

## Teoremi di Rappresentazione di Reticoli

### 5.1. I Teorema di Rappresentazione di Stone

PROPOSIZIONE 5.1.1. *Sia  $(L, \leq)$  un reticolo e siano:*

*$(Idl(L), \leq)$  l'insieme degli ideali in  $L$  ordinato rispetto all'inclusione*

$$I \leq J \Leftrightarrow I \subseteq J.$$

*$(Flt(L), \leq)$  l'insieme dei filtri in  $L$  con la relazione*

$$F \leq G \Leftrightarrow G \subseteq F.$$

*Allora  $(Idl(L), \leq)$  e  $(Flt(L), \leq)$  sono reticoli completi.*

DIMOSTRAZIONE. Se  $\mathcal{S} \subseteq Idl(L)$ , allora  $\bigcap \mathcal{S} \subseteq L$  è un ideale. Infatti, ovviamente, valgono le proprietà (i) e (ii) degli ideali. Tale ideale si indica anche con  $\bigwedge \mathcal{S} = \bigcap \mathcal{S}$ . Quindi  $Idl(L)$  è un  $\bigwedge$ -sottosemireticolo completo di  $\mathcal{P}(L)$ ; di conseguenza  $(Idl(L), \leq)$  è un reticolo completo.

L'asserzione per i filtri  $(Flt(L), \leq)$  si prova dualmente. Si noti, però che se  $\mathcal{F} \subseteq Flt(L)$  si ha  $\bigvee \mathcal{F} = \bigcap \mathcal{F}$ .  $\square$

Osserviamo che per  $\mathcal{S} \subseteq Idl(L)$  si ha  $\bigvee \mathcal{S} = \langle \bigcup \mathcal{S} \rangle$  e se  $\mathcal{F} \subseteq Flt(L)$  si ha  $\bigwedge \mathcal{F} = \langle \bigcup \mathcal{F} \rangle$ .

Inoltre per ogni  $I \in Idl(L)$  si ha  $I = \bigvee \{ \downarrow a \mid a \in I \}$ .

PROPOSIZIONE 5.1.2. *Se  $(L, \leq)$  è un reticolo distributivo allora il reticolo  $(Idl(L), \leq)$  è un frame,  $(Flt(L), \leq)$  è un coframe.*

DIMOSTRAZIONE. Per la proposizione 5.1.1 basta verificare la  $(ILD_\infty)$  per  $(Idl(L), \leq)$  e la  $(IILD_\infty)$  per  $(Flt(L), \leq)$ .

Siano  $I \in Idl(L)$  ed  $\mathcal{S} \subseteq Idl(L)$ . E' evidente che

$$\begin{aligned} \bigvee \{ I \wedge J \mid J \in \mathcal{S} \} &= \langle \bigcup \{ I \cap J \mid J \in \mathcal{S} \} \rangle \\ &= \langle I \cap (\bigcup \mathcal{S}) \rangle \\ &\leq I \wedge (\bigvee \mathcal{S}). \end{aligned}$$





























$x_0 \in X$  tale che  $x_0 \leq a$  e  $x_0 \not\leq b$ . Pertanto  $x_0 \in f(a)$  e  $x_0 \notin f(b)$  e quindi  $f(a) \neq f(b)$ , ovvero  $f$  è iniettiva.

Sia  $S \subseteq L$ . Se  $x \in f(\bigvee S)$ , allora  $x \leq \bigvee S$ ; essendo  $x$  completamente coprimo esiste  $s \in S$  tale che  $x \leq s$  e quindi  $x \in \bigcup f^{-1}(S)$ . Viceversa, se  $x \in \bigcup f^{-1}(S) = \bigcup \{f(a) | a \in S\}$  allora esiste  $a \in S$  tale che  $x \in f(a) = \{y \in X | y \leq a\}$  quindi  $x \leq a \leq \bigvee S$ , ovvero  $x \in f(\bigvee S)$ . Pertanto per doppia inclusione si ha che  $f(\bigvee S) = \bigcup f^{-1}(S)$ , ovvero  $f$  conserva  $\bigvee$ .

Sia, ora,  $x \in f(\bigwedge S) = \{x \in X | x \leq \bigwedge S\}$ , allora  $x \leq a, \forall a \in S$ , da cui segue che  $x \in f(a), \forall a \in S$ , ovvero  $x \in \bigcap f^{-1}(S)$ . Viceversa, se  $x \in \bigcap f^{-1}(S)$  allora  $x \leq s, \forall s \in S$ , quindi  $x \leq \bigwedge S$ , ovvero  $x \in f(\bigwedge S)$ . Pertanto per doppia inclusione segue che  $f(\bigwedge S) = \bigcap f^{-1}(S)$ , ovvero  $f$  conserva  $\bigwedge$ . □

**ESEMPIO 5.3.6.** Nel reticolo completamente distributivo,  $([0, 1], \leq)$  non esiste alcun elemento completamente coprimo. Infatti ogni  $x \in (0, 1]$  è sup dell'insieme  $\{y \in [0, 1] | y \leq x, y \neq x\}$  senza essere minore o uguale di alcun elemento di tale insieme. Dal Teorema 5.3.5 segue che  $([0, 1], \leq)$  non è isomorfo ad alcun sottoreticolo completo di  $2^X$ , con  $X \in |\mathbf{Set}|$ .

