga serie di dati di longitudine e di latitudine segnati su di una rete in proiezione conica, con paralleli circolari e meridiani convergenti verso i poli (Fig.2).

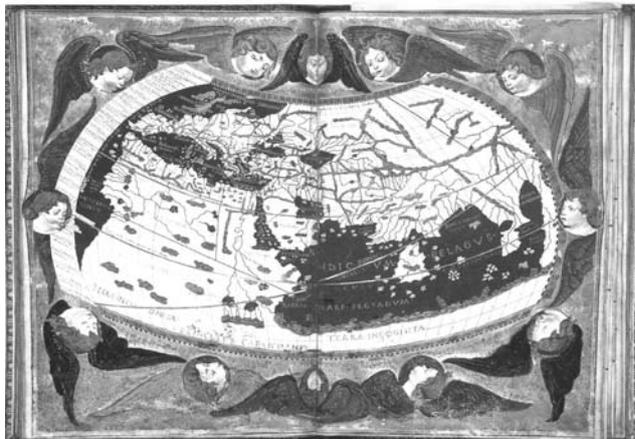


Fig.2

Riproduzione del mappamondo di Tolomeo di Nicolas Germanus, 1465-1470 circa

Al contrario della cartografia greca, che ebbe soprattutto carattere scientifico, la cartografia romana realizzò essenzialmente carte itinerarie per i mercanti, i funzionari e l'esercito, perseguì cioè scopi pratici.

Nel Medioevo, analogamente alle altre scienze, anche la geografia e la cartografia decadde molto. Tra l'altro nel mondo occidentale scomparve l'opera di Tolomeo, diffusa invece in Oriente dagli Arabi. "Le rappresentazioni del mondo dell'alto Medioevo erano in accordo con le Sacre Scritture. Potevano essere rettangolari per accordarsi con Isaia 11:12 o con l'Apocalisse 7:1, dove si parla dei "quattro angoli della terra", oppure ovali o circolari per accordarsi con Isaia 40:22 dove si parla del "circolo della terra". Ovviamente non vi era alcun bisogno di meridiani e di paralleli. Gerusalemme era esattamente al centro in

accordo con Ezechiele 5:5. La parte superiore della carta era orientata verso Est e comprendeva la collocazione del Paradiso terrestre. Le terre emerse erano circondate dalle “grandi acque” che un tempo avevano inondato la Terra e dalle sorgenti dei “quattro venti” (Daniele 7:2, Apocalisse 7:1) che soffiavano capricciosi intorno alla Città Santa.” ([G]).

Nel periodo rinascimentale, la comparsa in Italia della versione latina della “Geografia” di Tolomeo (che si diffuse rapidamente nel mondo occidentale), il maggior numero di viaggi e di esplorazioni, le imprese dei navigatori, diedero nuovo impulso alla cartografia e fecero rinascere il vecchio problema della rappresentazione della superficie sferica della Terra sul piano tramite quei procedimenti geometrici detti proiezioni. È da ricordare, a tale proposito, l’opera “Breve compendio de la sphaera y de la arte de navigar”, scritta dallo spagnolo Martin Cortés nella prima metà del ‘500 ed adottata come libro di testo nella famosa scuola per piloti e navigatori di Siviglia. Il titolo stesso del libro conferma la tendenza, propria del XVI secolo, ad identificare la matematica con l’arte della navigazione (cfr. [Y]).

I paesi più attivi nel ‘500 e nel ‘600 sono l’Italia e l’Olanda. In Olanda in particolare operò Gerardo Kremer (1512-94), detto Mercatore che “inventò” la proiezione che porta il suo nome. Egli spiegò nel seguente modo i principi sulla base dei quali fu disegnata la sua carta:

Eseguendo questa rappresentazione del mondo abbiamo tentato di usare una nuova proporzione ed una nuova correlazione dei meridiani con i paralleli. Abbiamo aumentato progressivamente i gradi di latitudine verso ciascun polo in proporzione all’allungamento dei paralleli rispetto all’equatore.

