CAPITOLO 6

L-Spazi Topologici

6.1. L-insiemi

DEFINIZIONE 6.1.1. *Sia L un reticolo completo. Per ogni $X \in |\mathbf{Set}|$ si definisce **L-powerset** di X il reticolo completo*

$$L^X = \{A : X \to L | A \ funzione\ arbitraria\}$$

con la relazione indotta puntualmente da quella di L, per la quale $\forall A, B \in L^X$ risulta

$$A \leq B \ \Leftrightarrow \ A(x) \leq B(x), \quad \forall x \in X.$$

Rispetto a tale relazione d'ordine L^X è un reticolo completo in cui si verifica che i sup e gli inf sono deducibili da quelli di L nel modo seguente: $\forall (A_i)_{i \in I} \subseteq L^X$, $\forall x \in X$

$$\left(\bigvee_{i \in I} A_i \right)(x) = \bigvee_{i \in I} \left(A_i(x) \right)$$

e

$$\left(\bigwedge_{i \in I} A_i \right)(x) = \bigwedge_{i \in I} \left(A_i(x) \right).$$

*Gli elementi di L^X si chiamano L-**insiemi** su (o L-sottoinsiemi di) X. Il supporto di un L-insieme $A \in L^X$ è*

$$A_\perp = \{x \in X | A(x) \neq \perp\}.$$

Se $Y \subseteq X$ e $\lambda \in L$, l'L-insieme $\lambda_Y \in L^X$ definito $\forall x \in X$ da

$$\lambda_Y(x) = \begin{cases} \lambda & \text{se } x \in Y \\ \perp & \text{se } x \notin Y \end{cases}$$

si dice L-insieme costante su Y.

Gli L-insiemi costanti su un singoletto $\{x\}$ di valore $\lambda \neq \perp$ si chiamano punti su X e si indicano con λ_x.

PROPOSIZIONE 6.1.2. *Se L verifica la $(\mathbf{ILD}\infty)$ allora anche L^X verifica la $(\mathbf{ILD}\infty)$.*

DIMOSTRAZIONE. Siano $A \in L^X$, $X \in |\mathbf{Set}|$, e $\mathcal{B} \subseteq L^X$. Poiché per ipotesi L verifica (**ILD**∞) allora $\forall x \in X$ risulta

$$\begin{aligned}\left(A \wedge \left(\bigvee \mathcal{B}\right)\right)(x) &= A(x) \wedge \left(\bigvee \mathcal{B}\right)(x)\\ &= A(x) \wedge \left(\bigvee \{B(x) | B \in \mathcal{B}\}\right)\\ &= \bigvee \{A(x) \wedge B(x) | B \in \mathcal{B}\}\\ &= \bigvee \{(A \wedge B)(x) | B \in \mathcal{B}\}\\ &= \left(\bigvee \{A \wedge B | B \in \mathcal{B}\}\right)(x)\end{aligned}$$

ovvero in L^X si verifica (**ILD**∞). □

Analogamente si verifica che se L è un reticolo completamente distributivo, allora anche L^X eredita da L tale struttura.

PROPOSIZIONE 6.1.3. *Se in L esiste un'involuzione che inverte l'ordine (o una complementazione) essa induce un'involuzione che inverte l'ordine (o una complemantazione) su* L^X.

DIMOSTRAZIONE. Sia

$$\kappa : L \to L$$

un'involuzione che inverte l'ordine (o una complementazione) in L. Indichiamo con lo stesso simbolo, κ, l'applicazione

$$\kappa : L^X \to L^X$$

definita $\forall A \in L^X$ e $\forall x \in X$ da

$$\big(\kappa(A)\big)(x) = \kappa(A(x)).$$

κ è un'involuzione che inverte l'ordine in L^X: infatti

- $\forall A \in L^X$ e $\forall x \in X$ si ha
$$\big(\kappa(\kappa(A))\big)(x) = \kappa\big(\kappa(A)(x)\big) = \kappa\big(\kappa(A(x))\big) = A(x)$$
ovvero κ è un'involuzione.
- $\forall A, B \in L^X$, $\forall x \in X$, si ha
$$\begin{aligned}A \leq B &\Rightarrow A(x) \leq B(x)\\ &\Rightarrow \kappa(B(x)) \leq \kappa(A(x))\\ &\Rightarrow (\kappa(B))(x) \leq (\kappa(A))(x)\end{aligned}$$
ovvero κ inverte l'ordine.

□

In particolare, da ciò segue che se L è un'algebra di Boole o un'algebra di Hutton (ovvero un reticolo completo, completamente distributivo dotato di un'involuzione che inverte l'ordine), allora anche L^X lo è.

Nelle proprietà seguenti sia L un reticolo completo.

PROPOSIZIONE 6.1.4. *Se $a \in L$ è irriducibile allora $\forall x \in X$, a_x è irriducibile.*

DIMOSTRAZIONE. Siano $x \in X$ ed $a \in L$, a elemento irriducibile. Se $A, B \in L^X$ sono tali che $a_x = A \vee B$, allora $\forall x' \in X$, $x' \neq x$ risulta

$$A(x') \vee B(x') = (A \vee B)(x') = a_x(x') = \perp \Rightarrow A(x') = \perp \text{ e } B(x') = \perp$$

$$\begin{aligned} A(x) \vee B(x) = a \Rightarrow & \ A(x) = a \ \text{ o } \ B(x) = a \\ \Rightarrow & \ A = a_x \ \text{ o } \ B = a_x \end{aligned}$$

da cui segue la tesi. □

PROPOSIZIONE 6.1.5. *Se $a \in L$ è un atomo, allora, $\forall x \in X$, a_x è un atomo.*

DIMOSTRAZIONE. Se $A \in L^X$, $A \neq \perp_X$ è tale che $A \leq a_x$, allora $A_\perp = \{x\}$ e $\perp \neq A(x) \leq a$ quindi essendo a un atomo, $A(x) = a$, ovvero $A = a_x$, quindi a_x è un atomo. □