**LEMMA 5.3.7.** *Se  $L$  è un reticolo completo, posto*

$$K(x) = \bigcap \{M | M \in R(L) : x \leq \bigvee M\}, \quad \forall x \in L,$$

*allora valgono le seguenti proprietà:*

- (1)  $\forall x \in L: \bigvee K(x) \leq x$ .
- (2)  $\forall x, y \in L$  con  $x \leq y : K(x) \subseteq K(y)$ .
- (3)  $\forall A \subseteq L : \bigcup \{K(a) | a \in A\} = K(\bigvee A)$ .

**DIMOSTRAZIONE.** (1) Sia  $x \in L$ . L'insieme  $\downarrow x \in R(L)$ , allora  $K(x) \subseteq \downarrow x$  da cui segue che  $\bigvee K(x) \leq \bigvee(\downarrow x) = x$ .

(2) Se  $x, y \in L$  e  $x \leq y$ , allora

$$\{M | M \in R(L) : y \leq \bigvee M\} \subseteq \{M | M \in R(L) : x \leq \bigvee M\}$$

da cui segue che  $K(x) \subseteq K(y)$ .

(3) Sia  $A \subseteq L$ . Se  $t \notin \bigcup \{K(a) | a \in A\}$ , allora  $\forall a \in A : t \notin K(a)$ .

Scegliamo  $\forall a \in A, M_a \in R(L)$  tale che  $t \notin M_a$  e  $a \leq \bigvee M_a$ . Allora posto  $M = \bigcup \{M_a | a \in A\}$  si ha  $M \in R(L), \bigvee A \leq \bigvee M$  e  $t \notin M$ . Quindi  $t \notin K(\bigvee A)$ .

Viceversa, se  $t \in \bigcup \{K(a) | a \in A\}$ , allora  $t \in K(a)$ , per qualche  $a \in A$ , e quindi, poiché  $a \leq \bigvee A$ ,  $t \in K(\bigvee A)$ . Pertanto  $\bigcup \{K(a) | a \in A\} = K(\bigvee A)$ . □

**OSSERVAZIONE 5.3.8.** Dal Lemma 5.3.7 segue che  $\forall y \in K(x)$ , con  $x \in L$ , si ha  $y \leq x$ , infatti

$$y \leq \bigvee K(x) \leq x.$$

PROPOSIZIONE 5.3.9. *Se  $L$  è un reticolo completo, allora*

$$L \text{ è completamente distributivo} \Leftrightarrow \bigvee K(x) = x, \forall x \in L.$$

DIMOSTRAZIONE. “ $\Rightarrow$ ” Se  $x \in L$ , allora essendo  $L$  completamente distributivo ed applicando il Lemma 5.3.3 si ha, indicando con  $\mathcal{M} = \{M \subseteq L \mid M \in R(L), x \leq \bigvee M\}$

$$\begin{aligned} x &\leq \bigwedge \left\{ \bigvee M \mid M \in \mathcal{M} \right\} \\ &= \bigvee \left\{ \bigwedge s^{-1}(\mathcal{M}) \mid s : \mathcal{M} \rightarrow L : s(M) \in M, \forall M \in \mathcal{M} \right\} \\ &\leq \bigvee \bigcap \{M \mid M \in R(L) : x \leq \bigvee M\} = \bigvee K(x). \end{aligned}$$

Inoltre, per il Lemma 5.3.7 (1) si ha che  $\bigvee K(x) \leq x$ , da cui per doppia disuguaglianza segue la tesi.

“ $\Leftarrow$ ” Poiché per ipotesi  $K(a) \in R(L)$  e  $\bigvee K(a) = a, \forall a \in L$ , allora la funzione

$$f : R(L) \rightarrow L, M \mapsto \bigvee M$$

già definita nella dimostrazione della Proposizione 5.3.4 è suriettiva, e, come già visto, è un morfismo di reticoli completi. Pertanto, poiché per il Lemma 5.3.2,  $R(L)$  è un sottoreticolo completo di  $\mathcal{2}^L$ , per la Proposizione 5.3.4 si ha che  $L$  è un reticolo completamente distributivo.  $\square$

Se  $L$  è un reticolo completo, consideriamo la relazione binaria  $\rho$  definita da

$$x \rho y \Leftrightarrow x \in K(y), \quad \forall x, y \in L.$$

Allora  $\rho \in \mathbf{Rel}(L, L)$ .

Dall'Osservazione 5.3.8 segue, evidentemente, che  $x \rho y \Rightarrow x \leq y, \forall x, y \in L$ .

PROPOSIZIONE 5.3.10. *Se  $L$  è un reticolo completo completamente distributivo, allora  $\rho \in \mathbf{Rel}(L, L)$  è idempotente e quindi è transitiva.*

DIMOSTRAZIONE. Per la Proposizione 5.3.9 e per il Lemma 5.3.7 (3),  $\forall x \in L$  si ha

$$K(x) = K\left(\bigvee K(x)\right) = \bigcup \{K(a) \mid a \in K(x)\}.$$

Poiché risulta

$$\begin{aligned} x \rho y &\Leftrightarrow x \in K(y) = \bigcup \{K(a) \mid a \in K(y)\} \\ &\Leftrightarrow \exists \bar{a} \in L : x \in K(\bar{a}) \text{ e } \bar{a} \in K(y) \\ &\Leftrightarrow \exists \bar{a} \in L : x \rho \bar{a} \text{ e } \bar{a} \rho y \\ &\Leftrightarrow x(\rho \circ \rho)y \end{aligned}$$

allora risulta  $\rho = \rho \circ \rho$ , ovvero  $\rho$  è idempotente.