Mercatore è autore della più omogenea ed elaborata raccolta di carte di tutto il mondo (pubblicata tuttavia integralmente solo dopo la sua morte), la prima che rechi il titolo, divenuto poi d’uso generale, di Atlante (*Atlas*). L’Atlas di Mercatore si presenta come un’elaborazione originale del vasto materiale cartografico allora in circolazione, e si venne poi ampliando in successive edizioni a cura dei continuatori del grande cartografo; essa è preceduta da una serie di considerazioni sui problemi generali del Cosmo e della Terra (*Cosmographicae meditationes de fabrica mundi et fabricati figura*) che è opera personale del Mercatore; le singole carte sono sempre corredate di un breve testo o commentario illustrativo.

I primi del ‘700 chiusero l’era della cartografia empirica praticata sino ad allora e diedero inizio alla cartografia scientifica, che si fonda sulla determinazione astronomica della posizione dei punti fondamentali, sulla triangolazione e sullo sviluppo sul piano della superficie terrestre mediante precisi procedimenti matematici volti a ridurre al minimo le inevitabili alterazioni. La tecnica della triangolazione, introdotta da W. Snellius van Roijen (1617) per motivi puramente di Geodesia, ha avuto poi enorme importanza in Geometria. Infatti l’idea che

triangolazioni sempre più fini permettessero di ricostruire la “forma” della terra, ha suggerito di approssimare ogni superficie (compatta) mediante poliedri. È stata questa l’idea guida che ha portato H. Poincaré (1859-1912) alla Topologia combinatoria.

Dopo la seconda guerra mondiale le tecniche cartografiche hanno subito una rivoluzione. I rilevamenti aerei, la misurazione elettronica delle distanze per mezzo di fasci laser e della luce, la fotogrammetria hanno permesso una rappresentazione cartografica molto accurata, non solo dal punto di vista geometrico, della maggior parte della superficie terrestre.

Conclusione

Nei capitoli precedenti abbiamo visto come si può rispondere alla domanda: su quale superficie viviamo e come facciamo ad accorgercene facendo solo misure locali?

Il ruolo essenziale è giocato dal concetto di curvatura, che misura il difetto di euclidicità della superficie.

Potremmo porci un'analoga domanda per lo spazio in cui viviamo: la geometria dell'universo è euclidea o no?

Lo spazio ordinario si può pensare come superficie dello spazio quadrimensionale e introdurre anche ora una curvatura ([D]).

Come primo approccio potremmo riferirci a triangoli dello spazio aventi lati dell'ordine di miliardi di anni luce, se vogliamo un test significativo. Ma simili triangoli sono al limite delle osservazioni ottiche; inoltre, misurazioni geometriche su grandi scale, anche se possibili, sarebbero complicate dagli effetti della storia dell'universo, poiché quando guardiamo lontano nello spazio, necessariamente guardiamo indietro nel tempo, a causa della velocità finita di propagazione della luce ([C]).

Basandosi sulla densità dell'universo, osservazioni astronomiche dovrebbero stabilire qual è la geometria dell'universo. Ma non si è ancora pervenuti a risultati definitivi.

Come un atlante geografico, con carte bidimensionali, dà informazioni sulla curvatura della Terra nello spazio tridimensionale, così la relatività generale permette di costruire un atlante dello spazio, dando informazioni sulla curvatura dell'universo ([C]).

Einstein propone un modello con curvatura positiva ed assimila l'universo ad una sfera di dimensione 3, dunque un universo finito ma illimitato (cioè privo di bordo). Proprio per risolvere la secolare questione del "bordo" dell'universo, già Riemann aveva immaginato un modello di universo, incollando due sfere piene lungo la loro superficie.

Questo modello somiglia sorprendentemente all'universo cantato da Dante nella Divina Commedia (Paradiso, XXVIII).

