CAPITOLO 5

# Teoremi di Rappresentazione di Reticoli

## 5.1. I Teorema di Rappresentazione di Stone

PROPOSIZIONE 5.1.1. *Sia* $(L, \leq)$ *un reticolo e siano:*
$\big(Idl(L), \leq\big)$ *l'insieme degli ideali in* $L$ *ordinato rispetto all'inclusione*

$$I \leq J \ \Leftrightarrow\ I \subseteq J.$$

$\big(Flt(L), \leq\big)$ *l'insieme dei filtri in* $L$ *con la relazione*

$$F \leq G \ \Leftrightarrow\ G \subseteq F.$$

*Allora* $\big(Idl(L), \leq\big)$ *e* $\big(Flt(L), \leq\big)$ *sono reticoli completi.*

DIMOSTRAZIONE. Se $\mathcal{S} \subseteq Idl(L)$, allora $\bigcap \mathcal{S} \subseteq L$ è un ideale. Infatti, ovviamente, valgono le proprietà $(i)$ e $(ii)$ degli ideali. Tale ideale si indica anche con $\bigwedge \mathcal{S} = \bigcap \mathcal{S}$. Quindi $Idl(L)$ è un $\bigwedge$-sottosemireticolo completo di $\mathcal{P}(L)$; di conseguenza $\big(Idl(L), \leq\big)$ è un reticolo completo.

L'asserzione per i filtri $\big(Flt(L), \leq\big)$ si prova dualmente. Si noti, però che se $\mathcal{F} \subseteq Flt(L)$ si ha $\bigvee \mathcal{F} = \bigcap \mathcal{F}$. $\square$

Osserviamo che per $\mathcal{S} \subseteq Idl(L)$ si ha $\bigvee \mathcal{S} = \left\langle \bigcup \mathcal{S} \right\rangle$ e se $\mathcal{F} \subseteq Flt(L)$ si ha $\bigwedge \mathcal{F} =< \bigcup \mathcal{F} >$.

Inoltre per ogni $I \in Idl(L)$ si ha $I = \bigvee \big\{ \downarrow a | a \in I \big\}$.

PROPOSIZIONE 5.1.2. *Se* $(L, \leq)$ *è un reticolo distributivo allora il reticolo* $\big(Idl(L), \leq\big)$ *è un frame,* $\big(Flt(L), \leq\big)$ *è un coframe.*

DIMOSTRAZIONE. Per la proposizione 5.1.1 basta verificare la (**ILD**$\infty$) per $\big(Idl(L), \leq\big)$ e la (**IILD**$\infty$) per $\big(Flt(L), \leq\big)$.

Siano $I \in Idl(L)$ ed $\mathcal{S} \subseteq Idl(L)$. E' evidente che

$$\begin{aligned}
\bigvee \{I \wedge J | J \in \mathcal{S}\} &= \left\langle \bigcup \{I \cap J | J \in \mathcal{S}\} \right\rangle \\
&= \left\langle I \cap \left(\bigcup \mathcal{S}\right) \right\rangle \\
&\leq I \wedge \left(\bigvee \mathcal{S}\right).
\end{aligned}$$

Viceversa, $\forall a \neq \perp$ si ha $a \in I \wedge (\bigvee \mathcal{S}) \Leftrightarrow a \in I$ e $\exists X = \{x_1, \cdots, x_n\} \subseteq \bigcup \mathcal{S}$ tale che $a \leq \bigvee X$. Sia $x_i \in J_i$, con $J_i \in \mathcal{S}$, $\forall i = 1, \cdots, n$; allora $a \wedge x_i \in I \wedge J_i$, $\forall i = 1, \cdots, n$ e $a = a \wedge (\bigvee X) = (a \wedge x_i) \vee \cdots \vee (a \wedge x_n) \in \vee\{I \wedge J_i | i = 1, \cdots, n\} \subseteq \bigvee \{I \wedge J | J \in \mathcal{S}\}$.

Dualmente si prova la (**IILD**$\infty$) per $(Flt(L), \leq)$.

$\square$

LEMMA 5.1.3. *Se $L$ è un reticolo completo ed $a \in L$, allora sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

(*i*) *$\forall S \subseteq L$, con $a \leq \bigvee S$, esiste $F \subseteq S$, $F$ finito, tale che $a \leq \bigvee F$.*
(*ii*) *$\forall S \subseteq L$, $S$ sottoinsieme diretto, con $a \leq \bigvee S$, esiste $s \in S$ tale che $a \leq s$.*
(*iii*) *$\forall I \subseteq L$, $I$ ideale, con $a \leq \bigvee I$, risulta $a \in I$.*

DIMOSTRAZIONE. "(*i*) $\Rightarrow$ (*ii*)" Sia $S \subseteq L$ un sottoinsieme diretto con $a \leq \bigvee S$. Allora per (*i*) $\exists F \subseteq S$, $F$ finito, tale che $a \leq \bigvee F$. Poiché $S$ è diretto esiste $s \in S$, maggiorante per $F$, quindi $a \leq \bigvee F \leq s$.

"(*ii*) $\Rightarrow$ (*iii*)" Sia $I$ un ideale con $a \leq \bigvee I$. Poiché $I$ è diretto, esiste, per (*ii*), $s \in I$ tale che $a \leq s$, quindi $a \in I$.

"(*iii*) $\Rightarrow$ (*i*)" Sia $S \subseteq L$ con $a \leq \bigvee S$ e sia $I =< S >$. Chiaramente $a \leq \bigvee S \leq \bigvee I$, quindi, per (*iii*), $a \in I$ da cui si deduce, ricordando come si costruisce $< S >$, che $\exists F \subseteq S$, $F$ finito tale che $a \leq \bigvee F$. $\square$

DEFINIZIONE 5.1.4. *Se $L$ è un reticolo completo, un elemento $a \in L$ si dice* ***finito*** *(in $L$) se soddisfa una delle condizioni equivalenti del* Lemma 5.1.3.

Poniamo

$$K(L) = \{a \in L | a \text{ finito}\}.$$

COROLLARIO 5.1.5. *Se $L$ è un frame ed $a \in L$, allora*

$$a \text{ è finito} \Leftrightarrow \forall S \subseteq L, \text{ tale che } \bigvee S = a \ \exists F \subseteq S \ F \text{ finito tale che } \bigvee F = a.$$

DIMOSTRAZIONE. "$\Rightarrow$" Se $S \subseteq L$ è tale che $\bigvee S = a$, allora poiché $a$ è finito, $\exists F \subseteq S$, $F$ finito, tale che $a \leq \bigvee F \leq \bigvee S = a$, ovvero $\bigvee F = a$.

"$\Leftarrow$" Se $S \subseteq L$ è tale che $a \leq \bigvee S$, sia

$$A = \{a \wedge s | s \in S\},$$

allora $A \subseteq S$ e

$$\bigvee A = \bigvee \{a \wedge s | s \in S\} = a \wedge \Big(\bigvee S\Big) = a.$$

Dall'ipotesi segue che $\exists F = \{a \wedge s_1, \cdots, a \wedge s_n\} \subseteq A$ tale che $\bigvee F = a$ e quindi considerato $F' = \{s_1, \cdots, s_n\} \subseteq S$ si ha $a = \bigvee F \leq \bigvee F'$. $\square$

ESEMPIO 5.1.6. Siano $X \in |\mathbf{Set}|$, $V \in |\mathbf{Vec}|$, $T \in |\mathbf{Top}|$ e consideriamo i reticoli $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$, $(\tau(T), \subseteq)$ e $(\mathcal{S}(V), \subseteq)$ costituiti dai sottoinsiemi di $X$, dagli aperti di $T$ e dai sottospazi di $V$, rispettivamente.

Gli elementi finiti in $\mathcal{P}(X)$ sono gli insiemi di cardinalità finita, in $\tau(T)$ sono gli aperti compatti, in $\mathcal{S}(V)$ sono i sottospazi di dimensione finita. Le verifiche sono banali nei primi due casi. Nel terzo caso consideriamo un sottospazio $U$ di dimensione finita e sia $U \leq \bigvee \mathcal{U}$, con $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{S}(V)$, dove chiaramente $\bigvee \mathcal{U} = L(\bigcup \mathcal{U})$ è il sottospazio generato da $\bigcup \mathcal{U}$. Consideriamo la funzione $\beta : \mathcal{U} \to \mathcal{P}(V)$ che ad ogni $U' \in \mathcal{U}$ associa una base $\beta(U')$ di $U'$. Chiaramente $\bigvee \mathcal{U} = L(\bigcup \beta^{\to}(\mathcal{U}))$. Sia, ora, $\beta(U) = \{x_1, \cdots, x_n\}$ una base di $U$. $\forall 1 \leq i \leq n$, sia $\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{U}$, $\mathcal{F}_i$ finito, tale che $x_i \in L(\bigcup \{\beta(U') | U' \in \mathcal{F}_i\})$, allora $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{U}$ è finito e, chiaramente, $U = L(\{x_1, \cdots, x_n\}) \subseteq L(\bigcup \mathcal{F}) = \bigvee \mathcal{F}$.

Viceversa sia $U \in \mathcal{S}(V)$ finito in $\mathcal{S}(V)$ e sia $B \subseteq U$ una sua base. Poniamo, per ogni $b \in B$, $U_b = L(\{b\})$. Chiaramente $U = L(B) = \bigvee \{U_b | b \in B\}$ quindi, per ipotesi, $\exists \{U_{b_1}, \cdots, U_{b_m}\}$ con $b_i \in B$, $\forall 1 \leq i \leq m$, tale che $U \leq \bigvee \{U_{b_1}, \cdots, U_{b_m}\}$ per cui $dim U \leq m$.