Inoltre, da  $x \rho y$  e  $y \rho z$  segue  $x(\rho \circ \rho)z$  da cui  $x \rho z$ .  $\square$

Una catena che sia un reticolo completo si dirà *catena completa*.

TEOREMA 5.3.11 (II Teorema di Rappresentazione di Raney). *Se  $L$  è un reticolo completo allora sono equivalenti le seguenti affermazioni*

- (i)  $L$  è completamente distributivo.
- (ii)  $L$  è isomorfo ad un sottoreticolo completo del prodotto di una famiglia di catene complete.

DIMOSTRAZIONE. “(i)  $\Rightarrow$  (ii)” Sia  $L$  un reticolo completo, completamente distributivo. Indichiamo con  $\Gamma$  la famiglia delle catene massimali rispetto a  $\rho$ . Notiamo che ogni catena si estende ad almeno una catena massimale, per il Lemma di Zorn. Se  $C \in \Gamma$  e  $a \in L$ , poniamo

$$f(C, a) = \{t \in C \mid \exists x \in C : t\rho x \text{ e } x\rho a\}$$

e

$$F_C = \{f(C, a) \mid a \in L\}.$$

Proviamo che  $\forall a \in L, \bigcup \{f(C, a) \mid C \in \Gamma\} = K(a)$ : infatti, se  $t \in K(a)$ , cioè  $t\rho a$ , allora, poiché per 5.3.10  $\rho$  è idempotente, esiste  $x \in L$  tale che  $t\rho x$  e  $x\rho a$  quindi  $\{t, x, a\}$  è una catena. Se  $C \supseteq \{t, x, a\}$  è una catena massimale, allora, ovviamente,  $t \in f(C, a) \subseteq \bigcup \{f(C, a) \mid C \in \Gamma\}$ .

Viceversa, se  $t \in f(C, a)$  per qualche  $C \in \Gamma$ , allora  $\exists x \in C$ , tale che  $t \in K(x)$  e  $x \in K(a)$  quindi  $x \leq a$  e  $t \in K(x) \subseteq K(a)$ .

Se, ora,  $a, b \in L$  e  $f(C, a) \not\subseteq f(C, b)$  allora esiste  $t \in f(C, a)$  tale che  $t \notin f(C, b)$ . Pertanto  $\exists x \in C$  tale che  $t\rho x$  e  $x\rho a$  ma  $\forall y \in C : \neg(t\rho y)$  o  $\neg(y\rho b)$ . Considerato un qualsiasi  $s \in f(C, b)$  esiste allora  $y \in C$  tale che  $s\rho y$  e  $y\rho b$  deve essere quindi  $\neg(t\rho y)$ . Poiché  $C$  è una catena si ha allora  $s\rho y, y\rho t, t\rho x, x\rho a$  da cui, per la transitività di  $\rho$  segue  $s\rho y$  e  $y\rho a$ , cioè  $s \in f(C, a)$ .

Quindi  $f(C, b) \subseteq f(C, a)$ . Così per ogni  $C \in \Gamma, F_C$  è una catena rispetto alla relazione di inclusione in  $2^C$ .

Inoltre, se  $C \in \Gamma$  ed  $A \subseteq L$ , allora  $\bigcup \{f(C, a) \mid a \in A\} = f(C, \bigvee A)$ : infatti,

$$t \in f(C, \bigvee A) \Leftrightarrow t \in C \text{ ed } \exists x \in C : t\rho x \text{ e } x\rho \bigvee A$$

e dal Lemma 5.3.7 (3) segue che

$$x\rho \bigvee A \Leftrightarrow \exists a \in A : x\rho a.$$

Quindi  $t \in f(C, \bigvee A) \Leftrightarrow \exists a \in A : t \in f(C, a)$ . Pertanto  $F_C$  è chiuso rispetto all'unione per ogni  $C \in \Gamma$ . Segue che,  $\forall C \in \Gamma, F_C$  è una catena completa in cui se  $F \subseteq F_C, \bigvee F = \bigcup F$  ma l'inf non è l'intersezione, infatti,  $\bigwedge F = \bigcup \{f(C, b) \mid b \in L, f(C, b) \subseteq \bigcap F\}$  è il più grande elemento di  $F_C$  contenuto in tutti gli elementi di  $F$ .

Inoltre osserviamo che se  $C \in \Gamma$  ed  $A \subseteq L$ , allora  $\bigwedge \{f(C, a) \mid a \in A\} = f(C, \bigwedge A)$ . Infatti, se  $t \in \bigwedge \{f(C, a) \mid a \in A\}$ , allora esiste  $b \in L$  tale che  $t \in f(C, b)$  ed  $f(C, b) \subseteq \bigcap \{f(C, a) \mid a \in A\}$ . Quindi  $t \in C$  ed esiste

$s \in C$  tale che  $t\rho s$  ed  $s\rho b$ . Poiché  $\rho$  è idempotente e poiché  $C$  è una catena massimale rispetto a  $\rho$ , esistono  $u, y \in C$  tale che  $t\rho u$ ,  $u\rho y$ ,  $y\rho s$  ed  $s\rho b$ . Pertanto  $y \in f(C, b)$  e  $\forall a \in A$  si ha che  $y \in f(C, a)$ , quindi  $y \leq a$ ,  $\forall a \in A$ , da cui segue che  $y \leq \bigwedge A$ . Dal Lemma 5.3.7 (2) si ha che  $t\rho u \rho \bigwedge A$  ovvero che  $t \in f(C, \bigwedge A)$  e quindi  $\bigwedge \{f(C, a) | a \in A\} \subseteq f(C, \bigwedge A)$ .