PROPOSIZIONE 6.1.6. *Se $A \in L^X$ è irruducibile in L^X allora $A_\perp = \{x\}$ e $A(x)$ è irriducibile in L cioè A è del tipo a_x con $x \in X$ e $a \in L$ irriducibile.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $A \in L^X$ irriducibile in L^X. Se supponiamo per assurdo che $\exists x, x' \in A_\perp$, $x \neq x'$ allora

$$\bigvee_{y \neq x'} \big(A(y)\big)_y \vee \big(A(x')\big)_{x'} = A$$

ovvero A è riducibile, che è assurdo! Pertanto, essendo $A \neq \perp_X$, segue che $A = a_x$. Inoltre a è irriducibile in L; infatti, se

$$a = b \vee b', \text{ con } b, b' \in L$$

allora per l'irriducibilità di A si ha

$$\begin{aligned} A = a_x = b_x \vee {b'}_x \Rightarrow & \ b_x = a_x \text{ o } {b'}_x = a_x \\ \Rightarrow & \ b = a \text{ o } b' = a. \end{aligned}$$

□

PROPOSIZIONE 6.1.7. *Se $A \in L^X$ è un atomo in L^X allora $A_\perp = \{x\}$ e $A(x)$ è un atomo, cioè A è del tipo a_x con $x \in X$ e $a \in L$ atomo.*

DIMOSTRAZIONE. Sia A un atomo in L^X. Se ci fossero due elementi $x \neq x'$ tali che $x, x' \in A_\perp$, allora $\big(A(x)\big)_x$ sarebbe diverso dal minimo $\perp_X$ e strettamente minore di A, contro l'ipotesi che A sia un atomo.

Quindi A è del tipo a_x. Inoltre $a \in L$ è un atomo, altrimenti esisterebbe $a' \leq a$, $\perp \neq a' \neq a$ e allora sarebbe ${a'}_x \leq a_x = A$, con $\perp_X \neq {a'}_x \neq a_x$, che è assurdo. □

Definizione 6.1.8. *Sia* $f \in \mathbf{Set}(X,T)$.
Si dice ***operatore L-powerset inverso*** *associato a (o di)* f *la funzione*

$$f_L^{\leftarrow} : L^T \to L^X$$

definita $\forall B \in L^T$ *da*

$$f_L^{\leftarrow}(B) = B \circ f.$$

Proposizione 6.1.9. *Sia* $f \in \mathbf{Set}(X,T)$.

(1) $f_L^{\leftarrow}$ *conserva* $\bigvee$, $\bigwedge$.
(2) *Se su* L *è definita un'involuzione che inverte l'ordine* $\kappa : L \to L$, *allora* $f_L^{\leftarrow}$ *commuta con le involuzioni indotte da* κ *su* L^T *ed* L^X.

Dimostrazione. (1) Verifichiamo che $f_L^{\leftarrow}$ conserva $\bigwedge$.
Se $\mathcal{B} \subseteq L^T$ ed $x \in X$, allora

$$\begin{aligned} f_L^{\leftarrow}\left(\bigwedge \mathcal{B}\right)(x) &= \left((\bigwedge \mathcal{B}) \circ f\right)(x) \\ &= (\bigwedge \mathcal{B})(f(x)) \\ &= \bigwedge \{B(f(x)) | B \in \mathcal{B}\} \\ &= \bigwedge \{(f_L^{\leftarrow}(B))(x) | B \in \mathcal{B}\} \\ &= \left(\bigwedge f_L^{\leftarrow}(\mathcal{B})\right)(x). \end{aligned}$$

La dimostrazione è analoga per $\bigvee$.

(2) Se $B \in L^T$ allora

$$\begin{aligned} \big(f_L^{\leftarrow}(\kappa(B))\big)(x) &= \big(\kappa(B)\big)(f(x)) \\ &= \kappa\big(B(f(x))\big) \\ &= \kappa\big(f_L^{\leftarrow}(B)(x)\big) \\ &= \big(\kappa(f_L^{\leftarrow}(B))\big)(x). \end{aligned}$$

□

Osservazione 6.1.10. Poiché $f_L^{\leftarrow}$ conserva $\bigwedge$, per il Teorema del Funtore Aggiunto esiste un unico aggiunto a sinistra di $f_L^{\leftarrow}$,

$$f_L^{\rightarrow} : L^X \to L^T$$

definito, come è noto, $\forall A \in L^X$ da

$$f_L^{\rightarrow}(A) = \bigwedge \{B \in L^T | A \leq f_L^{\leftarrow}(B)\}$$

e detto **operatore powerset diretto** associato a (o di) f.

Sempre, dal Teorema del Funtore Aggiunto segue che $f_L^{\rightarrow}$ conserva $\bigvee$.

PROPOSIZIONE 6.1.11. *Se $f \in \mathbf{Set}(X,T)$, l'operatore L-powerset diretto di f si può ottenere direttamente da f mediante la seguente espressione.*

$$f_L^{\rightarrow}(A)(t) = \bigvee \{A(x)|x \in X : f(x) = t\}, \quad \forall A \in L^X, \quad \forall t \in T.$$

DIMOSTRAZIONE. Fissato un generico $t \in T$ e posto

$$\bigvee \{A(x)|x \in X : f(x) = t\} = a$$

e

$$\mathcal{B} = \{B \in L^T | A \leq f_L^{\leftarrow}(B)\}$$

allora

$$f_L^{\rightarrow}(A)(t) = \bigwedge \{B \in L^T | A \leq f_L^{\leftarrow}(B)\}(t) = \bigwedge \{B(t)|B \in \mathcal{B}\}.$$

Se $B \in \mathcal{B}$, allora $A(x) \leq B(f(x)) = f_L^{\leftarrow}(B)(x)$, $\forall x \in X$, quindi

$$A(x) \leq B(f(x)) = B(t), \quad \forall x \in X \ : \ f(x) = t$$

ovvero

$$a = \bigvee \{A(x)|f(x) = t\} \leq B(t)$$

da cui segue che

$$a \leq \bigwedge \{B(t)|B \in \mathcal{B}\}.$$

Se

$$\overline{B} = a_t \vee \left(\bigvee \{\top_{t'}|t' \in T : t' \neq t\}\right)$$

allora $\overline{B} \in L^T$ ed inoltre $\overline{B} \in \mathcal{B}$: infatti, $\forall x \in X$

$$f_L^{\leftarrow}(\overline{B})(x) = \begin{cases} \overline{B}(t) = a \ \text{ e } \ A(x) \leq a & \text{se } f(x) = t \\ \overline{B}(f(x)) = \top \ \text{ e } \ A(x) \leq \top & \text{se } f(x) \neq t. \end{cases}$$

Allora si ha

$$\bigwedge \{B(t)|B \in \mathcal{B}\} \leq \overline{B}(t) = a$$

e per doppia disuguaglianza segue la tesi. □

OSSERVAZIONE 6.1.12. Se $L = \mathit{2}$ l'L-powerset di un generico insieme X è isomorfo all'insieme delle parti $\mathcal{P}(X)$, tramite l'identificazione di ogni sottoinsieme di X con la sua funzione caratteristica.