LEMMA 5.1.7. *Se $L$ è un reticolo completo allora $K(L)$ è un $\vee$-sottosemireticolo.*

DIMOSTRAZIONE. Poiché $\perp = \bigvee \emptyset$, allora da 5.1.3 $(i)$ segue che $\perp \in K(L)$. Se $a, b \in K(L)$ ed $S \subseteq L$ tale che $a \vee b \leq \bigvee S$, allora $a \leq \bigvee S$ e $b \leq \bigvee S$, quindi $\exists F, G \subseteq S$, $F, G$ finiti, tali che $a \leq \bigvee F$ e $b \leq \bigvee G$, da cui segue che $a \vee b \leq \bigvee (F \cup G)$ ovvero $a \vee b \in K(L)$. □

DEFINIZIONE 5.1.8. *Un locale $S$ si dice **coerente** se*

(1) *Gli elementi finiti di $S$ formano un sottoreticolo $K(S)$.*
(2) *$K(S)$ genera tramite $\bigvee$ tutto $S$, cioè $\forall a \in S\ \exists A \subseteq K(S)$ tale che $a = \bigvee A$.*

Osserviamo che per verificare la condizione *1.* basta provare che $K(S)$ è chiuso per $\wedge$ grazie al Lemma 5.1.7.

LEMMA 5.1.9. *Se $L$ è un reticolo distributivo, gli elementi finiti del locale $Idl(L)$ sono gli ideali principali in $L$. In simboli*

$$K(Idl(L)) = \{ \downarrow a | a \in L \}.$$

DIMOSTRAZIONE. Se $B \in Idl(L)$ e $B = \downarrow b \leq \bigvee \mathcal{S}$, con $b \in L$ e $\mathcal{S} \subseteq Idl(L)$, allora $b \in \bigvee \mathcal{S} = < \bigcup \mathcal{S} >$, quindi $\exists I_1, \cdots, I_n \in \mathcal{S}$ ed $\exists a_1 \in I_1, \cdots, a_n \in I_n$ tali che $b \leq a_1 \vee \cdots \vee a_n$. Ne segue che $b \in I_1 \vee \cdots \vee I_n$ quindi $B \leq I_1 \vee \cdots \vee I_n$ è finito in $Idl(L)$.

Viceversa, sia $I \in Idl(L)$ un elemento finito in $Idl(L)$. Poiché $I = \bigvee \{\downarrow a | a \in I\}$ ed $I$ è finito, $\exists a_1, \cdots, a_n \in I$ tale che $I = \downarrow a_1 \vee \cdots \vee \downarrow a_n$.

Chiaramente $\bigvee \{a_1, \cdots, a_n\} = \bigvee (\downarrow a_1 \vee \cdots \vee \downarrow a_n) = \bigvee I \in I$ è un massimo per $I$ e quindi $I$ è un ideale principale. □

Proposizione 5.1.10. *Sia* $S \in |\mathbf{Loc}|$.

$S$ *è coerente* $\Leftrightarrow \exists L \in |\mathbf{DLat}|$ *ed* $\exists \varphi : S \to Idl(L)$ *isomorfismo di frame.*

Dimostrazione. "$\Rightarrow$" Sia $S$ un locale coerente. Poiché $S$ è coerente $K(S)$ è un sottoreticolo di $S$ ed essendo $S$ un locale, $K(S)$ è distributivo. Per la Proposizione 5.1.2 $Idl\big(K(S)\big)$ è un locale.

Sia

$$\varphi : S \to Idl\big(K(S)\big)$$

$$a \longmapsto \varphi(a) = \big\{k \in K(S) | k \leq a\big\}.$$

Evidentemente $\varphi(a)$ è un lower set e, per il Lemma 5.1.7, è chiuso per $\vee$, quindi è un ideale di $K(S)$.

Se $I \in Idl\big(K(S)\big)$, allora $I$ è un sottoinsieme diretto di $S$ e quindi posto $a = \bigvee I$ si ha

$$k \in K(S) \text{ e } k \leq a \Leftrightarrow \exists b \in I \text{ tale che } k \leq b \Leftrightarrow k \in I.$$

Pertanto $\varphi(a) = I$, ovvero $\varphi$ è suriettiva.

Considerata l'applicazione

$$\varphi' : Idl\big(K(S)\big) \to S$$

$$I \longmapsto \varphi'(I) = \bigvee I$$

dalla condizione (2) della Definizione 5.1.8 segue che $\varphi'(\varphi(a)) = \bigvee \varphi(a) = \bigvee \big\{k \in K(S) | k \leq a\big\} = a$, $\forall a \in A$, ovvero l'applicazione $\varphi'$ è inversa a sinistra di $\varphi$, la quale pertanto è iniettiva, quindi bigettiva.

Inoltre, $\varphi$ è chiaramente isotona, quindi è un isomorfismo di frame.

"$\Leftarrow$" Sia $L$ un reticolo distributivo.

Poiché per ogni ideale $I$ in $L$ si ha $I = \bigvee \big\{ \downarrow a | a \in I\big\}$, dal Lemma 5.1.9 segue che $K\big(Idl(L)\big)$ genera $Idl(L)$ tramite $\bigvee$.

Inoltre, $K\big(Idl(L)\big)$ è chiuso per $\wedge$, infatti l'ideale $L = \downarrow \top$ è chiaramente finito e dati $I$ e $J$ finiti, $I = \downarrow a$, $J = \downarrow b$, si ha evidentemente $I \wedge J = \downarrow (a \wedge b) \in K\big(Idl(L)\big)$.

Quindi $Idl(L)$ è coerente ed essendo $\varphi$ un isomorfismo, anche $S$ è coerente. $\square$

Definizione 5.1.11. *Indichiamo con* **CohLoc** *la categoria avente come oggetti i locali coerenti e come morfismi* $f \in \mathbf{CohLoc}(S,T)$ *i morfismi in* $\mathbf{Loc}(S,T)$, *tali che* $f^{op} : T \to S$ *porta elementi finiti di* $T$ *in elementi finiti di* $S$, *ovvero*

$$(f^{op})^{\to}\big(K(T)\big) \subseteq K(S).$$

*Tali morfismi si dicono* ***coerenti****.*

ESEMPIO 5.1.12. E' evidente che non tutti i morfismi di frame determinano morfismi coerenti. Infatti, notiamo che per ogni $X \in |\mathbf{Set}|$, $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ è un locale coerente e per ogni funzione $f : X \to Y$ l'operatore powerset inverso $f^{\leftarrow} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ è un morfismo di frame (anzi, di reticoli completi) ma non è necessariamente coerente. Se infatti $X$ è un insieme infinito ed $f$ è una funzione di valore costante $y \in Y$, allora ogni sottoinsieme finito $F \subseteq Y$, elemento finito di $\mathcal{P}(Y)$, contenente $y$ ha come immagine $f^{\leftarrow}(F) = X$ che non è finito.

Se però $\varphi \in \mathbf{Loc}(S, T)$ è un isomorfismo, allora gli elementi finiti di $S$ sono tutte e sole le immagini tramite $f^{op}$ degli elementi finiti di $T$,

$$(\varphi^{op})^{\rightarrow}\big(K(T)\big) = K(S),$$

come si verifica facilmente. Si ha quindi in tal caso che $S$ è coerente se e solo se lo è $T$.

PROPOSIZIONE 5.1.13. **DLat** *è duale di* **CohLoc**.

DIMOSTRAZIONE. Un'equivalenza $\Psi$ tra **DLat** e $\mathbf{CohLoc}^{op}$ si ottiene nel modo seguente. Associamo ad ogni locale coerente $S$ il reticolo distributivo $\Psi(S) = K(S)$. Come si è visto nella dimostrazione della Proposizione 5.1.10, $S$ è isomorfo a $Idl(K(S))$.

Per ogni morfismo $f \in \mathbf{CohLoc}(T, S)$ la restrizione

$$\Psi(f^{op}) : K(S) \to K(T)$$

è un morfismo di reticoli distributivi.

E' evidente che

$$\Psi : \mathbf{CohLoc}^{op} \to \mathbf{DLat}$$

è un funtore. Inoltre, si prova che è fedele, pieno e denso.

$\Psi$ è fedele, infatti siano $f, g \in \mathbf{CohLoc}(T, S)$ tali che $\Psi(f^{op}) = \Psi(g^{op})$. $\forall a \in S\ \exists A \subseteq K(S)$ tale che $a = \bigvee A$ e poiché $f^{op}$ è un morfismo di frame $f^{op}(a) = f^{op}\left(\bigvee A\right) = \bigvee\left\{f^{op}(x) | x \in A\right\} = \bigvee\left\{g^{op}(x) | x \in A\right\} = g^{op}\left(\bigvee A\right) = g^{op}(a)$.

$\Psi$ è pieno, infatti ogni morfismo di reticoli $h : K(S) \to K(T)$ si estende a un morfismo di frame $\overline{h} : S \to T$ che determina un morfismo di **CohLoc** e la cui restrizione $\Psi(\overline{h}) = h$. Basta infatti porre $\forall x \in S$, $x = \bigvee A$ con $A \subseteq K(S)$, $\overline{h}(x) = \bigvee h^{\rightarrow}(A)$.

Infine, $\Psi$ è denso, infatti $\forall L \in \mathbf{DLat}$ sia $Idl(L)$ il locale coerente dei suoi ideali. Per il Lemma 5.1.9 $K\big(Idl(L)\big) = \big\{\downarrow a | a \in L\big\}$ che è chiaramente isomorfo ad $L$.

Per il Teorema 1.8.7 $\Psi$ è un'equivalenza. $\square$

DEFINIZIONE 5.1.14. *Uno spazio topologico* $\big(X, \tau(X)\big)$ *si dice* ***coerente*** *se è sobrio e se la sua topologia* $\tau(X)$ *è un locale coerente.*

*Una funzione continua fra due spazi coerenti $f : X \to Y$ si dice* ***coerente*** *se la restrizione del suo operatore powerset inverso*

$$f^{\leftarrow} : \tau(Y) \to \tau(X)$$

*è un morfismo coerente.*

Indichiamo con **CohTop** la categoria concreta i cui oggetti sono gli spazi coerenti ed i cui morfismi sono le funzioni coerenti.

OSSERVAZIONE 5.1.15. E' evidente che, per ogni spazio topologico $X$, $\tau(X)$ è un locale coerente sse la famiglia dei sottoinsiemi compatti aperti di $X$, $KO(X)$ è chiusa per intersezioni (oltre che, ovviamente, per unioni) finite e forma una base per la topologia $\tau(X)$. In particolare $(X, \tau(X))$ deve essere compatto.