Viceversa, dal Lemma 5.3.7 (2) segue che  $\forall a \leq a'$  si ha  $f(C, a) \subseteq f(C, a')$  quindi  $f(C, \bigwedge A) \subseteq \bigcap \{f(C, a) | a \in A\}$  da cui si ha  $f(C, \bigwedge A) \subseteq \bigwedge \{f(C, a) | a \in A\}$ .

Sia  $D$  il prodotto della famiglia  $\{F_C | C \in \Gamma\}$ , cioè

$$D = \{\theta : \Gamma \rightarrow \bigcup \{F_C | C \in \Gamma\} \mid \forall C \in \Gamma : \theta(C) \in F_C\}.$$

$D$  è un reticolo completo in cui se  $D_1 \subseteq D$ , allora  $\forall C \in \Gamma$

$$(\bigvee D_1)(C) = \bigvee \{\theta(C) | \theta \in D_1\}, \quad (\bigwedge D_1)(C) = \bigwedge \{\theta(C) | \theta \in D_1\}.$$

Inoltre, poiché ognuna delle catene complete  $F_C$  è completamente distributiva anche il prodotto lo è, per la Proposizione 3.4.9.

Indichiamo con  $\theta_a$ ,  $\forall a \in L$ , tutte le funzioni di  $D$  tali che  $\theta_a(C) = f(C, a)$ . Poniamo  $L^* = \{\theta_a | a \in L\}$  e sia

$$\phi : L \rightarrow L^*, \quad a \mapsto \theta_a.$$

Si verifica facilmente che  $L^*$  è un sottoreticolo completo di  $D$ . Inoltre,  $\phi$  è chiaramente suriettiva ed è anche iniettiva: infatti se  $\theta_a = \theta_b$ , allora  $\forall C \in \Gamma$  si ha  $f(C, a) = f(C, b)$ , quindi

$$\begin{aligned} a &= \bigvee K(a) \\ &= \bigvee \left( \bigcup \{f(C, a) | C \in \Gamma\} \right) \\ &= \bigvee \left( \bigcup \{f(C, b) | C \in \Gamma\} \right) \\ &= \bigvee K(b) = b. \end{aligned}$$

Se  $A \subseteq L$ , allora  $\bigvee \phi^{-1}(A) = \bigvee \{\theta_a | a \in A\} = \theta_{\bigvee A} = \phi(\bigvee A)$ : infatti, se  $C \in \Gamma$  allora

$$\begin{aligned} \left( \bigvee \{\theta_a | a \in A\} \right) (C) &= \bigvee \{\theta_a(C) | a \in A\} \\ &= \bigvee \{f(C, a) | a \in A\} \\ &= \bigcup \{f(C, a) | a \in A\} \\ &= f(C, \bigvee A) \\ &= \theta_{\bigvee A}(C). \end{aligned}$$

Ciò basta per dire che  $\phi$  è un isomorfismo di reticoli completi da  $L$  in  $L^*$ , per il Corollario 3.3.9.

“(ii)  $\Rightarrow$  (i)” Dalla Proposizione 3.4.7 segue che ogni catena completa è un

reticolo completamente distributivo. Il prodotto di una famiglia di reticoli completamente distributivi è completamente distributivo. Inoltre, per la Proposizione 3.4.8 si ha che  $L$ , in quanto sottoreticolo completo di un reticolo completamente distributivo è anch'esso completamente distributivo.  $\square$

Il seguente risultato riconduce il precedente teorema ad una situazione particolare, quella cioè in cui tutte le catene complete di cui si fa il prodotto sono isomorfe all'intervallo unitario  $[0, 1]$ .

**PROPOSIZIONE 5.3.12.** *Se  $(L, \leq)$  è un reticolo completo allora sono equivalenti le seguenti affermazioni*

- (i)  $L$  è un reticolo completamente distributivo.
- (ii) Esiste  $X \in |\mathbf{Set}|$ , tale che  $L$  è isomorfo ad un sottoreticolo completo di  $I^X$ , dove  $I = [0, 1]$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Si veda [5] Esercizio 2.30.  $\square$

Da tale proposizione si evince quindi come l'insieme dei sottoreticoli completi di  $I^X$ ,  $\forall X \in |\mathbf{Set}|$ , rappresenta l'intera classe dei reticoli completi completamente distributivi.

#### 5.4. Elementi Generatori nei Locali Spaziali

L'equivalenza tra le categorie **Sob** e **SpatLoc** descritta nel paragrafo 4.5 comporta, oltre alle conseguenze già considerate in precedenza, il seguente risultato.

**PROPOSIZIONE 5.4.1.** *Ogni frame spaziale è isomorfo alla topologia di qualche spazio (sobrio). Dualmente ogni coframe spaziale è isomorfo al coframe dei chiusi di qualche spazio (sobrio).*

**DIMOSTRAZIONE.** Le equivalenze  $\tau$  e  $pt$  portano chiaramente un locale spaziale  $S$  in  $pt(S)$  che è sobrio ed al quale si associa

$$\tau \circ pt(S) \cong i_{\mathbf{SpatLoc}}(S) = S.$$

Dualmente, per ogni coframe  $L$  gli isomorfismi

$$L \cong (L^{op})^{op} \cong (\tau \circ pt(L^{op}))^{op} \cong \neg(\tau \circ pt(L^{op}))$$

dove  $\neg : \mathcal{P}(pt(L^{op})) \rightarrow \mathcal{P}(pt(L^{op}))$  è la usuale complementazione.  $\square$