L'operatore $\mathit{2}$-powerset diretto di $f \in \mathbf{Set}(X,T)$ si identifica, allora, con la corrispondenza che ad $A \subseteq X$ associa la cosiddetta immagine diretta di A

$$\{t \in T | \exists x \in A : f(x) = t\}.$$

L'operatore $\mathit{2}$-powerset inverso di f è invece la corrispondenza che associa a $B \subseteq T$ la cosiddetta immagine inversa di B

$$\{x \in X | f(x) \in B\}.$$

Questi sono gli operatori powerset tradizionali (o classici), già considerati nell'Esempio 1.8.12 con differente notazione per i powerset

$$f^{\rightarrow} : \mathit{2}^X \rightarrow \mathit{2}^T \text{ ed } f^{\leftarrow} : \mathit{2}^T \rightarrow \mathit{2}^X.$$

Proposizione 6.1.13.

(1) *Se* $f \in \mathbf{Set}(X,T)$, $g \in \mathbf{Set}(T,S)$, *allora*

(1.a) $(g \circ f)^{\rightarrow}_{L} = g^{\rightarrow}_{L} \circ f^{\rightarrow}_{L}$.

(1.b) $(g \circ f)^{\leftarrow}_{L} = f^{\leftarrow}_{L} \circ g^{\leftarrow}_{L}$.

(2) $\forall X \in |\mathbf{Set}|$,

$$(i_X)^{\rightarrow}_{L} = i_{L^X} = (i_X)^{\leftarrow}_{L}.$$

Dimostrazione. (1) Siano $f \in \mathbf{Set}(X,T)$, $g \in \mathbf{Set}(T,S)$.

(1.a) Se $A \in L^X$ ed $s \in S$ si ha

$$(g \circ f)^{\rightarrow}_{L}(A)(s) = \bigvee \{A(x) | x \in X : g \circ f(x) = s\}$$

e

$$\begin{aligned} g^{\rightarrow}_{L} \circ f^{\rightarrow}_{L}(A)(s) &= \bigvee \{f^{\rightarrow}_{L}(A)(t) | t \in T : g(t) = s\} \\ &= \bigvee \left\{ \left(\bigvee \{A(x) | x \in X : f(x) = t\} \right) | t \in T : g(t) = s \right\} \\ &= \bigvee \{A(x) | x \in X : \exists t \in T \text{ con } f(x) = t, g(t) = s\} \\ &= \bigvee \{A(x) | x \in X : g(f(x)) = s\}. \end{aligned}$$

(1.b) Sia $C \in L^S$, allora

$$\begin{aligned} (g \circ f)^{\leftarrow}_{L}(C) &= C \circ (g \circ f) \\ &= (C \circ g) \circ f \\ &= f^{\leftarrow}_{L}(C \circ g) \\ &= f^{\leftarrow}_{L} \circ g^{\leftarrow}_{L}(C). \end{aligned}$$

(2) Sia $A \in L^X$, allora

$$(i_X)^{\leftarrow}_{L}(A) = A \circ i_X = A = i_{L^X}(A).$$

Analogamente si dimostra l'altra uguaglianza. □

La proposizione 6.1.13 consente di poter dare la seguente Definizione.

Definizione 6.1.14. *Le corrispondenze*

$$X \in |\mathbf{Set}| \longmapsto \rightarrow_L (X) = L^X$$

ed

$$f \in \mathbf{Set}(X,T) \longmapsto \rightarrow_L (f) = f^{\rightarrow}_{L}$$

definiscono un funtore

$$\rightarrow_L : \mathbf{Set} \rightarrow \bigvee\text{-}\mathbf{CSLat}.$$

Le corrispondenze

$$X \in |\mathbf{Set}| \longmapsto \leftarrow_L (X) = L^X$$

ed

$$f \in \mathbf{Set}(X,T) \longmapsto \leftarrow_L (f) = f^{\leftarrow}_{L}$$

definiscono un funtore controvariante

$$\leftarrow_L : \mathbf{Set} \to \mathbf{CLat}.$$

*I funtori $\rightarrow_L$ ed $\leftarrow_L$ sono detti **funtori L-powerset**, rispettivamente, diretto ed inverso.*

6.2. L-Spazi Topologici

In questo paragrafo supporremo che L sia almeno un frame.

DEFINIZIONE 6.2.1. *Siano $X \in |\mathbf{Set}|$ ed $L \in |\mathbf{Frm}|$.*

*Una L-**topologia** τ su X è un sottosemireticolo $\bigvee$-completo dell'L-powerset di X, cioè una famiglia $\tau \subseteq L^X$ chiuso per $\bigvee$ e $\wedge$ in L^X.*

*La coppia (X, τ) si dice L-**spazio topologico** con sostegno X ed L-topologia τ.*

Gli elementi di τ si dicono ***aperti*** dell'L-spazio topologico.

Se in L, e quindi in L^X, è fissata una involuzione κ che inverte l'ordine, le immagini tramite κ degli aperti della L-topologia si dicono i ***chiusi*** dell'L-spazio topologico.

OSSERVAZIONE 6.2.2. Una $\mathit{2}$-topologia ed un $\mathit{2}$-spazio topologico sono, semplicemente, una topologia ed uno spazio topologico.