Una funzione continua è coerente sse l'immagine reciproca di ogni compatto è un compatto.

PROPOSIZIONE 5.1.16. *Sia $L$ un qualsiasi reticolo. Gli elementi primi del locale $Idl(L)$ sono esattamente gli ideali primi in $L$.*

DIMOSTRAZIONE. Se $I$ è un elemento primo di $Idl(L)$, allora $I \neq L$, quindi $\top \notin I$. Si ha inoltre $a \wedge b \in I \Rightarrow \downarrow a \subseteq I$ e $\downarrow b \subseteq I \Rightarrow \downarrow a \wedge \downarrow b \leq I$ $\Rightarrow \downarrow a \leq I$ o $\downarrow b \leq I \Rightarrow a \in I$ o $b \in I$.

Viceversa, se $I$ è un ideale primo, allora $\top \notin I \Rightarrow L \neq I$.

Siano $J, K \in Idl(L)$, tali che $J \cap K \leq I$. Se $J \nsubseteq I$, allora esiste $b \in J \setminus I$; si ha allora $\forall c \in K$, $b \wedge c \in J \cap K \subseteq I$ e poiché $I$ è un ideale primo e $b \notin I$, allora $c \in I$, ovvero $K \subseteq I$. Pertanto, $I$ è un elemento primo di $Idl(L)$.

□

TEOREMA 5.1.17. *Ogni locale coerente è spaziale.*

DIMOSTRAZIONE. Se $S \in |\mathbf{CohLoc}|$, per la Proposizione 5.1.10 $\exists L \in |\mathbf{DLat}|$ tale che $S \cong Idl(L)$. Proviamo quindi che $Idl(L)$ è spaziale.

Siano $I \nleq J$ due ideali di $L$ e sia $a \in I \setminus J$. Evidentemente $J \cap \uparrow a = \emptyset$. Se $J'$ è l'ideale massimale tra quelli che non intersecano il filtro $\uparrow a$ (si veda la Proposizione 4.2.19) allora $J'$ è primo per la Proposizione 4.2.20 quindi è un elemento primo in $Idl(L)$ per la Proposizione 5.1.16 e determina un punto $p \in pt(Idl(L))$ che vale $\perp$ sugli ideali inclusi in $J'$, $\top$ sugli altri. Ora, è evidente che $J \leq J'$ mentre da $a \notin J'$ segue che $I \nleq J'$, cioè $p(J) = \perp$, $p(I) = \top$. La tesi segue dalla Proposizione 4.5.5. □

PROPOSIZIONE 5.1.18. *Le categorie* **CohLoc** *e* **CohTop** *sono equivalenti.*

DIMOSTRAZIONE. Le equivalenze fra **SpatLoc** e **Sob** considerate nella Proposizione 4.5.10 si restringono alle sottocategorie ora considerate; infatti, è chiaro che per ogni spazio coerente $X$, $\tau(X)$ è un locale coerente.

Viceversa, per ogni locale coerente $S$, si ha che $\big(pt(S), \tau\big(pt(S)\big)\big)$ è sobrio; inoltre, osservato che $S$ è spaziale, si ha che $\varphi : S \to \tau\big(pt(S)\big)$ è un isomorfismo di frame quindi anche $\tau\big(pt(S)\big)$ è coerente.

E' chiaro poi che tali restrizioni dei funtori $\tau$ e $pt$ sono delle equivalenze poiché già lo sono tra le categorie **SpatLoc** e **Sob**.

□

TEOREMA 5.1.19 (I Teorema di Rappresentazione di Stone). *La categoria* **DLat** *è duale della categoria* **CohTop**.

DIMOSTRAZIONE. E' ovvia conseguenza di 5.1.13 e 5.1.18.

□

## 5.2. II Teorema di Rappresentazione di Stone

La dualità, descritta nel I Teorema di Rappresentazione di Stone, tra **DLat** e **CohTop**, può essere ristretta alla sottocategoria piena **Bool** di **DLat** e ad un'opportuna sottocategoria piena di **CohTop** costituita da particolari spazi topologici che vengono comunemente chiamati spazi di Stone.

Prima di descrivere tali spazi e stabilirne il collegamento con le algebre di Boole è utile riconsiderare e descrivere esplicitamente l'equivalenza, implicitamente ricavata, tra $\mathbf{DLat}^{op}$ e **CohTop**; in particolare sarà utile tenere presente la corrispondenza fra le classi degli oggetti di tali categorie.

A uno spazio coerente $\big(X, \tau(X)\big)$ la dualità di Stone associa il reticolo distributivo $K(\tau(X))$ e ad $f \in \mathbf{CohTop}(X, Y)$, associa il morfismo di reticoli $f^{\leftarrow} \in \mathbf{DLat}\big(K(\tau(Y)), K(\tau(X))\big)$ ottenuto tramite restrizione del morfismo di locali coerenti $f^{\leftarrow} : \tau(Y) \to \tau(X)$.

Viceversa, ad un reticolo distributivo $L$ si associa lo spazio coerente

$$\big(pt\big(Idl(L)\big), \tau\big(pt(Idl(L))\big)\big)$$

e ad un morfismo $h \in \mathbf{DLat}^{op}(M, L)$ si associa $pt(h^{op})$.

DEFINIZIONE 5.2.1. *Lo spazio coerente*

$$spec(L) = pt\big(Idl(L)\big)$$

*si dice* ***spettro*** *di* $L$.

I punti di tale spazio sono determinati dagli ideali principali primi di $Idl(L)$ quindi dagli elementi primi di $Idl(L)$ che, come si è visto, sono esattamente gli ideali primi di $L$. Più esplicitamente, i punti dello spettro sono i morfismi di frame

$$spec(L) = \big\{p_I | I \text{ ideale primo di } L\big\}$$

con

$$p_I : Idl(L) \to \mathbf{2}$$
$$J \longmapsto p_I(J) = \begin{cases} \perp & \text{se } J \leq I \\ \top & \text{se } J \nleq I. \end{cases}$$

L'insieme degli aperti è

$$\tau\big(spec(L)\big) = \big\{\varphi(J) | J \in Idl(L)\big\}$$

con

$$\varphi(J) = \big\{p_I \in pt\big(Idl(L)\big) | I \text{ ideale primo e } J \nleq I\big\}$$

In termini equivalenti lo spettro di $L$ può essere descritto con riferimento ai filtri coprimi di $L$ che, per la Proposizione 4.2.10, sono esattamente i complementari in $L$ dei filtri primi di $L$.

In effetti si ha che

$$spec(L) = \big\{q_F | F \text{ filtro coprimo di } L\big\}$$

con

$$q_F : Idl(L) \to \mathbf{2}$$
$$J \longmapsto q_F(J) = \begin{cases} \perp & \text{se } J \cap F = \emptyset \\ \top & \text{se } J \cap F \neq \emptyset \end{cases}$$

e

$$\tau\big(spec(L)\big) = \big\{A_J | J \in Idl(L)\big\}$$

con

$$A_J = \big\{q_F \in pt\big(Idl(L)\big) | F \text{ filtro coprimo e } F \cap J \neq \emptyset\big\}.$$

Utilizziamo queste ultime notazioni per dimostrare i seguenti risultati.

LEMMA 5.2.2. *Sia $L$ un reticolo distributivo. Allora*

$$K\big(\tau\big(spec(L)\big)\big) \cong L.$$

DIMOSTRAZIONE. Intanto osserviamo che $Idl(L) \cong \tau\big(spec(L)\big)$ poiché la corrispondenza $J \longmapsto A_J$ è un isomorfismo in quanto è chiaramente bigettiva e conserva $\bigvee$; infatti, $\forall \mathcal{S} \subseteq Idl(L)$ si ha $A_{\bigvee \mathcal{S}} = \bigcup \{A_J | J \in \mathcal{S}\}$. Una inclusione è banale e per l'altra abbiamo

$$\begin{aligned}
& q_F \in A_{\bigvee \mathcal{S}}, \text{ con } F \text{ filtro coprimo } \Rightarrow\ F \cap \Big(\bigvee \mathcal{S}\Big) \neq \emptyset \\
& \Rightarrow \exists b \in F, \exists a_1 \in J_1 \in \mathcal{S}, \cdots, \exists a_n \in J_n \in \mathcal{S} \text{ tali che } b \leq a_1 \vee \cdots \vee a_n \\
& \Rightarrow\ b \in F \text{ e } b = b \wedge (a_1 \vee \cdots \vee a_n) = (b \wedge a_1) \vee \cdots \vee (b \wedge a_n) \in F \\
& \Rightarrow\ b \in F \text{ e } \exists 1 \leq i \leq n \text{ tale che } b \wedge a_i \in F\ \Rightarrow\ b \wedge a_i \in F \cap J_i \\
& \Rightarrow\ q_F \in A_{J_i} \subseteq \bigcup \{A_J | J \in \mathcal{S}\}.
\end{aligned}$$

Tenendo anche conto del Lemma 5.1.9 si ha

$$K\big(\tau\big(spec(L)\big)\big) \cong K\big(Idl(L)\big) \cong L.$$

□

PROPOSIZIONE 5.2.3. *Sia $L$ un reticolo distributivo. Si ha allora l'equivalenza*

$$spec(L) \text{ è } T_2 \Leftrightarrow L \text{ è algebra di Boole.}$$

DIMOSTRAZIONE. "$\Rightarrow$" $spec(L)$, essendo coerente, è compatto. Se esso è anche $T_2$ si ha

$$\begin{aligned} K\big(\tau\big(spec(L)\big)\big) &= \big\{A \subseteq spec(L) | A \text{ aperto e compatto}\big\} \\ &= \big\{A \subseteq spec(L) | A \text{ aperto e chiuso}\big\} \end{aligned}$$

e tale insieme, ordinato per inclusione, è chiaramente un'algebra di Boole quindi, per il Lemma 5.2.2, $L$ è un'algebra di Boole.