La sfera in auge nella rappresentazione medioevale del Cosmo, "morta" con la Fisica newtoniana, riappare così "trasfigurata" nella Fisica einsteniana. Così

commenta L.A. Radicati di Brozolo ([Ra]): “Forse nessuno [dei Lincei] si rammaricherebbe nell’apprendere che quella sfera, alla cui scomparsa le osservazioni di Galileo avevano tanto contribuito, ora è ricomparsa trasfigurata in seguito a nuove e più accurate osservazioni ed astrazioni più ardite di quanto neppure il superhumanus Archimedes avesse immaginato”.

Appendice

A.1 Proprietà differenziali metriche di una superficie.

Sia $M \subset \mathbb{R}^3$ una porzione di superficie regolare, che assumeremo rappresentata in un riferimento cartesiano dall'equazione vettoriale

$$P = P(u, v) = O + x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}.$$

Segue che

$$d\vec{P} = \vec{P}_u du + \vec{P}_v dv$$

dove $\vec{P}_u = (x_u, y_u, z_u)$ e $\vec{P}_v = (x_v, y_v, z_v)$.

Indicando con $ds = |d\vec{P}|$ l'elemento lineare si ottiene

$$ds^2 = |d\vec{P}|^2 = \vec{P}_u \cdot \vec{P}_u du^2 + 2\vec{P}_u \cdot \vec{P}_v dudv + \vec{P}_v \cdot \vec{P}_v dv^2$$

dove \cdot indica il prodotto scalare usuale di \mathbb{R}^3 . Ponendo

$$\begin{aligned} E &= \vec{P}_u \cdot \vec{P}_u = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2; \\ F &= \vec{P}_u \cdot \vec{P}_v = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v; \\ G &= \vec{P}_v \cdot \vec{P}_v = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 \end{aligned}$$

si ha

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

detta *prima forma quadratica fondamentale* (I FQF).

Se $\gamma : [t_1, t_2] \rightarrow M$ è una curva differenziabile a tratti, allora la lunghezza di γ è

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2} dt.$$

Siano P e Q due punti di M . Indicato con $\Omega(P, Q)$ l'insieme di tutte le curve congiungenti P con Q , poniamo

$$d(P, Q) = \inf\{\mathcal{L}(\gamma) : \gamma \in \Omega(P, Q)\};$$

d risulta essere una distanza su M detta *distanza intrinseca*. Se $\eta \in \Omega(P, Q)$ è tale che $d(P, Q) = \mathcal{L}(\eta)$, allora η è detta *geodetica minimale*; una *geodetica* è una curva localmente minimale. Si può provare che le geodetiche sono le linee della superficie per le quali in ogni punto il piano osculatore è ortogonale al piano tangente alla superficie (ovvero per le quali la normale principale coincide con la normale alla superficie).

Da qui segue facilmente che se M è una superficie (regolare) simmetrica rispetto ad un piano α , allora la curva $\gamma = M \cap \alpha$ è una geodetica. Quindi tutti i meridiani di una superficie di rotazione sono geodetiche; invece un parallelo è una geodetica se la tangente, alla curva che genera la superficie nel punto considerato, è parallela all'asse di rotazione.

Siano ora γ e $\tilde{\gamma}$ due curve di M passanti per uno stesso punto P . Siano $\vec{dP}(du, dv)$ e $\vec{dP}(\tilde{d}u, \tilde{d}v)$ i vettori tangenti in P alle curve. Allora per l'angolo ϕ tra le due curve si ha

$$\cos \phi = \frac{\vec{dP} \cdot \vec{dP}}{|\vec{dP}| |\vec{dP}|}$$

Se consideriamo le linee $u=\text{cost}$ e $v=\text{cost}$ si ha per i vettori tangenti

$$\vec{dP} = \vec{P}_u du, \quad \vec{dP} = \vec{P}_v dv$$

e quindi

$$\cos \phi = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

Parimenti per l'elemento di area si ha

$$d\sigma = |\vec{dP} \wedge \vec{dP}| = |\vec{P}_u \wedge \vec{P}_v| dudv.$$

Ma

$$|\vec{P}_u \wedge \vec{P}_v|^2 = |\vec{P}_u|^2 |\vec{P}_v|^2 \sin^2 \phi = EG \left(1 - \frac{F^2}{EG}\right) = EG - F^2$$

dunque

$$d\sigma = \sqrt{EG - F^2} dudv.$$

Nota. I parametri u e v sono detti *isotermi* per M se per ogni (u, v) si ha

$$|\vec{P}_u| = |\vec{P}_v| = \lambda(u, v) > 0 \quad \text{e} \quad \vec{P}_u \cdot \vec{P}_v = 0.$$