Vari concetti (come quello di intorno, chiusura$\cdots$) e vari assiomi (compattezza, separazione$\cdots$) si possono introdurre negli L-spazi topologici in modo analogo che negli spazi topologici tradizionali, in cui la complementazione dell'algebra di Boole $\mathcal{P}(X)$ è l'involuzione che inverte l'ordine utilizzata per la determinazione dei chiusi dello spazio.

Tali estensioni presentano difficoltà tecniche di vario tipo, poiché l'L-powerset di X, cui appartengono gli aperti dell'L-spazio topologico (X, τ), è un reticolo più generale del powerset classico $\mathcal{P}(X)$ che, come è noto è un'algebra di Boole completa e atomica.

In generale, invece, si suppone che L, e quindi L^X, sia un frame (condizione indispensabile perchè anche τ risulti essere sicuramente un frame) o un reticolo completamente distributivo o un'algebra di Hutton.

DEFINIZIONE 6.2.3. *Siano (X, τ), (T, δ) due L-spazi topologici.*

*Un'applicazione $f : X \to T$ si dice **continua** se il suo operatore L-powerset inverso $f_L^{\leftarrow}$ verifica la condizione*

$$f_L^{\leftarrow}(B) \in \tau, \quad \forall B \in \delta$$

cioè si può ridurre ad una funzione

$$f_L^{\leftarrow} : \delta \to \tau$$

che, evidentemente, è un morfismo di frame.

Osserviamo che dalla funtorialità di $\leftarrow_L$ segue che la composizione di funzioni continue è continua.

Inoltre, la funzione identica i_X è continua qualunque sia la L-topologia considerata su X; ciò segue subito dal fatto che il suo operatore L-powerset inverso è la funzione identica i_{L^X}.

DEFINIZIONE 6.2.4. *Fissato un reticolo completo L, indichiamo con*

$$L\text{-}\mathbf{Top}$$

la categoria avente per oggetti gli L-spazi topologici e per morfismi fra gli oggetti (X,τ), (T,δ) le funzioni continue fra tali L-spazi topologici. Composizione ed identità sono le stesse che in **Set**.

Evidentemente, L-**Top** è una categoria concreta.

6.3. (L, M)-Spazi Topologici

DEFINIZIONE 6.3.1. *Siano $X \in |\mathbf{Set}|$, $L, M \in |\mathbf{CDLat}|$.*
*Una (L, M)-**topologia** τ su X è un M-insieme sull'L-powerset di X*

$$\tau : L^X \to M$$

che verifica le seguenti condizioni:

(1) $\tau(\perp_X) = \tau(\top_X) = \top$.
(2) $\tau(A) \wedge \tau(A') \leq \tau(A \wedge A')$, $\forall A, A' \in L^X$.
(3) $\bigwedge \{\tau(A) | A \in \mathcal{A}\} \leq \tau(\bigvee \mathcal{A})$, $\forall \mathcal{A} \subseteq \tau$.

E' evidente che una $(L, \mathit{2})$-topologia si identifica con una L-topologia e una $(\mathit{2}, \mathit{2})$-topologia si identifica con una topologia tradizionale.

*La coppia (X, τ) con $X \in |\mathbf{Set}|$ e $\tau : L^X \to M$ (L, M)-topologia su X, si dice L-spazio M-topologico o anche (L, M)-**spazio topologico**.*

OSSERVAZIONE 6.3.2. Gli assiomi (1), (2), (3) sono equivalenti agli assiomi:

(a) $\mathcal{F} \subseteq L^X$, $\mathcal{F}$ finito $\Rightarrow \bigwedge \{\tau(F) | F \in \mathcal{F}\} \leq \tau(\bigwedge \mathcal{F})$.

(b) $\mathcal{A} \subseteq L^X \Rightarrow \bigwedge \{\tau(A) | A \in \mathcal{A}\} \leq \tau(\bigvee \mathcal{A})$.

In particolare l'assioma (1) si ottiene da (a) e (b) considerando, rispettivamente, $\mathcal{F} \doteq \emptyset$ e $\mathcal{A} = \emptyset$.

DEFINIZIONE 6.3.3. *Siano (X, τ), (T, δ) due (L, M)-spazi topologici.*
Una funzione

$$f : X \to T$$

*si dice **continua** tra tali spazi e si scrive*

$$f : (X, \tau) \to (T, \delta)$$

se verifica la condizione

$$\delta(B) \leq \tau\big(f_L^{\leftarrow}(B)\big), \quad \forall B \in L^T$$

o equivalentemente,

$$\delta \leq (f_L^{\leftarrow})_M^{\leftarrow}(\tau).$$

In effetti possiamo osservare che

$$f_L^{\leftarrow} : L^T \to L^X,\ (f_L^{\leftarrow})_M^{\leftarrow} : M^{L^X} \to M^{L^T},$$
$$\tau \in M^{L^X},\ \delta \in M^{L^T}$$

e ricordando la definizione degli operatori L-powerset si ha

$$(f_L^{\leftarrow})_M^{\leftarrow}(\tau) = \tau \circ f_L^{\leftarrow}$$

il che permette di provare la suddetta equivalenza.

Osservazione 6.3.4. 1. (X, τ) è un (L, M)-spazio topologico allora $i_X : X \to X$ è continua, infatti poiché $(i_X)_L^{\leftarrow} = i_{L^X}$ segue che

$$\tau\big((i_X)_L^{\leftarrow}(B)\big) = \tau(B), \quad \forall B \in L^X.$$

2. Se $f : (X, \tau) \to (T, \delta)$, $g : (T, \delta) \to (S, \sigma)$ sono continue, allora

$$g \circ f : (X, \tau) \to (S, \sigma)$$

è continua; infatti $\forall B \in L^S$ si ha

$$\sigma(B) \leq \delta\big(g_L^{\leftarrow}(B)\big) \leq \tau\big(f_L^{\leftarrow}\big(g_L^{\leftarrow}(B)\big)\big) = \tau\big((g \circ f)_L^{\leftarrow}(B)\big).$$

Definizione 6.3.5. *Indichiamo con*

$$(L, M)\text{-}\mathbf{Top}$$

la categoria concreta avente per oggetti gli (L, M)-spazi topologici e per morfismi fra due oggetti le applicazioni continue fra essi.