Viceversa, sia $L$ un'algebra di Boole e siano $q_F \neq q_G$ due punti di $spec(L)$. Allora $F$ e $G$ sono filtri coprimi distinti in $L$.

Se $a \in F \setminus G$, allora per la Proposizione 4.2.26 $\neg a \in G \setminus F$. Considerati gli aperti $U = A_{(\downarrow a)}$ e $U' = A_{(\downarrow(\neg a))}$ si ha

$$a \in F \cap \downarrow a \ \Rightarrow \ F \cap \downarrow a \neq \emptyset \ \Rightarrow \ q_F \in U$$

$$\neg a \in G \cap \downarrow (\neg a) \ \Rightarrow \ G \cap \downarrow (\neg a) \neq \emptyset \ \Rightarrow \ q_G \in U'$$

ed inoltre $U \cap U' = \emptyset$, altrimenti si avrebbe

$$\begin{aligned} \exists H \text{ filtro coprimo con } q_H \in U \cap U' &\Rightarrow \ H \cap \downarrow a \neq \emptyset \neq H \cap \downarrow (\neg a) \\ &\Rightarrow \ \exists h, k \in H, \ h \leq a, \ k \leq \neg a \\ &\Rightarrow \ h \wedge k \leq a \wedge \neg a = \perp \text{ e } h \wedge k \in H \\ &\Rightarrow \ \perp \in H \end{aligned}$$

e questo è assurdo essendo $H$ coprimo. □

Richiamiamo ora alcune nozioni di topologia generale, utili per introdurre e caratterizzare gli spazi di Stone.

PROPOSIZIONE 5.2.4. *Sia $(X, \tau)$ uno spazio topologico .*

(1) *$(X, \tau)$ $T_2$ e $K \subseteq X$ compatto $\Rightarrow$ $K$ chiuso.*
(2) *$(X, \tau)$ compatto e $H \subseteq X$ chiuso $\Rightarrow$ $H$ compatto.*

DIMOSTRAZIONE. (1) Sia $y \in X \setminus K$. $\forall x \in K$ siano $U_x \in \tau(y)$, $V_x \in \tau(x)$ aperti disgiunti $U_x \cap V_x = \emptyset$. $\big\{V_x | x \in K\big\}$ è chiaramente un ricoprimento aperto di $K$ e quindi ammette un sottoricoprimento finito $\big\{V_{x_1}, \cdots, V_{x_n}\big\}$. Evidentemente si ha $U = U_{x_1} \cap \cdots \cap U_{x_n} \in \tau(y)$ e $U \cap K \subseteq U \cap (V_{x_1} \cap \cdots \cap V_{x_n}) = (U \cap V_{x_1}) \cup \cdots \cup (U \cap V_{x_n}) \subseteq (U_{x_1} \cap V_{x_1}) \cup \cdots \cup (U_{x_n} \cap V_{x_n}) = \emptyset$. $X \setminus K$ è quindi intorno di $y$ e, per l'arbitrarietà di $y$, è un aperto.

(2) Sia $\mathcal{A} = \big\{A_i | i \in I\big\}$ un qualsiasi ricoprimento aperto di $H$. Allora $\mathcal{A} \cup \big\{X \setminus H\big\}$ è un ricoprimento aperto di $X$. Sia $\mathcal{A}'$ un sottoricoprimento finito e sia $\mathcal{A}' \cap \mathcal{A} = \big\{A_1, \cdots, A_m\big\}$. Chiaramente $A_1 \cup \cdots \cup A_m = ((X \setminus H) \cap H) \cup (A_1 \cup \cdots \cup A_m) = ((X \setminus H) \cup A_1 \cup \cdots \cup A_m) \cap (H \cup A_1 \cup \cdots \cup A_m) =$

$H \cup (A_1 \cup \cdots \cup A_m) \Rightarrow H \subseteq A_1 \cup \cdots \cup A_m$ cioè $\mathcal{A}' \cap \mathcal{A}$ è un sottoricoprimento finito di $\mathcal{A}$ e pertanto $H$ è compatto. □

COROLLARIO 5.2.5. *Sia $(X, \tau)$ uno spazio compatto e $T_2$. $\forall P \subseteq X$ si ha*

$$P \text{ chiuso } \Leftrightarrow P \text{ compatto.}$$

DIMOSTRAZIONE. Segue banalmente dalla proposizione precedente. □

DEFINIZIONE 5.2.6. *Sia $X$ uno spazio topologico.*

*$X$ si dice **totalmente sconnesso** se gli unici connessi sono i singoletti.*

*$X$ si dice **totalmente separato** se $\forall x \neq y$ $\exists U \subseteq X$, $U$ clopen, tale che $x \in U$ e $y \notin U$.*

*$X$ si dice **zero dimensionale** se i clopen formano una base di $\tau(X)$.*

PROPOSIZIONE 5.2.7.

(1) *Uno spazio totalmente sconnesso è $T_1$.*
(2) *Uno spazio totalmente separato è $T_2$ e totalmente sconnesso.*
(3) *Uno spazio zero dimensionale e $T_0$ è regolare e totalmente separato.*

DIMOSTRAZIONE. (1) Poiché ogni componente connessa è un chiuso, i singoletti, ovvero le componenti connesse di uno spazio topologico totalmente sconnesso, sono chiusi.

(2) Siano $a \neq b$ due punti distinti dello spazio $X$ e sia $A \subseteq X$ un clopen tale che $a \in A$ e $b \notin A$. Sia $B = X \setminus A$. $B$ è intorno aperto di $b$ e $A \cap B = \emptyset$, quindi $X$ è $T_2$. Inoltre, se $Y \subseteq X$ ha almeno due punti $x \neq y$ e se $U$ è un clopen che contiene $x$ e non $y$ e $V = X \setminus U$, allora $Y \cap U$ e $Y \cap V$ formano una partizione aperta non banale di $Y$ che, quindi, è sconnesso.

(3) Sia $F$ un chiuso non vuoto e $x \notin F$. $X \setminus F$ è aperto e quindi unione di clopen: sia $U$ un clopen tale che $x \in U \subseteq X \setminus F$ e $V = X \setminus U$. Allora $U$ e $V$ sono intorni aperti disgiunti di $x$ ed $F$, rispettivamente.

Se $x \neq y$ e se $A$ è aperto, $x \in A$, $y \notin A$, allora $A$ è unione di clopen, quindi $\exists$ clopen $U$ tale chè $x \in U \subseteq A$, quindi $y \notin U$. □

PROPOSIZIONE 5.2.8. *Sono equivalenti le seguenti affermazioni*

(*i*) *$X$ è compatto, $T_2$ e totalmente sconnesso.*
(*ii*) *$X$ è compatto e totalmente separato.*
(*iii*) *$X$ è compatto, $T_0$ e zero dimensionale.*
(*iv*) *$X$ è $T_2$ e coerente.*

DIMOSTRAZIONE. "$(i) \Rightarrow (ii)$" Sia $x \in X$ e sia $\mathbf{C}(x)$ l'insieme dei punti che non possono essere separati da $x$ con un clopen.

$\mathbf{C}(x)$ è un chiuso, infatti, se $y \in X \setminus \mathbf{C}(x)$, $y$ può essere separato da $x$ con un clopen, cioè $\exists U$ clopen, con $y \in U$ e $x \notin U$ e tutti i punti di $U$ sono separabili da $x$ con il clopen $U$, quindi $U \subseteq X \setminus \mathbf{C}(x)$.

Se $|\mathbf{C}(x)| \geq 2$, allora, per l'ipotesi, $\mathbf{C}(x)$ è sconnesso, quindi $\mathbf{C}(x) = F_1 \cup F_2$, con $F_1$, $F_2$ chiusi disgiunti, non vuoti nel sottospazio $\mathbf{C}(x)$ (chiuso), quindi in $X$. Poiché $X$ è compatto e $T_2$, esso è anche normale, quindi $\exists A \in \tau$, $A \supseteq F_1$, la cui chiusura è disgiunta da $F_2$.

Allora la frontiera di $A$, $fr(A) = cl(A) \cap (X \setminus A)$, non interseca $\mathbf{C}(x)$, perchè $cl(A) \cap F_2 = \emptyset$ e $(X \setminus A) \cap F_1 = \emptyset$; quindi ogni punto della frontiera di $A$ è separabile da $x$ con un clopen, cioè $\forall y \in fr(A)\ \exists B_y$ clopen che contiene $y$ ma non $x$. $\{B_y | y \in fr(A)\}$ è un ricoprimento aperto di clopen di $fr(A)$ che è chiuso e quindi (poiché $X$ è compatto) è compatto, per cui esiste un sottoricoprimento finito di clopen $fr(A) \subseteq B_{y_1} \cup B_{y_2} \cup \cdots \cup B_{y_n}$.

Sia $B = B_{y_1} \cup B_{y_2} \cup \cdots \cup B_{y_n}$, allora $B$ è clopen, $B \supseteq fr(A)$ e $x \notin B$, quindi tutti i punti di $B$ sono separabili da $x$ col clopen $B$, cioè $B \cap \mathbf{C}(x) = \emptyset$.

L'insieme $W = A \setminus B = cl(A) \setminus B$ è clopen non vuoto e

$$W \cap \mathbf{C}(x) = A \cap (X \setminus B) \cap \mathbf{C}(x) = A \cap \mathbf{C}(x) \supseteq F_1 \neq \emptyset$$

e inoltre

$$\begin{aligned}
(X \setminus W) \cap \mathbf{C}(x) &= (X \setminus W) \cap (F_1 \cup F_2) \\
&\supseteq (X \setminus W) \cap F_2 \\
&= \big(B \cup (X \setminus cl(A))\big) \cap F_2 \\
&\supseteq \big(X \setminus cl(A)\big) \cap F_2 \\
&= F_2 \neq \emptyset
\end{aligned}$$

e questa è una contraddizione. Infatti, uno dei due clopen $W$ o $X \setminus W$ non contiene $x$ e quindi tutti i suoi punti sono separabili con clopen da $x$, cioè esso deve essere disgiunto da $\mathbf{C}(x)$.