Si può dimostrare che su *ogni* superficie si possono trovare parametri isotermi, quindi l'elemento di lunghezza si può scrivere sempre nella forma

$$ds^2 = \lambda^2(u, v)(du^2 + dv^2).$$

Inoltre ogni cambiamento di coordinate tra parametri isotermi $f : (u, v) \mapsto (\tilde{u}, \tilde{v})$ è una funzione olomorfa. Quindi ogni superficie $M \subset \mathbb{R}^3$ diventa una superficie di Riemann nel senso dell'Analisi complessa.

A.2 Curvatura gaussiana

Per capire la genesi intuitiva del concetto partiamo dalle curve.

Una circonferenza di raggio r ha curvatura costante $k = 1/r$; una curva qualsiasi γ ha curvatura $k(P)$, in un punto P , se $k(P)$ è la curvatura della circonferenza che meglio approssima la curva nell'intorno di P .

Una retta (che può considerarsi una circonferenza di raggio infinito) ha curvatura nulla. La curvatura dà una stima di quanto la curva si allontani dall'essere una retta in quel punto.

Se M è una superficie di \mathbb{R}^3 ed n è la retta perpendicolare in P al piano tangente $T_P(M)$, allora nel fascio di piani di asse n esistono due piani α_1 e α_2 tali che le loro sezioni γ_1 e γ_2 hanno in P rispettivamente curvatura (orientata) massima $k_1(P)$ e minima $k_2(P)$. Si chiama curvatura (estrinseca) in P

$$K(P) = k_1(P) \cdot k_2(P).$$

Se $K(P) > 0$ il punto si dice *ellittico*, se $K(P) < 0$ si dice *iperbolico*, se $K(P) = 0$ si dice *parabolico*.

Ora il celebre "Theorema egregium" di C.F.Gauss³ (1825) afferma che se una superficie (considerata come un velo flessibile ed inestensibile) viene realizzata in modo diverso nello spazio, la sua curvatura non cambia.

Ciò è reso chiaro dal fatto che vale

$$K(P) = \lim_{T \rightarrow P} \frac{\varepsilon(T)}{\mathcal{A}(T)}$$

dove il secondo membro (la curvatura intrinseca) è espressa con quantità dipendenti soltanto dalla metrica interna della superficie (individuata dai coefficienti della I FQF).

A.3 Corrispondenze tra superficie di \mathbb{R}^3 .

Siano M e \overline{M} due superficie di \mathbb{R}^3 . Un'applicazione $f : M \rightarrow \overline{M}$ è un'*isometria locale* se per ogni $P \in M$ esiste un intorno coordinato U tale che $f : U \rightarrow f(U)$ sia un diffeomorfismo che conservi la I FQF, cioè se (u, v) sono le coordinate in U e $(\overline{u}, \overline{v})$ sono quelle indotte su $f(U)$ da f allora

$$ds^2 = d\overline{s}^2.$$

Da qui segue che se $\gamma : I \rightarrow M$ è una curva di M , per la curva $f \circ \gamma$ di \overline{M} si ha

$$\mathcal{L}(f \circ \gamma) = \mathcal{L}(\gamma).$$

³Si superficies curva in quamcumque aliam superficiem explicatur, mensura curvaturae in singulis punctis invariata manet.

Nel secolo XIX le isometrie locali venivano chiamate *applicabilità*: intuitivamente si tratta di una deformazione che non altera le lunghezze delle linee su di essa tracciate.