6.4. Reticoli Strutturati e Categorie Ground di L-insiemi

Definizione 6.4.1. *Un* ***reticolo strutturato*** *è una coppia*

$$(L, \Phi)$$

in cui L è un reticolo completo e $\Phi = \{\varphi_a\}_{a \neq \perp}$ è una famiglia di morfismi di semireticoli $\bigwedge$-completi

$$\varphi_a : L \to [\perp, a], \quad \forall a \in L,\ a \neq \perp.$$

$\forall \varphi_a \in \Phi$, l'aggiunta a sinistra di φ_a,

$$\varphi_a^{\dashv} : [\perp, a] \to L,$$

è, ovviamente, un morfismo di semireticoli $\bigvee$-completi.

DEFINIZIONE 6.4.2. *Sia $Y \in L^X$.*
L'intervallo

$$[\perp_X, Y] = \{A \in L^X | A \leq Y\}$$

si chiama ***powerset*** *dell'L-insieme Y e si indica con*

$$\mathcal{S}_Y = [\perp_X, Y].$$

OSSERVAZIONE 6.4.3. *Se si considera L^X come una categoria ordinata e Y come suo oggetto, allora $\mathcal{S}_Y$ risulta essere l'insieme di tutti e soli i sottooggetti di Y.*

DEFINIZIONE 6.4.4. *Siano (L, Φ) un reticolo strutturato e B un L-insieme, $B \in L^X$.*

*L'****operatore compressione*** *sul powerset $\mathcal{S}_B$ di B (o semplicemente su B), è l'applicazione*

$$p_B : L^X \to \mathcal{S}_B$$

definita, $\forall A \in L^X$, $\forall x \in X$ da

$$p_B(A)(x) = \begin{cases} \varphi_{B(x)}\big(A(x)\big) & \text{se } x \in B_\perp \\ \perp & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

*L'****operatore sollevamento*** *dal powerset $\mathcal{S}_B$ di B (o semplicemente da B), è l'applicazione*

$$l_B : \mathcal{S}_B \to L^X$$

definita, $\forall C \in \mathcal{S}_B$, $\forall x \in X$ da

$$l_B(C)(x) = \begin{cases} \varphi^{\dashv}_{B(x)}\big(C(x)\big) & \text{se } x \in B_\perp \\ \perp & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

OSSERVAZIONE 6.4.5. $\forall x \in X$, con $x \notin C_\perp$, si ha $l_B(C)(x) = \perp$: se $x \notin B_\perp$ la tesi segue dalla definizione dell'operatore sollevamento, se invece $x \in B_\perp$, allora l'affermazione segue dal fatto che $\varphi^{\dashv}_{B(x)}$ conserva $\bigvee$.

PROPOSIZIONE 6.4.6. *Se (L, Φ) è un reticolo strutturato e B è un L-insieme, $B \in L^X$, allora valgono le seguenti proprietà:*

(1) *p_B è un morfismo di semireticoli $\bigwedge$-completi.*
(2) *l_B è un morfismo di semireticoli $\bigvee$-completi.*
(3) *$l_B \dashv p_B$.*

DIMOSTRAZIONE. (1) Siano $\{A_j\}_{j\in J} \subseteq L^X$ e $x \in X$. Se $x \in B_\perp$, allora

$$\begin{aligned}\left(p_B\left(\bigwedge_{j\in J} A_j\right)\right)(x) &= \varphi_{B(x)}\left(\left(\bigwedge_{j\in J} A_j\right)(x)\right)\\ &= \varphi_{B(x)}\left(\bigwedge_{j\in J} A_j(x)\right)\\ &= \bigwedge_{j\in J} \varphi_{B(x)}\big(A_j(x)\big)\\ &= \bigwedge_{j\in J} \big(p_B(A_j)(x)\big)\\ &= \left(\bigwedge_{j\in J} p_B(A_j)\right)(x).\end{aligned}$$

Se $x \notin B_\perp$, risulta

$$\left(p_B\left(\bigwedge_{j\in J} A_j\right)\right)(x) = \perp = \left(\bigwedge_{j\in J} p_B(A_j)\right)(x).$$

(2) La dimostrazione è analoga a quella del punto (1) e comunque è conseguenza delle verifiche dei punti (1) e (3) per il Teorema del Funtore Aggiunto.

(3) Per ottenere la tesi verifichiamo che valgono le disuguaglianze di aggiunzione.

Siano $C \in \mathcal{S}_B$ e $x \in X$.

Se $x \in B_\perp$ allora

$$\begin{aligned}(p_B \circ l_B)(C)(x) &= p_B\big(l_B(C)\big)(x)\\ &= \varphi_{B(x)}\big(\varphi^{\dashv}_{B(x)}(C(x))\big)\\ &= \varphi_{B(x)} \circ \varphi^{\dashv}_{B(x)}\big(C(x)\big)\end{aligned}$$

e poiché $\varphi^{\dashv}_{B(x)} \dashv \varphi_{B(x)}$ si ha

$$C(x) \leq \varphi_{B(x)} \circ \varphi^{\dashv}_{B(x)}\big(C(x)\big)$$

quindi segue

$$C(x) \leq (p_B \circ l_B)(C)(x).$$

Se $x \notin B_\perp$, allora $x \notin C_\perp$ e quindi

$$(p_B \circ l_B)(C)(x) = \perp = C(x).$$

Siano, ora, $A \in L^X$ e $x \in X$. Se $x \in B_\perp$, $\varphi^{\dashv}_{B(x)} \dashv \varphi_{B(x)}$ e quindi

$$\begin{aligned}(l_B \circ p_B)(A)(x) &= l_B\big(p_B(A)\big)(x)\\ &= \varphi^{\dashv}_{B(x)} \circ \varphi_{B(x)}\big(A(x)\big) \leq A(x).\end{aligned}$$