"$(ii) \Rightarrow (iii)$" Per ottenere la tesi bisogna solo provare che ogni aperto $U$ è unione di clopen, cioè che $\forall U \in \tau$, $\forall x \in U\ \exists A$ clopen tale che $x \in A \subseteq U$. Sia $y \in X \setminus U$, quindi $y \neq x$; esiste $B_y$ clopen, $y \in B_y$ e $x \notin B_y$. Allora $\{B_y | y \in X \setminus U\}$ ricopre $X \setminus U$ che è chiuso, quindi compatto.

Considerato un sottoricoprimento finito $B_{y_1} \cup B_{y_2} \cup \cdots \cup B_{y_n}$, posto $B = B_{y_1} \cup B_{y_2} \cup \cdots \cup B_{y_n}$, allora $B$ è clopen, $x \notin B$, $B \supseteq X \setminus U$. Posto $A = X \setminus B$, $A$ è clopen, $x \in A$ e $A \subseteq U$.

"$(iii) \Rightarrow (iv)$" Uno spazio $T_0$ e zero dimensionale è regolare, quindi $T_2$ e pertanto anche sobrio. Inoltre, poiché lo spazio è compatto e $T_2$, i compatti coincidono con i chiusi e poiché i clopen formano una base, anche i compatti aperti formano una base. Infine, una qualsiasi intersezione finita di compatti aperti è intersezione finita di clopen, quindi è un clopen e quindi è compatto-aperto. Pertanto segue che lo spazio è coerente.

"$(iv) \Rightarrow (iii)$" Poiché lo spazio è $T_2$ esso è $T_0$ e i compatti sono chiusi. Poiché, per ipotesi, ogni aperto è unione di compatti-aperti, esso è anche unione di clopen, cioè lo spazio è zero dimensionale. Inoltre lo spazio è compatto perchè è coerente.

"$(iii) \Rightarrow (ii)$" Segue dalla Proposizione 5.2.7.

"$(ii) \Rightarrow (i)$" Segue dalla Proposizione 5.2.7. □

DEFINIZIONE 5.2.9. *Uno **spazio di Stone** è uno spazio che verifica una delle proprietà equivalenti della* Proposizione 5.2.8.

Indichiamo con **Stone** la categoria che ha come oggetti gli spazi di Stone e come morfismi le funzioni continue.

Osservato che ogni spazio di Stone è chiaramente uno spazio coerente si prova il seguente risultato.

PROPOSIZIONE 5.2.10. *Ogni funzione continua fra due spazi di Stone è coerente.*

DIMOSTRAZIONE. La tesi segue dal fatto che in uno spazio di Stone i compatti aperti sono i chiusi aperti e se $f$ è continua, $f^{\leftarrow}$ li conserva. □

OSSERVAZIONE 5.2.11. **Stone** è sottocategoria piena sia di **CohTop** che di **Top**, sebbene l'inclusione fra queste ultime due non sia piena.

TEOREMA 5.2.12 (II Teorema di Rappresentazione di Stone). *La categoria* **Bool** *è duale della categoria* **Stone***.*

DIMOSTRAZIONE. Come si è già osservato all'inizio del paragrafo, la dualità del I Teorema di Stone associa ad ogni spazio coerente $X$ il reticolo distributivo $K(\tau(X))$; è chiaro che se $X$ è uno spazio di Stone allora $K(\tau(X))$ è un'algebra di Boole perchè è costituita dai clopen di $X$.

Viceversa, la stessa dualità associava a ogni reticolo distributivo $L$ lo spazio coerente che abbiamo chiamato $spec(L)$ il quale, se $L$ è un'algebra di Boole è anche $T_2$ (si veda la Proposizione 5.2.3) quindi è uno spazio di Stone.

Essendo inoltre **Stone** e **Bool** sottocategorie piene di **CohTop** e **DLat**, rispettivamente, è chiaro che tale dualità si restringe alle sottocategorie dell'enunciato. □

Concludiamo questo paragrafo enunciando due caratterizzazioni degli oggetti delle categorie correlate dalla dualità del II Teorema di Stone. La dimostrazione di tali risultati si può vedere su [**8**] nel Capitolo 2 paragrafi 4.5-4.9.

PROPOSIZIONE 5.2.13. *Uno spazio topologico $(X, \tau(X))$ è uno spazio di Stone sse è $T_1$ e coerente.*

PROPOSIZIONE 5.2.14. *Un reticolo distributivo è un'algebra di Boole sse i suoi ideali primi sono massimali.*

Ricordiamo a proposito di quest'ultima proposizione, che in ogni reticolo distributivo gli ideali massimali sono primi.

## 5.3. Rappresentazione di Reticoli Completamente Distributivi

Se $(L, \leq)$ è un insieme pre-ordinato, indichiamo con $R(L)$ la classe dei lower set (detti anche semiideali) di $L$.

LEMMA 5.3.1. *Se $f \in \mathbf{CLat}(L, S)$, $f$ è suriettiva ed $L$ è completamente distributivo, allora $S$ è completamente distributivo.*

DIMOSTRAZIONE. Basta verificare

$$\textbf{(CDI)} \quad \bigwedge_{i\in I}\bigvee_{j\in J_i} a_{ij} = \bigvee_{f\in\prod_{i\in I} J_i}\bigwedge_{i\in I} a_{if(i)}$$

dove per ogni $i \in I$ e per ogni $j \in J_i$, $a_{ij} \in S$. Dalla suriettività di $f$ segue che $\forall a_{ij} \in S$ esiste $x_{ij} \in L$ tale che $f(x_{ij}) = a_{ij}$ e poiché $L$ è completamente distributivo ed $f$ è un morfismo in $\mathbf{CLat}$ si ha

$$\begin{aligned}
\bigwedge_{i\in I}\bigvee_{j\in J_i} a_{ij} &= \bigwedge_{i\in I}\bigvee_{j\in J_i} f(x_{ij}) \\
&= f\left(\bigwedge_{i\in I}\bigvee_{j\in J_i} x_{ij}\right) \\
&= f\left(\bigvee_{g\in\prod_{i\in I} J_i}\bigwedge_{i\in I} x_{ig(i)}\right) \\
&= \bigvee_{g\in\prod_{i\in I} J_i}\bigwedge_{i\in I} f(x_{ig(i)}) \\
&= \bigvee_{g\in\prod_{i\in I} J_i}\bigwedge_{i\in I} a_{ig(i)}
\end{aligned}$$

□

LEMMA 5.3.2. *Se $(L, \leq)$ è un insieme pre-ordinato, allora $\big(R(L), \subseteq\big)$ è un sottoreticolo completo di $2^L$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathcal{A} \subseteq R(L)$. Se $a \in \bigcup\mathcal{A}$ allora $\exists A \in \mathcal{A}$ tale che $a \in A$; poiché $A$ è un semiideale di $L$ allora $\downarrow a \subseteq A$ e quindi $\downarrow a \subseteq \bigcup\mathcal{A}$. Pertanto $\bigcup\mathcal{A}$ è un semiideale di $L$, ovvero $\bigcup\mathcal{A} \in R(L)$.

Analogamente si dimostra che $\bigcap\mathcal{A} \in R(L)$.

Da ciò segue la tesi. □

Lemma 5.3.3. *Se* $(L, \leq)$ *è un reticolo completo e* $\Phi = \{\Phi_a | a \in A\} \subseteq R(L)$*, allora*

$$\bigcap \Phi = \left\{ \bigwedge s^{\rightarrow}(A) | s \in S(\Phi) \right\},$$

*dove*

$$S(\Phi) = \{s : A \to L| \quad \forall a \in A : s(a) \in \Phi_a\} \cong \prod_{a \in A} \Phi_a.$$

Dimostrazione. Se $x \in \bigcap \Phi$, allora $\forall a \in A$ risulta $x \in \Phi_a$. Sia $s_0 : A \to L$ l'applicazione che ad ogni $a \in A$ associa $s_0(a) = x$, allora $s_0^{\rightarrow}(A) = \{x\}$, quindi $\bigwedge s_0^{\rightarrow}(A) = x$, da cui segue che $x \in \{ \bigwedge s^{\rightarrow}(A) | s \in S(\Phi)\}$.

Viceversa, se $x \in \{\bigwedge s^{\rightarrow}(A) | s \in S(\Phi)\}$, allora esiste un'applicazione $s_1 : A \to L$ tale che $s_1 \in S(\Phi)$ ed $x = \bigwedge s_1^{\rightarrow}(A)$; pertanto, per ogni $a \in A$ : $x \leq s_1(a) \in \Phi_a$ quindi $x \in \Phi_a$, ovvero $x \in \bigcap \Phi$.

□

Proposizione 5.3.4 (G. N. Raney [**11**], 1952): *Se* $(L, \leq)$ *è un reticolo completo, allora sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

(i) $L$ *è completamente distributivo.*
(ii) $\exists X \in |\mathbf{Set}|$*, tale che* $L$ *è immagine tramite un morfismo di reticoli completi di un sottoreticolo completo di* $2^X$.

Dimostrazione. "$(i) \Rightarrow (ii)$" Dal Lemma 5.3.2 segue che $R(L)$ è un sottoreticolo completo di $2^L$ e quindi $R(L)$ è un reticolo completo completamente distributivo.

Sia

$$f : R(L) \to L$$

l'applicazione, chiaramente suriettiva, che ad ogni $M \in R(L)$ associa

$$f(M) = \bigvee M.$$

$f$ è un morfismo di reticoli completi: infatti se $\Phi \subseteq R(L)$ e $\Phi = \{\Phi_a | a \in A\}$, risulta

$$\begin{aligned} f\left(\bigvee \Phi\right) &= \bigvee \left(\bigcup \{\Phi_a | a \in A\}\right) \\ &= \bigvee \left(\left\{\bigvee \Phi_a | a \in A\right\}\right) \\ &= \bigvee (\{f(\Phi_a) | a \in A\}) \\ &= \bigvee f^{\rightarrow}(\Phi) \end{aligned}$$

quindi $f$ conserva $\bigvee$. Inoltre, grazie al Lemma 5.3.3 e alla completa distributività di $L$ si ha

$$\begin{aligned} f\left(\bigwedge \Phi\right) &= \bigvee\left(\bigcap \Phi\right) \\ &= \bigvee\left\{\bigwedge s^{\rightarrow}(A) | s \in S(\Phi)\right\} \\ &= \bigvee_{s \in \prod_{a\in A} \Phi_a} \bigwedge_{a \in A} s(a) \\ &= \bigwedge\left\{\bigvee \Phi_a | a \in A\right\} \\ &= \bigwedge \{f(\Phi_a) | a \in A\} \\ &= \bigwedge f^{\rightarrow}(\Phi) \end{aligned}$$

e quindi $f$ è un morfismo di reticoli completi.