Il theorema egregium di Gauss mostra che se f è un'isometria locale e $\bar{P} = f(P)$, allora

$$K(\bar{P}) = K(P)$$

dove K è la curvatura gaussiana della superficie. Questa condizione è solo necessaria. Si può dimostrare che essa è anche sufficiente se le due superfici hanno curvatura costante, cioè vale

Teorema A.3.1 *Se M e \bar{M} hanno la stessa curvatura gaussiana costante, allora sono applicabili.*

Una superficie applicabile su un piano è detta *svilupabile* (su di un piano). Dunque le superfici svilupabili sono quelle per cui $K(P) = 0$ per ogni $P \in M$, cioè le superfici aventi tutti i punti parabolici (e.g. piano, cono, cilindro).

Da ciò segue che una figura sferica non può essere applicabile su di un piano, poiché la curvatura di una sfera di raggio r è $K = 1/r^2$.

Siano M e \bar{M} due superfici di \mathbb{R}^3 . Un diffeomorfismo $f : M \rightarrow \bar{M}$ che non alteri le misure angolari si chiama applicazione *conforme*. Si ha che f è conforme se e solo se

$$E : \bar{E} = F : \bar{F} = G : \bar{G}$$

o equivalentemente se e solo se

$$d\bar{s}^2 = \lambda(u, v)ds^2$$

con $\lambda(u, v) > 0$. Quindi un'applicazione conforme si comporta nell'infinitesimo come una similitudine di rapporto $\lambda(u, v)$; ciò è naturale intuitivamente perché due triangoli infinitesimi corrispondenti tramite f risultano simili avendo angoli omologhi uguali. Naturalmente $\lambda(u, v)$ può considerarsi come la scala *infinitesimale* nel punto $(u, v) \in M$. Essa non dipende dalla direzione, ma solo dalla posizione del punto. Alla parola *conforme* i cartografi preferiscono il termine "ortomorfica".

A causa dell'esistenza di parametri isotermi segue che esiste sempre un'applicazione conforme tra una porzione di M e una porzione di piano (con la metrica euclidea).

Un diffeomorfismo $f : M \rightarrow \bar{M}$ che non alteri le misure areali è un'applicazione *equivalente*. Si ha che f è equivalente se e solo se

$$d\sigma = d\bar{\sigma}$$

cioè

$$EG - F^2 = \bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2.$$

A.4 Ancora sulla curvatura gaussiana

Se siamo su una superficie M è possibile scoprire il valore di K in un punto P , tenendo conto di un teorema dovuto a Diquet.

Sia $P \in M$ e $T_P(M)$ il piano tangente in P a M . La circonferenza di $T_P(M)$ di centro P e raggio ε , $C_E(P, \varepsilon)$, ha lunghezza

$$\mathcal{L}(C_E(P, \varepsilon)) = 2\pi\varepsilon.$$

Consideriamo ora la circonferenza di M di centro P e raggio ε , cioè

$$C_M(P, \varepsilon) = \{Q \in M : d(P, Q) = \varepsilon\}$$

essendo d la distanza intrinseca di M . Ebbene Diquet ha provato che

$$\mathcal{L}(C_M(P, \varepsilon)) = \mathcal{L}(C_E(P, \varepsilon)) \left[1 - \frac{K(P)}{3!}\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2) \right] = 2\pi\varepsilon - \frac{2\pi}{6}K(P)\varepsilon^3 + o(\varepsilon^3)$$

da cui

$$K(P) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{3}{\pi} \left[\frac{2\pi\varepsilon - \mathcal{L}(C_M(P, \varepsilon))}{\varepsilon^3} \right].$$

Questa formula (detta anche di Bertrand-Puiseux) mostra che la metrica di curvatura costante $K(P)$ (definita sul piano tangente) è la migliore approssimazione della geometria locale della varietà.

Quindi una buona approssimazione di $\mathcal{L}(C_M(P, r))$ è $2\pi r - K\pi r^3/3$.