Se, invece, $x \notin B_\perp$ risulta

$$l_B \circ p_B(A)(x) = \perp \leq A(x).$$

□

DEFINIZIONE 6.4.7. *Sia* (L, Φ) *un reticolo strutturato. Se* $Y \in L^X$, $Z \in L^T$ *sono due L-insiemi ed*

$$f : X \to T$$

è un'applicazione fra i loro rispettivi sostegni si definiscono ***operatore powerset diretto*** *di* f *relativo ad* Y *e* Z *rispetto ad* (L, Φ)

$$f^{\rightarrow}_{(L,\Phi)(Y,Z)} : \mathcal{S}_Y \to \mathcal{S}_Z$$

ed ***operatore powerset inverso*** *di* f *relativo ad* Y *e* Z *rispetto ad* (L, Φ)

$$f^{\leftarrow}_{(L,\Phi)(Y,Z)} : \mathcal{S}_Z \to \mathcal{S}_Y$$

le applicazioni definite, rispettivamente, da

$$f^{\rightarrow}_{(L,\Phi)(Y,Z)} = p_Z \circ f^{\rightarrow}_L \circ l_Y$$

ed

$$f^{\leftarrow}_{(L,\Phi)(Y,Z)} = p_Y \circ f^{\leftarrow}_L \circ l_Z.$$

Tali operatori sono, evidentemente, delle applicazioni isotone.

DEFINIZIONE 6.4.8. *Sia* (L, Φ) *un reticolo strutturato.*

Una ***categoria ground*** *su* (L, Φ) *è una categoria concreta* $\mathbf{C}$ *avente per oggetti L-insiemi e per morfismi* $f \in \mathbf{C}(Y, Z)$, *con* $Y, Z \in |\mathbf{C}|$, $Y \in L^X$ *e* $Z \in L^T$, *le applicazioni*

$$f : X \to T$$

tali che

$$f^{\leftarrow}_{(L,\Phi)(Y,Z)} \in \mathbf{CLat}(\mathcal{S}_Z, \mathcal{S}_Y)$$

ed

$$f^{\rightarrow}_{(L,\Phi)(Y,Z)} \dashv f^{\leftarrow}_{(L,\Phi)(Y,Z)}.$$

Dal Teorema del Funtore Aggiunto segue che l'operatore powerset diretto associato ad un morfismo in una categoria ground è un morfismo di semireticoli $\bigvee$-completi.

E' abbastanza immediato verificare che se $\mathbf{C}$ è una categoria ground ed $\mathcal{A} \subseteq \mathbf{C}$ è una sua sottocategoria allora anche $\mathcal{A}$ è una categoria ground.

DEFINIZIONE 6.4.9. *Sia* (L, Φ) *un reticolo strutturato. La* ***categoria ground standard*** *su* (L, Φ), *se esiste, è una categoria ground* $\mathbf{D}$ *su* (L, Φ) *che contiene come sottocategoria ogni categoria ground* $\mathbf{C}$ *su* (L, Φ).

PROPOSIZIONE 6.4.10. *Se* (L, Φ) *è un reticolo strutturato, valgono le seguenti proprietà:*

(1) *Esiste una categoria ground avente per oggetti tutti gli* L*-insiemi se e solo se* φ_a *è suriettiva,* $\forall a \in L$, $a \neq \perp$.

(2) *Se* φ_a *è suriettiva,* $\forall a \in L$, $a \neq \perp$, *allora la possibile categoria ground standard deve contenere come oggetti tutti gli* L*-insiemi.*

DIMOSTRAZIONE. (1) Se $Y \in L^X$ è un L-insieme, allora

$$(i_X)^{\rightarrow}_{(L,\Phi)(Y,Y)} = p_Y \circ l_Y = (i_X)^{\leftarrow}_{(L,\Phi)(Y,Y)}.$$

La categoria concreta avente per oggetti tutti gli L-insiemi e per morfismi le funzioni identiche è una categoria ground se e solo se $p_Y \circ l_Y$ è un morfismo di reticoli completi ed è autoaggiunto, o, equivalentemente, autoinverso, per ogni L-insieme $Y \in L^X$.

Se vale la condizione $p_Y \circ l_Y \circ p_Y \circ l_Y = i_{\mathcal{S}_Y}$, $\forall Y \in L^X$ o, equivalentemente, $\varphi_a \circ (\varphi_a^{\dashv} \circ \varphi_a \circ \varphi_a^{\dashv}) = i_{[\perp,a]}$, $\forall a \in L$, $a \neq \perp$, allora ciò porta a dire che φ_a è suriettiva, $\forall a \in L$, $a \neq \perp$.

Viceversa dalla suriettività di φ_a segue che $\varphi_a \circ \varphi_a^{\dashv} = i_{[\perp,a]}$ e quindi $p_Y \circ l_Y = i_{\mathcal{S}_Y}$ è un morfismo di reticoli completi ed è autoaggiunto.

Da ciò segue la tesi.

(2) E' ovvia conseguenza della parte (1) e della Definizione 6.4.8. □

Se (L, Φ) è un reticolo strutturato la relazione di **mapping to** su L è definita nel modo seguente.

DEFINIZIONE 6.4.11. *Siano* $a, b \in L$. *Si dice che* a ***maps to*** b, *in simboli*

$$a \nearrow b,$$

se $a = \perp$ *o* $a \neq \perp \neq b$ *e*

$$\varphi_a \circ \varphi_b^{\dashv}(b) = a.$$

PROPOSIZIONE 6.4.12. $\nearrow$ *è una relazione di pre-ordine.*

DIMOSTRAZIONE. - $\nearrow$ è riflessiva: infatti poiché, $\forall a \in L$, $a \neq \perp$, $\varphi_a^{\dashv} \dashv \varphi_a$ e $\varphi_a^{\rightarrow}(L) \subseteq [\perp, a]$, allora $a \leq \varphi_a \circ \varphi_a^{\dashv}(a) \leq a$.