"$(ii) \Rightarrow (i)$" Segue dal Lemma 5.3.1. □

E' implicito nella proposizione precedente che la classe dei sottoreticoli completi di $\mathcal{2}^X$, al variare di $X \in |\mathbf{Set}|$, non rappresenta tutti i reticoli completamente distributivi; tuttavia rappresenta tutti e soli quelli che verificano una ulteriore proprietà, come mostra il seguente teorema. Per la dimostrazione di tale teorema è utile osservare che se un elemento $x$ di un reticolo completo $X$ è sup di elementi coprimi, allora $x = \bigvee \{a \in X | a \text{ coprimo, } a \leq x\}$.

Teorema 5.3.5 (I Teorema di Rappresentazione di Raney). *Se $(L, \leq)$ è un reticolo completo allora $\exists X \in |\mathbf{Set}|$ tale che $(L, \leq)$ è isomorfo ad un sottoreticolo completo di $\mathcal{2}^X$ se e solo se ogni elemento di $(L, \leq)$ è il* sup *di un insieme di elementi completamente coprimi.*

Dimostrazione. Sia $X \in |\mathbf{Set}|$. Se $R$ è un sottoreticolo completo di $\mathcal{2}^X$, sia $A_p = \bigcap \{B \subseteq R | p \in B\}$, $\forall p \in X$; allora $A_p$ è completamente coprimo infatti se $(F_i)_{i\in I} \subseteq R$, tale che $A_p \subseteq \bigcup_{i\in I} F_i$ allora $p \in \bigcup_{i\in I} F_i$ e quindi esiste $\bar{i} \in I$ tale che $p \in F_{\bar{i}}$ pertanto $F_{\bar{i}} \in \{B \subseteq R | p \in B\}$ da cui segue che $A_p \subseteq F_{\bar{i}}$.

Sia, ora, $P \subseteq X$, $P \in R$. Chiaramente, $A_p \subseteq P$, $\forall p \in P$ e quindi $P = \bigcup \{A_p | p \in P\}$; dall'arbitrarietà di $P \in R$ segue la tesi.

Viceversa, se $X$ è l'insieme degli elementi di $L$ completamente coprimi, sia

$$f : L \to \mathcal{P}(X)$$

l'applicazione definita $\forall a \in L$ da

$$f(a) = \{x \in X | x \leq a\}.$$

Per ottenere la tesi basta verificare che $f$ è un morfismo di reticoli completi iniettivo. Siano $a, b \in L$, tali che $a \neq b$; se $a \not\leq b$, allora esiste

$x_0 \in X$ tale che $x_0 \leq a$ e $x_0 \nleq b$. Pertanto $x_0 \in f(a)$ e $x_0 \notin f(b)$ e quindi $f(a) \neq f(b)$, ovvero $f$ è iniettiva.

Sia $S \subseteq L$. Se $x \in f\left(\bigvee S\right)$, allora $x \leq \bigvee S$; essendo $x$ completamente coprimo esiste $s \in S$ tale che $x \leq s$ e quindi $x \in \bigcup f^{\rightarrow}(S)$. Viceversa, se $x \in \bigcup f^{\rightarrow}(S) = \bigcup \{f(a) | a \in S\}$ allora esiste $a \in S$ tale che $x \in f(a) = \{y \in X | y \leq a\}$ quindi $x \leq a \leq \bigvee S$, ovvero $x \in f\left(\bigvee S\right)$. Pertanto per doppia inclusione si ha che $f\left(\bigvee S\right) = \bigcup f^{\rightarrow}(S)$, ovvero $f$ conserva $\bigvee$.

Sia, ora, $x \in f\left(\bigwedge S\right) = \{x \in X | x \leq \bigwedge S\}$, allora $x \leq a$, $\forall a \in S$, da cui segue che $x \in f(a)$, $\forall a \in S$, ovvero $x \in \bigcap f^{\rightarrow}(S)$. Viceversa, se $x \in \bigcap f^{\rightarrow}(S)$ allora $x \leq s$, $\forall s \in S$, quindi $x \leq \bigwedge S$, ovvero $x \in f\left(\bigwedge S\right)$. Pertanto per doppia inclusione segue che $f\left(\bigwedge S\right) = \bigcap f^{\rightarrow}(S)$, ovvero $f$ conserva $\bigwedge$.

$\square$

ESEMPIO 5.3.6. Nel reticolo completamente distributivo, $([0,1], \leq)$ non esiste alcun elemento completamente coprimo. Infatti ogni $x \in (0,1]$ è sup dell'insieme $\{y \in [0,1] | y \leq x,\ y \neq x\}$ senza essere minore o uguale di alcun elemento di tale insieme. Dal Teorema 5.3.5 segue che $([0,1], \leq)$ non è isomorfo ad alcun sottoreticolo completo di $\mathit{2}^X$, con $X \in |\mathbf{Set}|$.

LEMMA 5.3.7. *Se $L$ è un reticolo completo, posto*

$$K(x) = \bigcap \{M | M \in R(L) : x \leq \bigvee M\}, \quad \forall x \in L,$$

*allora valgono le seguenti proprietà:*

(1) $\forall x \in L$: $\bigvee K(x) \leq x$.
(2) $\forall x, y \in L$ *con* $x \leq y$ : $K(x) \subseteq K(y)$.
(3) $\forall A \subseteq L$ : $\bigcup \{K(a) | a \in A\} = K\left(\bigvee A\right)$.

DIMOSTRAZIONE. (1) Sia $x \in L$. L'insieme $\downarrow x \in R(L)$, allora $K(x) \subseteq \downarrow x$ da cui segue che $\bigvee K(x) \leq \bigvee(\downarrow x) = x$.

(2) Se $x, y \in L$ e $x \leq y$, allora

$$\{M | M \in R(L) : y \leq \bigvee M\} \subseteq \{M | M \in R(L) : x \leq \bigvee M\}$$

da cui segue che $K(x) \subseteq K(y)$.

(3) Sia $A \subseteq L$. Se $t \notin \bigcup \{K(a) | a \in A\}$, allora $\forall a \in A : t \notin K(a)$.

Scegliamo $\forall a \in A$, $M_a \in R(L)$ tale che $t \notin M_a$ e $a \leq \bigvee M_a$. Allora posto $M = \bigcup \{M_a | a \in A\}$ si ha $M \in R(L)$, $\bigvee A \leq \bigvee M$ e $t \notin M$. Quindi $t \notin K\left(\bigvee A\right)$.

Viceversa, se $t \in \bigcup \{K(a) | a \in A\}$, allora $t \in K(a)$, per qualche $a \in A$, e quindi, poiché $a \leq \bigvee A$, $t \in K\left(\bigvee A\right)$. Pertanto $\bigcup \{K(a) | a \in A\} = K\left(\bigvee A\right)$. $\square$

OSSERVAZIONE 5.3.8. Dal Lemma 5.3.7 segue che $\forall y \in K(x)$, con $x \in L$, si ha $y \leq x$, infatti

$$y \leq \bigvee K(x) \leq x.$$

Proposizione 5.3.9. *Se $L$ è un reticolo completo, allora*

$$L \text{ è completamente distributivo} \Leftrightarrow \bigvee K(x) = x,\ \forall x \in L.$$

Dimostrazione. "$\Rightarrow$" Se $x \in L$, allora essendo $L$ completamente distributivo ed applicando il Lemma 5.3.3 si ha, indicando con $\mathcal{M} = \{M \subseteq L | M \in R(L),\ x \leq \bigvee M\}$

$$\begin{aligned} x &\leq \bigwedge \left\{ \bigvee M | M \in \mathcal{M} \right\} \\ &= \bigvee \left\{ \bigwedge s^{\rightarrow}(\mathcal{M}) | s : \mathcal{M} \to L : s(M) \in M, \quad \forall M \in \mathcal{M} \right\} \\ &\leq \bigvee \bigcap \{ M | M \in R(L) : x \leq \bigvee M \} = \bigvee K(x). \end{aligned}$$

Inoltre, per il Lemma 5.3.7 (1) si ha che $\bigvee K(x) \leq x$, da cui per doppia disuguaglianza segue la tesi.

"$\Leftarrow$" Poiché per ipotesi $K(a) \in R(L)$ e $\bigvee K(a) = a$, $\forall a \in L$, allora la funzione

$$f : R(L) \to L,\ M \longmapsto \bigvee M$$

già definita nella dimostrazione della Proposizione 5.3.4 è suriettiva, e, come già visto, è un morfismo di reticoli completi. Pertanto, poiché per il Lemma 5.3.2, $R(L)$ è un sottoreticolo completo di $\mathbf{2}^L$, per la Proposizione 5.3.4 si ha che $L$ è un reticolo completamente distributivo. □

Se $L$ è un reticolo completo, consideriamo la relazione binaria $\rho$ definita da

$$x\rho y \ \Leftrightarrow\ x \in K(y), \quad \forall x, y \in L.$$

Allora $\rho \in \mathbf{Rel}(L, L)$.

Dall'Osservazione 5.3.8 segue, evidentemente, che $x\rho y \Rightarrow x \leq y$, $\forall x, y \in L$.