**PROPOSIZIONE 5.4.2.** *Se  $(X, \tau(X))$  è uno spazio topologico, ogni chiuso è sup di chiusi coprimi.*

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo già osservato che la chiusura di un punto è un elemento coprimo del coframe dei chiusi. Se  $C$  è un qualsiasi chiuso si ha

$$C = \bigcup_{x \in C} \{x\}$$

da cui

$$C \subseteq \bigcup_{x \in C} cl(x).$$

Ma da  $x \in C$  segue  $cl(x) \subseteq cl(C) = C$ , quindi

$$C = \bigcup_{x \in C} cl(x)$$

e poiché  $C$  è chiuso si ha

$$C = cl\left(\bigcup_{x \in C} cl(x)\right) = \bigvee_{x \in C} cl(x).$$

□

Da questi risultati segue che i coframe spaziali sono generati tramite  $\bigvee$  dai loro elementi coprimi. Un risultato duale vale per i frame spaziali. Più precisamente si ha quanto segue.

**COROLLARIO 5.4.3.** *Siano  $S$  un frame spaziale e  $T$  un coframe spaziale. Allora  $\forall x \in S$  e  $\forall y \in T$  si ha*

$$x = \bigwedge \{a \in S \mid a \text{ primo, } x \leq a\}$$

$$y = \bigvee \{b \in T \mid b \text{ coprimo, } b \leq y\}.$$

DIMOSTRAZIONE. Segue facilmente dalle proposizioni 5.4.1 e 5.4.2. □

**OSSERVAZIONE 5.4.4.** Dal precedente corollario segue che condizione necessaria perchè un frame spaziale abbia una involuzione che inverte l'ordine è che ogni suo elemento si possa ottenere come sup di elementi coprimi.

**PROPOSIZIONE 5.4.5.** *Ogni catena completa  $(C, \leq)$  è un frame spaziale.*

DIMOSTRAZIONE. Dalla Proposizione 3.4.7 segue che  $(C, \leq)$  è un frame. Verifichiamo che  $(C, \leq)$  è spaziale: siano  $a, a' \in C$  tali che  $a \not\leq a'$ . Sia

$$p : C \rightarrow \{\perp, \top\}$$

una funzione definita  $\forall t \in C$  da

$$p(t) = \perp \text{ se } t \leq a' \text{ e } p(t) = \top \text{ se } a' \leq t, a' \neq t.$$

$p$  è un morfismo di frame: infatti, se  $x, y \in C$

$$\begin{aligned} p(x \wedge y) = \perp &\Leftrightarrow x \wedge y \leq a' \\ &\Leftrightarrow x \leq a' \text{ o } y \leq a' \\ &\Leftrightarrow p(x) = \perp \text{ o } p(y) = \perp \\ &\Leftrightarrow p(x) \wedge p(y) = \perp. \end{aligned}$$

Se  $S \subseteq C$

$$\begin{aligned} p\left(\bigvee S\right) = \perp &\Leftrightarrow \bigvee S \leq a' \\ &\Leftrightarrow s \leq a', \quad \forall s \in S \\ &\Leftrightarrow p(s) = \perp, \quad \forall s \in S \\ &\Leftrightarrow \bigvee \{p(s) \mid s \in S\} = \perp. \end{aligned}$$

Inoltre, ovviamente,  $p(a) = \top$  e  $p(a') = \perp$ . Da ciò segue la tesi.  $\square$

**PROPOSIZIONE 5.4.6.** *Per ogni insieme non vuoto  $X$  e per ogni frame spaziale  $L$  si ha che  $L^X$  è un frame spaziale.*

**DIMOSTRAZIONE.** Come caso particolare della Proposizione 3.4.9 si verifica che  $L^X$  è un frame. Per provare che è spaziale consideriamo  $f, g \in L^X$  con  $f \not\leq g$ . Sia  $x' \in X$  tale che  $f(x') \not\leq g(x')$  e consideriamo un morfismo di frame

$$p: L \rightarrow \mathcal{2}$$

tale che  $p(f(x')) = \top$  e  $p(g(x')) = \perp$  e poniamo

$$\bar{p}: L^X \rightarrow \mathcal{2}, \quad h \mapsto \bar{p}(h) = p(h(x')).$$

Allora si ha

$$\begin{aligned} \bar{p}(h \wedge h') &= p(h(x') \wedge h'(x')) \\ &= p(h(x')) \wedge p(h'(x')) \\ &= \bar{p}(h) \wedge \bar{p}(h') \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \bar{p}\left(\bigvee_{j \in J} h_j\right) &= p\left(\bigvee \{h_j(x') \mid j \in J\}\right) \\ &= \bigvee \{p(h_j(x')) \mid j \in J\} \\ &= \bigvee \{\bar{p}(h_j) \mid j \in J\}. \end{aligned}$$

Quindi  $\bar{p}$  è un morfismo di frame e chiaramente  $\bar{p}(f) = \top$ ,  $\bar{p}(g) = \perp$ .  $\square$

**PROPOSIZIONE 5.4.7.** *Se  $(L, \leq)$  è un sottoreticolo completo di un frame spaziale  $(X, \leq)$ , allora  $(L, \leq)$  è un frame spaziale.*

**DIMOSTRAZIONE.** Poiché  $(L, \leq)$  è un sottoreticolo completo di  $(X, \leq)$ , allora  $\inf_X A \in L$  e  $\sup_X A \in L$ ,  $\forall A \subseteq L$ . Pertanto,  $\forall A \subseteq L$  esiste  $\inf_L A = \inf_X A$  ed esiste  $\sup_L A = \sup_X A$ , ovvero  $(L, \leq)$  è un reticolo completo ed inoltre, poiché  $(X, \leq)$  è un frame, allora anche  $(L, \leq)$  è un frame.