Se $M = \mathbb{S}(r)$, allora il raggio della circonferenza $C_M(P, \varepsilon)$ è $r \sin \frac{\varepsilon}{r}$, quindi

$$\mathcal{L}(C_M(P, \varepsilon)) = 2\pi r \sin \frac{\varepsilon}{r} = 2\pi\varepsilon - \frac{2\pi\varepsilon^3}{6r^2} + o\left(\left(\frac{\varepsilon}{r}\right)^3\right)$$

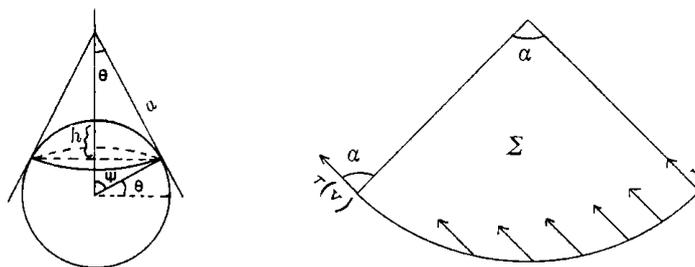
da cui $K(P) = 1/r^2$.

Altro modo di scoprire il valore di K in un punto P di M può essere ottenuto usando il *parallelismo di Levi - Civita*.

Illustriamo il procedimento (in modo intuitivo e non formale) nel caso di una sfera $\mathbb{S}(r)$.

Sia come al solito D_ψ la calotta sferica, di centro P , avente come bordo il parallelo C di colatitudine $\psi = \frac{\pi}{2} - \theta > 0$. Indichiamo inoltre con Σ il cono circoscritto a $\mathbb{S}(r)$ lungo C e con $f : \Sigma \rightarrow E$ l'isometria locale corrispondente tra Σ ed un piano euclideo E .

Due vettori $\mathbf{v}(Q)$ e $\mathbf{w}(Q')$ applicati in punti di C si diranno *paralleli* rispetto alla geometria di $\mathbb{S}(r)$ se $f(\mathbf{v}(Q))$ e $f(\mathbf{w}(Q'))$ sono paralleli nel senso usuale sul piano E . Così, fissato un vettore \mathbf{v} , si definisce un *trasporto parallelo* τ lungo C : i vettori \mathbf{v} e $\tau(\mathbf{v})$ saranno paralleli rispetto alla geometria di $\mathbb{S}(r)$, ma non rispetto a quella dell'ambiente. Se per esempio $\mathbf{v}(Q)$ ha la direzione della generatrice di Σ , dopo aver percorso C , il vettore $\tau(\mathbf{v}(Q))$ formerà con $\mathbf{v}(Q)$ un angolo α , uguale all'angolo dello sviluppo del cono.



Si chiama *deviazione* di \mathbf{v} l'angolo

$$\delta = 2\pi - \alpha = 2\pi(1 - \sin \theta)$$

(cioè la rotazione di \mathbf{v} come appare ad un osservatore di $\mathbb{S}(r)$ in Q).

Infatti, osservando la figura, si vede facilmente che

$$\alpha = 2\pi \frac{\rho}{a} = 2\pi \sin \theta$$

poiché $\alpha : 2\pi = 2\pi\rho : 2\pi a$. Inoltre per l'applicazione di Archimede, $\mathcal{A}(D_\psi) = 2\pi r h$ con $h = r - r \cos \psi = r(1 - \sin \theta)$. Poiché $K(P) = 1/r^2$ segue

$$K(P) = \frac{\delta}{\mathcal{A}(D_\psi)} \quad \text{se } \psi \neq 0.$$

Se $\psi = 0$, allora Σ diviene $T_P(\mathbb{S}(r))$ e non c'è alcuna deviazione, ma in quel caso anche $\mathcal{A}(D_\psi) = 0$.

Rimanendo fermi in un punto non è possibile accorgersi della curvatura della terra: la geometria sul piano tangente è quella euclidea!