- $\nearrow$ è transitiva: infatti se $a \nearrow b$ e $b \nearrow c$, con $a, b, c \in L$, allora se $a = \perp$ risulta ovviamente $a \nearrow c$. Se $a \neq \perp$, allora $b \neq \perp \neq c$ e dalle ipotesi e dall'aggiunzione $\varphi_b^{\dashv} \dashv \varphi_b$ segue che

$$\begin{aligned} a &= \varphi_a \circ \varphi_b^{\dashv}(b) \\ &= \varphi_a \circ \varphi_b^{\dashv}(\varphi_b \circ \varphi_c^{\dashv}(c)) \\ &= \varphi_a(\varphi_b^{\dashv} \circ \varphi_b(\varphi_c^{\dashv}(c))) \\ &\leq \varphi_a(\varphi_c^{\dashv}(c)) \leq a \end{aligned}$$

cioè $a \nearrow c$.

□

Il fatto che $\nearrow$ sia una relazione di pre-ordine permette di definire la seguente categoria:

Definizione 6.4.13. *Se (L, Φ) è un reticolo strutturato allora indichiamo con (L, Φ)-***Set** *la categoria avente per oggetti tutti gli L-insiemi e per morfismi fra due ogetti $Y \in L^X$ e $Z \in L^T$ le applicazioni*

$$f : X \to T$$

che soddisfano la seguente condizione

$$Y(x) \nearrow Z(f(x)), \ \forall x \in X.$$

Composizione ed identità sono le medesime di **Set**.

La relazione di mapping to svolge il ruolo di selezionare tutti i possibili morfismi da mettere in una categoria ground su un reticolo strutturato, come mostra la seguente proprietà:

Teorema 6.4.14. *Sia (L, Φ) un reticolo strutturato. Ogni categoria ground su (L, Φ) è una sottocategoria di (L, Φ)-***Set**.

Dimostrazione. Se $\mathbf{C}$ è una categoria ground su (L, Φ) allora, ovviamente, $|\mathbf{C}| \subseteq |(L, \Phi)\text{-}\mathbf{Set}|$.

Se $f \in \mathbf{C}(Y, Z)$, con $Y \in L^X$ e $Z \in L^T$ allora, poiché $\mathbf{C}$ è una categoria ground su (L, Φ), risulta che $f^{\leftarrow}_{(L,\Phi)(Y,Z)}$ è un morfismo di reticoli completi.

In particolare si ha

$$f^{\leftarrow}_{(L,\Phi)(Y,Z)}(\bot_T) = \bot_X \text{ e } f^{\leftarrow}_{(L,\Phi)(Y,Z)}(Z) = Y.$$

Ne segue che $\forall x \in Y_\bot$ si ha $\varphi_{Y(x)}(\bot) = \bot$; infatti:

$$\begin{aligned} \bot &= \bot_X(x) \\ &= p_Y\big(f^{\leftarrow}_L\big(l_Z(\bot_T)\big)\big)(x) \\ &= p_Y\big(f^{\leftarrow}_L(\bot_T)\big)(x) \\ &= \varphi_{Y(x)}\big(\bot_T(f(x))\big) \\ &= \varphi_{Y(x)}(\bot). \end{aligned}$$

Da ciò segue che $f(x) \in Z_\bot$, infatti se così non fosse, ovvero se $f(x) \notin Z_\bot$, si avrebbe

$$\begin{aligned} \bot \neq Y(x) &= p_Y\big(f^{\leftarrow}_L\big(l_Z(Z)\big)\big)(x) \\ &= \varphi_{Y(x)}\big(l_Z(Z)(f(x))\big) \\ &= \varphi_{Y(x)}(\bot) = \bot, \end{aligned}$$

che è assurdo.

Ora, $\forall x \in Y_\perp$ si ha

$$\begin{aligned} Y(x) &= f^{\leftarrow}_{(L,\Phi)(Y,Z)}(Z)(x) \\ &= p_Y \circ f^{\leftarrow}_L \circ l_Z(Z)(x) \\ &= \varphi_{Y(x)}\big(f^{\leftarrow}_L(l_Z(Z))(x)\big) \\ &= \varphi_{Y(x)}\big(l_Z(Z)(f(x))\big) \\ &= \varphi_{Y(x)} \circ \varphi^{\dashv}_{Z(f(x))}\big(Z(f(x))\big). \end{aligned}$$

Pertanto, $\forall x \in X$ si ha che $Y(x) \nearrow Z\big(f(x)\big)$. Da ciò segue che $f \in (L,\Phi)$-$\mathbf{Set}(Y,Z)$ e quindi, per l'arbitrarietà di f, $\mathbf{C}$ è una sottocategoria di (L,Φ)-$\mathbf{Set}$. $\square$

COROLLARIO 6.4.15. *Sia (L,Φ) un reticolo strutturato.*

Se (L,Φ)-$\mathbf{Set}$ è una categoria ground su (L,Φ), allora (L,Φ)-$\mathbf{Set}$ è una categoria ground standard su (L,Φ).

$\square$

ESEMPIO 6.4.16. Se L è un frame, $\forall a \in L$, $a \neq \perp$ sia

$$\varphi_a = a \wedge * : L \to [\perp, a]$$

l'applicazione definita $\forall x \in L$ da

$$\varphi_a(x) = a \wedge x.$$

La coppia $(L, \mathcal{A} = \{a \wedge *\}_{a \neq \perp})$ è un reticolo strutturato.

Il morfismo aggiunto a sinistra di φ_a

$$\varphi^{\dashv}_a : [\perp, a] \to L,$$

è dato $\forall x \in [\perp, a]$ da

$$\varphi^{\dashv}_a(x) = \bigwedge \big\{y \in L | x \leq \varphi_a(y)\big\} = x$$

ovvero esso è la funzione inclusione.

Se $B \in L^X$ è un L-insieme allora si verifica facilmente che l'operatore compressione su B e l'operatore sollevamento da B sono definiti rispettivamente da

$$p_B(A) = B \wedge A, \ \forall A \in L^X$$

e

$$l_B(C) = C, \quad \forall C \in \mathcal{S}_B.$$

La relazione di mapping to in tale reticolo coincide con la relazione d'ordine $\leq$ del reticolo L. Infatti $\perp \nearrow b$ e $\perp \leq b$, $\forall b \in L$ e se $a \neq \perp$,

$$\begin{aligned} a \nearrow b &\Leftrightarrow \ \varphi_a(\varphi^{\dashv}_b(b)) = a \\ &\Leftrightarrow \ b \wedge a = a \\ &\Leftrightarrow \ a \leq b. \end{aligned}$$

La categoria $(L,\mathcal{A})$-$\mathbf{Set}$ risulta una categoria ground standard su $(L,\mathcal{A})$; la verifica di tale proprietà è analoga alla dimostrazione del Teorema 6.4.14.