Siano, ora,  $a, a' \in L$ , tali che  $a \not\leq a'$ . Poiché  $(X, \leq)$  è spaziale, esiste

$$p : X \rightarrow \{\perp, \top\}$$

morfismo di frame tale che

$$p(a) = \top \text{ e } p(a') = \perp$$

allora esiste

$$\bar{p} = p|_L : L \rightarrow \{\perp, \top\}$$

morfismo di frame tale che

$$\bar{p}(a) = p(a) = \top \text{ e } \bar{p}(a') = p(a') = \perp,$$

ovvero  $(L, \leq)$  è un frame spaziale.  $\square$

Dalla Proposizione 5.3.12, considerando anche le proposizioni 5.4.5, 5.4.6 e 5.4.7 segue che ogni reticolo completo completamente distributivo è un frame spaziale e, poiché in un reticolo completamente distributivo valgono entrambe le leggi di distributività infinita, è anche un coframe spaziale. Pertanto segue la seguente proprietà.

**PROPOSIZIONE 5.4.8.** *Se  $(L, \leq)$  è un reticolo completo completamente distributivo, allora ogni  $a \in X$  si può esprimere come sup di elementi coprimi e si può anche esprimere come inf di elementi primi.*

$\square$

## 5.5. Famiglie Fini e Grossolane nei Reticoli Completi

**DEFINIZIONE 5.5.1.** *Se  $(L, \leq)$  è un reticolo completo,  $a \in L$  e  $B \subseteq L$ , allora  $B$  si dice **famiglia fine** di  $a$  in  $L$  se  $B \neq \emptyset$  e risulta*

- (1)  $\bigvee B = a$ .
- (2)  $A \subseteq L, a \leq \bigvee A \Rightarrow \forall x \in B \exists y \in A : x \leq y$ .

**PROPOSIZIONE 5.5.2.** *Se  $L$  è un reticolo completo ed  $a \in L$ , allora l'unione di famiglie fini di  $a$  è ancora una famiglia fine di  $a$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Banale.  $\square$

L'unione di tutte le famiglie fini di  $a$ , se esiste, si indica con  $\beta(a)$  ed è ovviamente la più grande famiglia fine di  $a$  in  $L$ .

ESEMPIO 5.5.3. (a) In  $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ , con  $X \in |\mathbf{Set}|$ ,  $\forall E \in \mathcal{P}(X)$ ,  $E \neq \emptyset$ ,  $\beta(E) = \{\{e\} | e \in E\} \cup \{\emptyset\}$  e  $\beta(\emptyset) = \{\emptyset\}$ .

(b) In  $(I, \leq)$ ,  $\forall a \in (0, 1]$ ,  $\beta(a) = [0, a)$  e  $\beta(0) = \{0\}$ . Ogni successione  $\{a_n | n \in \mathbb{N}\} \subseteq [0, a)$  crescente costituisce una famiglia fine di  $a$  in  $I$ .

(c) In  $(I^X, \leq)$ ,  $X \in |\mathbf{Set}|$ ,  $\forall h \in I^X$ :  $\beta(h) = \{f \in I^X | f \leq h, |supp(f)| \leq 1\}$  è la famiglia fine massimale di  $h$ .

OSSERVAZIONE 5.5.4. Se  $B$  è una famiglia fine di  $a$  e  $B' = \bigcup \{\downarrow b | b \in B\}$  allora  $B'$  è una famiglia fine di  $a$ . Ne segue che la più grande famiglia fine di un qualsiasi elemento di  $L$  è un lower set.

PROPOSIZIONE 5.5.5. Se  $L$  è un reticolo completo,  $x \in L$  e  $K(x) = \bigcap \{M | M \in R(L) : x \leq \bigvee M\}$ , allora  $\forall x \in L$  :

$$K(x) \text{ è una famiglia fine di } x \text{ in } L \Leftrightarrow \bigvee K(x) = x.$$

DIMOSTRAZIONE. “ $\Rightarrow$ ” E’ ovvio, perchè se  $K(x)$  è una famiglia fine deve soddisfare 5.5.1 (1)

“ $\Leftarrow$ ” Per ipotesi  $K(x)$  verifica la proprietà 5.5.1 (1). Sia, ora,  $A \subseteq L$ , tale che  $x \leq \bigvee A$ . Allora per il Lemma 5.3.7 (2) si ha  $K(x) \subseteq K(\bigvee A)$ . Pertanto se  $k \in K(x)$  allora per il Lemma 5.3.7 (3),  $k \in K(\bigvee A) = \bigcup \{K(a) | a \in A\}$ , allora esiste  $\bar{a} \in A$  tale che  $k \in K(\bar{a})$  e per l’osservazione 5.3.8 risulta  $k \leq \bar{a}$ .

Quindi  $\forall k \in K(x) \exists \bar{a} \in A$  tale che  $k \leq \bar{a}$ , ovvero  $K(x)$  è una famiglia fine di  $x$ .  $\square$

PROPOSIZIONE 5.5.6. Siano  $L$  un reticolo completo ed  $x \in L$ .  $\bigvee K(x) = x$  se e solo se  $K(x)$  è la più grande famiglia fine di  $x$ , cioè  $\beta(x) = K(x)$ .