Bibliografia

- [AL] B.ACCORDI, E.LUPIA PALMIERI, *Il globo terrestre e la sua evoluzione*, Zanichelli, Bologna, 1987.
- [A] R.ALMAGIÀ, *Storia della Geografia*, in *Storia delle Scienze*, UTET, 1965.
- [Be] P.BENCINI, *Appunti di cartografia*, Ist. Geografico Militare, Firenze, 1976.
- [B] M.BERGER, *Géométrie*, vol.V, Cedic - Nathan, Paris,1977.
- [Ber] C.BERTOLINI, *Mini corso di trigonometria sferica*, Istituto Tecnico Nautico "Artiglio", Viareggio.
- [Bi] G.BIRARDI, *Corso di geodesia, topografia e fotogrammetria*, vol.I,II, Ist. Geografico Militare, Firenze, 1965.
- [Bl] D.BLATNER, *Le gioie del π* , Garzanti, 1999.
- [Bo] C.B.BOYER, *Storia della matematica*, Oscar Mondadori, 1980.
- [C] A.CAVALIERE, *Appunti del corso di Cosmologia*, Un. Tor Vergata, Roma, 1992.
- [D] G.DE CECCO, *Geometria dell'Universo*, Nuova secondaria, 6 (1999-2000), La Scuola, Brescia, 41-43.
- [EA] F.ENRIQUES, U.AMALDI, *Elementi di Geometria*, Parte seconda, Zanichelli, Bologna, 1970.
- [EE] EUCLIDE, *Elementi*, a cura di A.Frajese, L.Maccioni, UTET, 1988.
- [EME] L.BERZOLARI, G.VIVANTI, D.GIGLI (a cura di), *Enciclopedia delle matematiche elementari e complementi*, Hoepli, 1964.
- [F] H.FREUDENTHAL, *La matematica nella scienza e nella vita*, Il Saggiatore, Milano, 1967.

- [G] M.GARDNER, *Sulle proiezioni di carte geografiche*, Le Scienze, 90 (Febbraio 1976).
- [GG] A.F.GIMIGNANO, G.GONNELLA, *Dal mondo alla carta, dalla carta al mondo*, Nuova Secondaria, XIV,8, 1997, 100–102.
- [GR] L.GIACARDI, S.ROERO, *La matematica delle civiltà arcaiche*, Stampatori Didattica, Torino, 1979.
- [HV] D.HILBERT, S.COHN VOSSEN, *Geometria intuitiva*, Boringhieri, Torino, 1960.
- [K] A.KOESTLER, *I Sonnambuli*, Jaca Book, Milano, 1982.
- [L] G.LORIA, *Storia delle Matematiche*, Hoepli, 1950.
- [Ma] E.MARTINELLI, *Lezioni di Geometria con esercizi*, vol.I,II, Veschi, Roma.
- [Mi] J.MILNOR, *A Problem in Cartography*, Am.Math.Monthly, 76 (1969), 1101-1112.
- [Mo] A.MORI, *Le carte geografiche*, Libreria Goliardica, Pisa, 1990.
- [O] R.OSSERMAN, *Poesia dell'Universo*, Longanesi & C., Milano, 1995.
- [Ra] L.A.RADICATI DI BROZOLO, *Morte e trasfigurazione della sfera*, La Crusca per voi, 5, Ottobre 1992.
- [RS] B.A.ROSENFELD, N.D.SERGEEVA, *Stereographic Projection*, MIR, Mosca, 1977.
- [R] L.RUSSO, *The definitions of Fundamental Geometric Entities contained in Book I of Euclid's Elements*, Arch. Hist. Exact Sci., 52 (1998), 195–219.
- [S] A.SEIDENBERG, *The ritual origin of Geometry*, Arch. Hist. Exact Sci., 1 (1969–62), 488–527.
- [So] D.SOBEL, *Longitudine*, Bur Saggi, 1999.
- [SV] B.SPOTORNO, V.VILLANI, *Mondo reale e modelli matematici*, Guida all'insegnamento della matematica nelle scuole superiori, La Nuova Italia Editrice, 1976.
- [Y] L.YOUNG, *Mathematicians and Their Times*, North-Holland Mathematics Studies 48, Amsterdam - New York - Oxford, 1981.