I morfismi da $Y \in L^X$ in $Z \in L^T$ in tale categoria sono evidentemente le funzioni

$$f : X \to T$$

che verificano la condizione

$$Y(x) \leq Z\big(f(x)\big), \ \forall x \in X.$$

Per una tale funzione si ha che

$$f_L^{\rightarrow}(A) \in \mathcal{S}_Z, \ \forall A \in \mathcal{S}_Y.$$

Infatti, $\forall t \in T$,

$$\begin{aligned} f_L^{\rightarrow}(A)(t) &= \bigvee \big\{A(x) | x \in X : f(x) = t\big\} \\ &\leq \bigvee \big\{Y(x) | x \in X : f(x) = t\big\} \\ &\leq Z(t). \end{aligned}$$

Ne segue che l'operatore powerset diretto di un tale morfismo è definito $\forall A \in \mathcal{S}_Y$ da

$$\begin{aligned} f_{(L,\mathcal{A})(Y,Z)}^{\rightarrow}(A) &= (p_Z \circ f_L^{\rightarrow} \circ l_Y)(A) \\ &= p_Z\big(f_L^{\rightarrow}(A)\big) \\ &= f_L^{\rightarrow}(A) \wedge Z \\ &= f_L^{\rightarrow}(A). \end{aligned}$$

L'operatore powerset inverso, invece, è definito $\forall B \in \mathcal{S}_Z$ da

$$\begin{aligned} f_{(L,\mathcal{A})(Y,Z)}^{\leftarrow}(B) &= (p_Y \circ f_L^{\leftarrow} \circ l_Z)(B) \\ &= p_Y\big(f_L^{\leftarrow}(B)\big) \\ &= f_L^{\leftarrow}(B) \wedge Y \\ &= (B \circ f) \wedge Y. \end{aligned}$$

ESEMPIO 6.4.17. Sia $I = [0, 1]$ l'intervallo unitario. Per ogni $0 < a \leq 1$, sia

$$\varphi_a = a \cdot * : I \to [0, a]$$

l'applicazione definita $\forall x \in I$ da

$$\varphi_a(x) = a \cdot x.$$

Si verifica facilmente che φ_a è un isomorfismo di reticoli completi e quindi la sua aggiunta a sinistra è l'isomorfismo inverso

$$\begin{gathered} \varphi_a^{-1} : [0, a] \to I \\ x \mapsto \varphi_a^{-1}(x) = \frac{x}{a}. \end{gathered}$$

La coppia

$$(I, \mathcal{G} = \big\{a \cdot *\big\}_{a \neq 0})$$

è un reticolo strutturato.

In questo caso, la relazione di mapping to non è una relazione d'ordine, infatti, $\forall a, b \in I$, $a \nearrow b$, eccetto nel caso in cui $b = 0$ e $a \neq 0$. Infatti $0 \leq b$ e $0 \nearrow b$, $\forall b \in I$ e, se $a \neq 0 \neq b$ si ha $\varphi_a \circ \varphi_b^{-1}(b) = \varphi_a(1) = a$.

Gli operatori compressione e sollevamento sono definiti rispettivamente da

$$p_B(A)(x) = A(x) \cdot B(x) = (A \cdot B)(x) \ \forall A, B \in I^X, \quad \forall x \in X$$

e

$$l_B(C)(x) = \frac{C(x)}{B(x)} \begin{cases} (C \div B)(x) & \text{se } x \in B_\perp \\ 0 & \text{se } x \notin B_\perp \end{cases} \qquad \forall B \in I^X, \quad \forall C \in \mathcal{S}_B.$$

Anche in questo caso, la categoria $(I, \mathcal{G})$-**Set** è una categoria ground standard su $(I, \mathcal{G})$.

I morfismi da $Y \in I^X$ in $Z \in I^T$ in tale categoria sono tutte le funzioni

$$f : X \to T$$

che verificano la condizione

$$f^{\to}(Y_0) \subseteq Z_0.$$

Gli operatori powerset relativi a $(I, \mathcal{G})$ di una tale funzione sono definiti $\forall A \in \mathcal{S}_Y$, $\forall B \in \mathcal{S}_Z$, $\forall t \in T$, se $t \in Z_0$ da

$$\begin{aligned} f^{\to}_{(I,\mathcal{G})(Y,Z)}(A)(t) &= (p_Z \circ f_I^{\to} \circ l_Y(A))(t) \\ &= \varphi_{Z(t)}\left(\bigvee \left\{l_Y(A)(x) | x \in X : f(x) = t\right\}\right) \\ &= \bigvee \left\{l_Y(A)(x) \cdot Z(t) | x \in X : f(x) = t\right\} \\ &= \bigvee \left\{l_Y(A)(x) \cdot Z(t) | x \in Y_0 : f(x) = t\right\} \\ &= \bigvee \left\{\frac{Z(t)}{Y(x)} A(x) | x \in Y_0 : f(x) = t\right\} \end{aligned}$$

se $t \notin Z_0$ da

$$f^{\to}_{(I,\mathcal{G})(Y,Z)}(A)(t) = 0.$$

$\forall x \in X$, se $x \in Y_0$ si ha

$$\begin{aligned} f^{\leftarrow}_{(I,\mathcal{G})(Y,Z)}(B)(x) &= (p_Y \circ f_I^{\leftarrow} \circ l_Z(B))(x) \\ &= \varphi_{Y(x)}\big(l_Z(B)(f(x))\big) \\ &= Y(x) \cdot \frac{B(f(x))}{Z(f(x))} = \frac{Y(x)}{Z(f(x))} \cdot B(f(x)) \end{aligned}$$

se $x \notin Y_0$ risulta

$$f^{\leftarrow}_{(I,\mathcal{G})(Y,Z)}(B)(x) = 0.$$