DIMOSTRAZIONE. La condizione è necessaria, infatti sia  $x \in L$ . Per la Proposizione 5.5.5  $K(x)$  è una famiglia fine di  $x$ , quindi  $K(x) \subseteq \beta(x)$ . Supponiamo per assurdo che esista  $A \subseteq L$  una famiglia fine di  $x$  tale che  $A \not\subseteq K(x)$ ; allora  $\exists \bar{a} \in A \setminus K(x)$  e poiché  $K(x)$  è un lower set risulta  $\bar{a} \not\leq k$ ,  $\forall k \in K(x)$ . Pertanto  $K(x) \subseteq L$ ,  $\bigvee K(x) = x$ , ma preso  $\bar{a} \in A$ , non esiste alcun  $k \in K(x)$  per cui  $\bar{a} \leq k$ , ovvero non è verificata per  $A$  la proprietà (2) di 5.5.1, e quindi  $A$  non è una famiglia fine di  $x$ , che è un assurdo. Pertanto  $A \subseteq K(x)$ ,  $\forall A \subseteq \beta(x)$ , ovvero  $\beta(x) = K(x)$ .

La sufficienza segue banalmente da §.5.5.  $\square$

TEOREMA 5.5.7. Se  $(L, \leq)$  è un reticolo completo, allora

$$L \text{ è completamente distributivo} \Leftrightarrow \forall x \in L \exists \beta(x).$$

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione è conseguenza delle proposizioni 5.5.2, 5.5.5, 5.5.6 e 5.3.9.  $\square$

COROLLARIO 5.5.8. Se  $(L, \leq)$  è un reticolo completo, allora

$$L \text{ è completamente distributivo} \Leftrightarrow K(x) \text{ è una famiglia fine, } \forall x \in L.$$

DIMOSTRAZIONE. Segue da 5.3.9 e 5.5.6.  $\square$

DEFINIZIONE 5.5.9. Se  $(L, \leq)$  è un reticolo completo,  $a \in L$  e  $B \subseteq L$ , allora  $B$  si dice **famiglia fine standard** di  $a$  se  $B$  è una famiglia fine di  $a$  e  $b$  è coprimo,  $\forall b \in B$ .

OSSERVAZIONE 5.5.10. Siano  $(L, \leq)$  un reticolo completo completamente distributivo ed  $a \in L$  tale che  $\exists \beta(a)$ . Se  $\forall x \in \beta(a)$  poniamo  $[x] = \{y \in L \mid y \text{ coprimo e } y \leq x\}$  dalla Proposizione 5.4.8 segue che  $x = \bigvee [x]$  e ciò consente di verificare che

$$\beta^*(a) = \bigcup \{[x] \mid x \in \beta(a)\}$$

è una famiglia fine standard di  $a$ .

Dalla Osservazione 5.5.4 segue chiaramente che se indichiamo con  $M(L)$  l'insieme degli elementi coprimi di  $L$  allora

$$\beta^*(a) = \beta(a) \cap M(L).$$

TEOREMA 5.5.11. Se  $(L, \leq)$  è un reticolo completo, allora

$L$  è completamente distributivo  $\Leftrightarrow \forall a \in L \exists A \subseteq L$ ,  $A$  famiglia fine standard di  $a$ .

DIMOSTRAZIONE. Segue dal Teorema 5.5.7 e dalla Definizione 5.5.9.  $\square$

ESEMPIO 5.5.12. (a)  $\forall A \in \mathcal{P}(X)$ , con  $X \in |\mathbf{Set}|$ , si ha

$$\beta^*(A) = \{\{x\} \mid x \in A\}$$

infatti  $M(L) = \{\{x\} \mid x \in X\}$ .

(b) E' facile vedere che, per  $I = [0, 1]$ ,  $M(I) = \{a \in I \mid a \neq 0\}$  e  $M(I^X) = \{f : X \rightarrow I \mid |supp(f)| = 1\}$ . Quindi tenendo conto anche degli esempi (b) e (c) di 5.5.3 si ha

$$\beta^*(a) = (0, a), \quad \forall a \in I$$

$$\beta^*(h) = \{f \in I^X \mid f \leq h, |supp(f)| = 1\}, \quad \forall h \in I^X.$$

DEFINIZIONE 5.5.13. Se  $(L, \leq)$  è un reticolo completo,  $a \in L$  e  $A \subseteq L$ , allora  $A$  si dice **famiglia grossolana** di  $a$  in  $L$  se  $A \neq \emptyset$  e risulta

- (1)  $\bigwedge A = a$ .
- (2)  $B \subseteq L$ ,  $\bigwedge B \leq a \Rightarrow \forall x \in A \exists y \in B : y \leq x$ .

PROPOSIZIONE 5.5.14. Se  $L$  è un reticolo completo ed  $a \in L$ , allora l'unione di famiglie grossolane di  $a$  è ancora una famiglia grossolana di  $a$ .

DIMOSTRAZIONE. Banale.  $\square$

L'unione di tutte le famiglie grossolane di  $a$ , se esiste, si indica con  $\alpha(a)$ .

ESEMPIO 5.5.15. (a) In  $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ , con  $X \in |\mathbf{Set}|, \forall E \in \mathcal{P}(X), E \neq X$ ,  $\alpha(E) = \{X \setminus \{e\} | e \notin E\} \cup \{X\}$  è la più grande famiglia grossolana di  $E$  e  $\alpha(X) = \{X\}$  è l'unica famiglia grossolana di  $X$ .