Proposizione 5.3.10. *Se $L$ è un reticolo completo completamente distributivo, allora $\rho \in \mathbf{Rel}(L, L)$ è idempotente e quindi è transitiva.*

Dimostrazione. Per la Proposizione 5.3.9 e per il Lemma 5.3.7 (3), $\forall x \in L$ si ha

$$K(x) = K\left(\bigvee K(x)\right) = \bigcup \{K(a) | a \in K(x)\}.$$

Poiché risulta

$$\begin{aligned} x\rho y \ &\Leftrightarrow\ x \in K(y) = \bigcup \{K(a) | a \in K(y)\} \\ &\Leftrightarrow \exists \overline{a} \in L : x \in K(\overline{a}) \text{ e } \overline{a} \in K(y) \\ &\Leftrightarrow \exists \overline{a} \in L : x\rho\overline{a} \text{ e } \overline{a}\rho y \\ &\Leftrightarrow x(\rho \circ \rho)y \end{aligned}$$

allora risulta $\rho = \rho \circ \rho$, ovvero $\rho$ è idempotente.

Inoltre, da $x\rho y$ e $y\rho z$ segue $x(\rho \circ \rho)z$ da cui $x\rho z$. □

Una catena che sia un reticolo completo si dirà *catena completa.*

TEOREMA 5.3.11 (II Teorema di Rappresentazione di Raney). *Se $L$ è un reticolo completo allora sono equivalenti le seguenti affermazioni*

(i) *$L$ è completamente distributivo.*
(ii) *$L$ è isomorfo ad un sottoreticolo completo del prodotto di una famiglia di catene complete.*

DIMOSTRAZIONE. "$(i) \Rightarrow (ii)$" Sia $L$ un reticolo completo, completamente distributivo. Indichiamo con $\Gamma$ la famiglia delle catene massimali rispetto a $\rho$. Notiamo che ogni catena si estende ad almeno una catena massimale, per il Lemma di Zorn. Se $C \in \Gamma$ e $a \in L$, poniamo

$$f(C,a) = \{t \in C | \exists x \in C : t\rho x \text{ e } x\rho a\}$$

e

$$F_C = \{f(C,a) | a \in L\}.$$

Proviamo che $\forall a \in L$, $\bigcup\{f(C,a)|C \in \Gamma\} = K(a)$: infatti, se $t \in K(a)$, cioè $t\rho a$, allora, poiché per 5.3.10 $\rho$ è idempotente, esiste $x \in L$ tale che $t\rho x$ e $x\rho a$ quindi $\{t,x,a\}$ è una catena . Se $C \supseteq \{t,x,a\}$ è una catena massimale, allora, ovviamente, $t \in f(C,a) \subseteq \bigcup\{f(C,a)|C \in \Gamma\}$.

Viceversa, se $t \in f(C,a)$ per qualche $C \in \Gamma$, allora $\exists x \in C$, tale che $t \in K(x)$ e $x \in K(a)$ quindi $x \leq a$ e $t \in K(x) \subseteq K(a)$.

Se, ora, $a, b \in L$ e $f(C,a) \nsubseteq f(C,b)$ allora esiste $t \in f(C,a)$ tale che $t \notin f(C,b)$. Pertanto $\exists x \in C$ tale che $t\rho x$ e $x\rho a$ ma $\forall y \in C : \neg(t\rho y)$ o $\neg(y\rho b)$. Considerato un qualsiasi $s \in f(C,b)$ esiste allora $y \in C$ tale che $s\rho y$ e $y\rho b$ deve essere quindi $\neg(t\rho y)$. Poiché $C$ è una catena si ha allora $s\rho y$, $y\rho t$, $t\rho x$, $x\rho a$ da cui, per la transitività di $\rho$ segue $s\rho y$ e $y\rho a$, cioè $s \in f(C,a)$.

Quindi $f(C,b) \subseteq f(C,a)$. Così per ogni $C \in \Gamma$, $F_C$ è una catena rispetto alla relazione di inclusione in $\mathit{2}^C$.

Inoltre, se $C \in \Gamma$ ed $A \subseteq L$, allora $\bigcup\{f(C,a)|a \in A\} = f(C, \bigvee A)$: infatti,

$$t \in f(C, \bigvee A) \;\Leftrightarrow\; t \in C \text{ ed } \exists x \in C \;:\; t\rho x \text{ e } x\rho \bigvee A$$

e dal Lemma 5.3.7 (3) segue che

$$x\rho \bigvee A \;\Leftrightarrow\; \exists a \in A \;:\; x\rho a.$$

Quindi $t \in f(C, \bigvee A) \Leftrightarrow \exists a \in A : t \in f(C,a)$. Pertanto $F_C$ è chiuso rispetto all'unione per ogni $C \in \Gamma$. Segue che, $\forall C \in \Gamma$, $F_C$ è una catena completa in cui se $F \subseteq F_C$, $\bigvee F = \bigcup F$ ma l'inf non è l'intersezione, infatti, $\bigwedge F = \bigcup\{f(C,b)|b \in L,\; f(C,b) \subseteq \bigcap F\}$ è il più grande elemento di $F_C$ contenuto in tutti gli elementi di $F$.

Inoltre osserviamo che se $C \in \Gamma$ ed $A \subseteq L$, allora $\bigwedge\{f(C,a)|a \in A\} = f(C, \bigwedge A)$. Infatti, se $t \in \bigwedge\{f(C,a)|a \in A\}$, allora esiste $b \in L$ tale che $t \in f(C,b)$ ed $f(C,b) \subseteq \bigcap\{f(C,a)|a \in A\}$. Quindi $t \in C$ ed esiste

$s \in C$ tale che $t\rho s$ ed $s\rho b$. Poiché $\rho$ è idempotente e poiché $C$ è una catena massimale rispetto a $\rho$, esistono $u, y \in C$ tale che $t\rho u$, $u\rho y$, $y\rho s$ ed $s\rho b$. Pertanto $y \in f(C, b)$ e $\forall a \in A$ si ha che $y \in f(C, a)$, quindi $y \leq a$, $\forall a \in A$, da cui segue che $y \leq \bigwedge A$. Dal Lemma 5.3.7 (2) si ha che $t\rho u$ $u\rho \bigwedge A$ ovvero che $t \in f(C, \bigwedge A)$ e quindi $\bigwedge \{f(C, a) | a \in A\} \subseteq f(C, \bigwedge A)$.

Viceversa, dal Lemma 5.3.7 (2) segue che $\forall a \leq a'$ si ha $f(C, a) \subseteq f(C, a')$ quindi $f(C, \bigwedge A) \subseteq \bigcap \{f(C, a) | a \in A\}$ da cui si ha $f(C, \bigwedge A) \subseteq \bigwedge \{f(C, a) | a \in A\}$.

Sia $D$ il prodotto della famiglia $\{F_C | C \in \Gamma\}$, cioè

$$D = \{\theta : \Gamma \to \bigcup \{F_C | C \in \Gamma\} | \quad \forall C \in \Gamma : \theta(C) \in F_C\}.$$

$D$ è un reticolo completo in cui se $D_1 \subseteq D$, allora $\forall C \in \Gamma$

$$(\bigvee D_1)(C) = \bigvee \{\theta(C) | \theta \in D_1\}, \ (\bigwedge D_1)(C) = \bigwedge \{\theta(C) | \theta \in D_1\}.$$

Inoltre, poiché ognuna delle catene complete $F_C$ è completamente distributiva anche il prodotto lo è, per la Proposizione 3.4.9.

Indichiamo con $\theta_a$, $\forall a \in L$, tutte le funzioni di $D$ tali che $\theta_a(C) = f(C, a)$. Poniamo $L^* = \{\theta_a | a \in L\}$ e sia

$$\phi : L \to L^*, \ a \longmapsto \theta_a.$$

Si verifica facilmente che $L^*$ è un sottoreticolo completo di $D$. Inoltre, $\phi$ è chiaramente suriettiva ed è anche iniettiva: infatti se $\theta_a = \theta_b$, allora $\forall C \in \Gamma$ si ha $f(C, a) = f(C, b)$, quindi

$$\begin{aligned} a &= \bigvee K(a) \\ &= \bigvee \left(\bigcup \{f(C, a) | C \in \Gamma\}\right) \\ &= \bigvee \left(\bigcup \{f(C, b) | C \in \Gamma\}\right) \\ &= \bigvee K(b) = b. \end{aligned}$$

Se $A \subseteq L$, allora $\bigvee \phi^{\rightarrow}(A) = \bigvee \{\theta_a | a \in A\} = \theta_{\bigvee A} = \phi(\bigvee A)$: infatti, se $C \in \Gamma$ allora

$$\begin{aligned} \left(\bigvee \{\theta_a | a \in A\}\right)(C) &= \bigvee \{\theta_a(C) | a \in A\} \\ &= \bigvee \{f(C, a) | a \in A\} \\ &= \bigcup \{f(C, a) | a \in A\} \\ &= f(C, \bigvee A) \\ &= \theta_{\bigvee A}(C). \end{aligned}$$

Ciò basta per dire che $\phi$ è un isomorfismo di reticoli completi da $L$ in $L^*$, per il Corollario 3.3.9.

"$(ii) \Rightarrow (i)$" Dalla Proposizione 3.4.7 segue che ogni catena completa è un reticolo completamente distributivo. Il prodotto di una famiglia di reticoli completamente distributivi è completamente distributivo. Inoltre, per la Proposizione 3.4.8 si ha che $L$, in quanto sottoreticolo completo di un reticolo completamente distributivo è anch'esso completamente distributivo. □

Il seguente risultato riconduce il precedente teorema ad una situazione particolare, quella cioè in cui tutte le catene complete di cui si fa il prodotto sono isomorfe all'intervallo unitario $[0,1]$.

PROPOSIZIONE 5.3.12. *Se $(L, \leq)$ è un reticolo completo allora sono equivalenti le seguenti affermazioni*

($i$) *$L$ è un reticolo completamente distributivo.*
($ii$) *Esiste $X \in |\mathbf{Set}|$, tale che $L$ è isomorfo ad un sottoreticolo completo di $I^X$, dove $I = [0,1]$.*

DIMOSTRAZIONE. Si veda [**5**] Esercizio 2.30. □

Da tale proposizione si evince quindi come l'insieme dei sottoreticoli completi di $I^X$, $\forall X \in |\mathbf{Set}|$, rappresenta l'intera classe dei reticoli completi completamente distributivi.