(b) In  $(I, \leq)$ ,  $\forall a \in (0, 1]$ ,  $\alpha(a) = (a, 1]$  è la più grande famiglia grossolana di  $a$  e  $\alpha(1) = \{1\}$  è l'unica famiglia grossolana di 1.

(c) In  $(I^X, \leq)$ , con  $X \in |\mathbf{Set}|, \forall h \in I^X$ ,  $\alpha(h) = \{f \in I^X | h \leq f \leq 1 \text{ e } |\{x \in X | f(x) \neq 1\}| \leq 1\}$  è la più grande famiglia grossolana di  $h$ .

TEOREMA 5.5.16. Se  $(L, \leq)$  è un reticolo completo allora

$L$  è un reticolo completamente distributivo  $\Leftrightarrow \forall a \in L \exists A \subseteq L$  famiglia grossolana di  $a$ .

DIMOSTRAZIONE. “ $\Rightarrow$ ” Siano  $L$  un reticolo completamente distributivo ed  $a \in L$ .

Posto

$$\mathcal{A} = \{A \subseteq L | \bigwedge A \leq a\}$$

poiché  $\{a\} \in \mathcal{A}$  allora risulta  $\mathcal{A} \neq \emptyset$ .

Consideriamo  $\mathcal{A}$  come una famiglia di sottoinsiemi di  $L$

$$\mathcal{A} = \{A_i | i \in H\} \text{ e } A_i = \{a_{ij} | j \in J_i\}, \quad \forall i \in H.$$

Allora

$$A = \left\{ \bigvee_{i \in H} a_{if(i)} | f \in \prod_{i \in H} J_i \right\}$$

è una famiglia grossolana di  $a$ : infatti dalla definizione di  $A_i$  e per la completa distributività segue che

$$\begin{aligned} \bigwedge A &= \bigwedge_{f \in \prod J_i} \left( \bigvee_{i \in H} a_{if(i)} \right) \\ &= \bigvee_{i \in H} a_{if(i)} \left( \bigwedge_{j \in J_i} a_{ij} \right) \\ &= \bigvee_{i \in H} \bigwedge A_i \\ &= a. \end{aligned}$$

Inoltre, se  $B \subseteq L$  è tale che  $\bigwedge B \leq a$ , allora per definizione di  $\mathcal{A}$ ,  $\exists i_0 \in H$  tale che  $B = A_{i_0}$ . Ora, fissato  $x \in A$ ,  $\exists f \in \prod J_i$  tale che  $x = \bigvee_{i \in H} a_{if(i)}$ . Quindi, posto  $y = a_{i_0 f(i_0)}$ , risulta  $y \in B$  e ovviamente  $y \leq x$ . Pertanto  $\mathcal{A}$  è una famiglia grossolana di  $a$ .

“ $\Leftarrow$ ” Per dimostrare che  $L$  è un reticolo completamente distributivo proviamo

la condizione **(CDII)**, ovvero, posto  $a = \bigvee_{i \in H} \left( \bigwedge_{j \in J_i} a_{ij} \right)$  si deve provare che

$$a = \bigwedge_{f \in \prod J_i} \left( \bigvee_{i \in H} a_{if(i)} \right).$$

$\forall i \in H$  e  $\forall f \in \prod J_i$  risulta  $\bigwedge_{j \in J_i} a_{ij} \leq a_{if(i)}$  e quindi  $a \leq \bigvee_{i \in H} a_{if(i)}$ , da cui segue che

$$a \leq \bigwedge_{f \in \prod J_i} \left( \bigvee_{i \in H} a_{if(i)} \right).$$

Consideriamo, ora,  $\alpha(a)$ , la più grande famiglia grossolana di  $a$ .  $\forall i \in H$ , sia  $B_i = \{a_{ij} | j \in J_i\} \subseteq L$ , allora  $\bigwedge B_i = \bigwedge_{j \in J_i} a_{ij} \leq a$ .

Dalla definizione di famiglia grossolana segue che  $\forall i \in H$  e  $\forall x \in \alpha(a)$   $\exists j_i \in J_i : a_{ij_i} \leq x$ . Considerata  $f \in \prod_{i \in H} J_i$  definita  $\forall i \in H$  da  $f(i) = j_i$  allora  $a_{if(i)} \leq x$ ,  $\forall i \in H$ .

Pertanto  $\forall x \in \alpha(a) \exists f \in \prod_{i \in H} J_i$  tale che  $\bigvee_{i \in H} a_{if(i)} \leq x$  da cui segue che

$$\bigwedge_{f \in \prod_{i \in H} J_i} \left( \bigvee_{i \in H} a_{if(i)} \right) \leq \bigwedge \alpha(a) = a.$$

□

**DEFINIZIONE 5.5.17.** *Sia  $L$  un reticolo completo.*

$A \subseteq L$  si dice **famiglia grossolana standard** di  $a \in L$  se è una famiglia grossolana di  $a$  formata da elementi primi.

Osserviamo che se esiste  $\alpha(a)$ , famiglia grossolana massimale di  $a$ , allora la più grande famiglia grossolana standard è  $\alpha^*(a) = \{x \in L | x \in \alpha(a), x \text{ primo}\}$ .

**COROLLARIO 5.5.18.** *Se  $L$  è un reticolo completo allora*

$$L \text{ completamente distributivo} \Leftrightarrow \forall a \in L \exists \alpha^*(a).$$