## 5.4. Elementi Generatori nei Locali Spaziali

L'equivalenza tra le categorie **Sob** e **SpatLoc** descritta nel paragrafo 4.5 comporta, oltre alle conseguenze già considerate in precedenza, il seguente risultato.

PROPOSIZIONE 5.4.1. *Ogni frame spaziale è isomorfo alla topologia di qualche spazio (sobrio). Dualmente ogni coframe spaziale è isomorfo al coframe dei chiusi di qualche spazio (sobrio).*

DIMOSTRAZIONE. Le equivalenze $\tau$ e $pt$ portano chiaramente un locale spaziale $S$ in $pt(S)$ che è sobrio ed al quale si associa

$$\tau \circ pt(S) \cong i_{\mathbf{SpatLoc}}(S) = S.$$

Dualmente, per ogni coframe $L$ gli isomorfismi

$$L \cong (L^{op})^{op} \cong \big(\tau \circ pt(L^{op})\big)^{op} \cong \neg\big(\tau \circ pt(L^{op})\big)$$

dove $\neg : \mathcal{P}\big(pt(L^{op})\big) \to \mathcal{P}\big(pt(L^{op})\big)$ è la usuale complementazione. □

PROPOSIZIONE 5.4.2. *Se $\big(X, \tau(X)\big)$ è uno spazio topologico, ogni chiuso* è sup *di chiusi coprimi.*

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo già osservato che la chiusura di un punto è un elemento coprimo del coframe dei chiusi. Se $C$ è un qualsiasi chiuso si ha

$$C = \bigcup_{x \in C} \{x\}$$

da cui

$$C \subseteq \bigcup_{x \in C} cl(x).$$

Ma da $x \in C$ segue $cl(x) \subseteq cl(C) = C$, quindi

$$C = \bigcup_{x \in C} cl(x)$$

e poiché $C$ è chiuso si ha

$$C = cl\left(\bigcup_{x \in C} cl(x)\right) = \bigvee_{x \in C} cl(x).$$

□

Da questi risultati segue che i coframe spaziali sono generati tramite $\bigvee$ dai loro elementi coprimi. Un risultato duale vale per i frame spaziali. Più precisamente si ha quanto segue.

COROLLARIO 5.4.3. *Siano $S$ un frame spaziale e $T$ un coframe spaziale. Allora $\forall x \in S$ e $\forall y \in T$ si ha*

$$x = \bigwedge \{a \in S | a \textit{ primo}, \ x \leq a\}$$

$$y = \bigvee \{b \in T | b \textit{ coprimo}, \ b \leq y\}.$$

DIMOSTRAZIONE. Segue facilmente dalle proposizioni 5.4.1 e 5.4.2. □

OSSERVAZIONE 5.4.4. Dal precedente corollario segue che condizione necessaria perchè un frame spaziale abbia una involuzione che inverte l'ordine è che ogni suo elemento si possa ottenere come sup di elementi coprimi.

PROPOSIZIONE 5.4.5. *Ogni catena completa $(C, \leq)$ è un frame spaziale.*

DIMOSTRAZIONE. Dalla Proposizione 3.4.7 segue che $(C, \leq)$ è un frame. Verifichiamo che $(C, \leq)$ è spaziale: siano $a, a' \in C$ tali che $a \not\leq a'$. Sia

$$p : C \to \{\perp, \top\}$$

una funzione definita $\forall t \in C$ da

$$p(t) = \perp \text{ se } t \leq a' \text{ e } p(t) = \top \text{ se } a' \leq t, \ a' \neq t.$$

$p$ è un morfismo di frame: infatti, se $x, y \in C$

$$\begin{aligned} p(x \wedge y) = \perp \Leftrightarrow\ & x \wedge y \leq a' \\ \Leftrightarrow\ & x \leq a' \text{ o } y \leq a' \\ \Leftrightarrow\ & p(x) = \perp \text{ o } p(y) = \perp \\ \Leftrightarrow\ & p(x) \wedge p(y) = \perp. \end{aligned}$$

Se $S \subseteq C$

$$\begin{aligned} p\left(\bigvee S\right) = \perp \Leftrightarrow\ & \bigvee S \leq a' \\ \Leftrightarrow\ & s \leq a', \quad \forall s \in S \\ \Leftrightarrow\ & p(s) = \perp, \quad \forall s \in S \\ \Leftrightarrow\ & \bigvee \{p(s) | s \in S\} = \perp. \end{aligned}$$

Inoltre, ovviamente, $p(a) = \top$ e $p(a') = \perp$. Da ciò segue la tesi. □

PROPOSIZIONE 5.4.6. *Per ogni insieme non vuoto $X$ e per ogni frame spaziale $L$ si ha che $L^X$ è un frame spaziale.*

DIMOSTRAZIONE. Come caso particolare della Proposizione 3.4.9 si verifica che $L^X$ è un frame. Per provare che è spaziale consideriamo $f, g \in L^X$ con $f \not\leq g$. Sia $x' \in X$ tale che $f(x') \not\leq g(x')$ e consideriamo un morfismo di frame

$$p : L \to \mathbf{2}$$

tale che $p\big(f(x')\big) = \top$ e $p\big(g(x')\big) = \perp$ e poniamo

$$\bar{p} : L^X \to \mathbf{2}, \quad h \mapsto \bar{p}(h) = p\big(h(x')\big).$$

Allora si ha

$$\begin{aligned} \bar{p}(h \wedge h') &= p\big(h(x') \wedge h'(x')\big) \\ &= p\big(h(x')\big) \wedge p\big(h'(x')\big) \\ &= \bar{p}(h) \wedge \bar{p}(h') \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \bar{p}\left(\bigvee_{j \in J} h_j\right) &= p\left(\bigvee \{h_j(x') | j \in J\}\right) \\ &= \bigvee \{p(h_j(x')) | j \in J\} \\ &= \bigvee \{\bar{p}(h_j) | j \in J\}. \end{aligned}$$

Quindi $\bar{p}$ è un morfismo di frame e chiaramente $\bar{p}(f) = \top$, $\bar{p}(g) = \perp$. □

PROPOSIZIONE 5.4.7. *Se $(L, \leq)$ è un sottoreticolo completo di un frame spaziale $(X, \leq)$, allora $(L, \leq)$ è un frame spaziale.*

DIMOSTRAZIONE. Poiché $(L, \leq)$ è un sottoreticolo completo di $(X, \leq)$, allora $\inf_X A \in L$ e $\sup_X A \in L$, $\forall A \subseteq L$. Pertanto, $\forall A \subseteq L$ esiste $\inf_L A = \inf_X A$ ed esiste $\sup_L A = \sup_X A$, ovvero $(L, \leq)$ è un reticolo completo ed inoltre, poiché $(X, \leq)$ è un frame, allora anche $(L, \leq)$ è un frame.

Siano, ora, $a, a' \in L$, tali che $a \not\leq a'$. Poiché $(X, \leq)$ è spaziale, esiste

$$p : X \to \{\bot, \top\}$$

morfismo di frame tale che

$$p(a) = \top \text{ e } p(a') = \bot$$

allora esiste

$$\overline{p} = p_{|L} : L \to \{\bot, \top\}$$

morfismo di frame tale che

$$\overline{p}(a) = p(a) = \top \text{ e } \overline{p}(a') = p(a') = \bot,$$

ovvero $(L, \leq)$ è un frame spaziale. □

Dalla Proposizione 5.3.12, considerando anche le proposizioni 5.4.5, 5.4.6 e 5.4.7 segue che ogni reticolo completo completamente distributivo è un frame spaziale e, poiché in un reticolo completamente distributivo valgono entrambe le leggi di distributività infinita, è anche un coframe spaziale. Pertanto segue la seguente proprietà.

PROPOSIZIONE 5.4.8. *Se $(L, \leq)$ è un reticolo completo completamente distributivo, allora ogni $a \in X$ si può esprimere come* sup *di elementi coprimi e si può anche esprimere come* inf *di elementi primi.*

□

### 5.5. Famiglie Fini e Grossolane nei Reticoli Completi

DEFINIZIONE 5.5.1. *Se $(L, \leq)$ è un reticolo completo, $a \in L$ e $B \subseteq L$, allora $B$ si dice **famiglia fine** di $a$ in $L$ se $B \neq \emptyset$ e risulta*

(1) $\bigvee B = a$.
(2) $A \subseteq L,\ a \leq \bigvee A \Rightarrow \forall x \in B\ \exists y \in A : x \leq y$.

PROPOSIZIONE 5.5.2. *Se $L$ è un reticolo completo ed $a \in L$, allora l'unione di famiglie fini di $a$ è ancora una famiglia fine di $a$.*

DIMOSTRAZIONE. Banale. □

L'unione di tutte le famiglie fini di $a$, se esiste, si indica con $\beta(a)$ ed è ovviamente la più grande famiglia fine di $a$ in $L$.

ESEMPIO 5.5.3. (a) In $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$, con $X \in |\mathbf{Set}|$, $\forall E \in \mathcal{P}(X)$, $E \neq \emptyset$, $\beta(E) = \{\{e\}|e \in E\} \cup \{\emptyset\}$ e $\beta(\emptyset) = \{\emptyset\}$.

(b) In $(I, \leq)$, $\forall a \in (0,1]$, $\beta(a) = [0,a)$ e $\beta(0) = \{0\}$. Ogni successione $\{a_n|n \in \mathbb{N}\} \subseteq [0,a)$ crescente costituisce una famiglia fine di $a$ in $I$.

(c) In $(I^X, \leq)$, $X \in |\mathbf{Set}|$, $\forall h \in I^X$: $\beta(h) = \{f \in I^X | f \leq h, |supp(f)| \leq 1\}$ è la famiglia fine massimale di $h$.

OSSERVAZIONE 5.5.4. Se $B$ è una famiglia fine di $a$ e $B' = \bigcup\{\downarrow b|b \in B\}$ allora $B'$ è una famiglia fine di $a$. Ne segue che la più grande famiglia fine di un qualsiasi elemento di $L$ è un lower set.

PROPOSIZIONE 5.5.5. *Se $L$ è un reticolo completo, $x \in L$ e $K(x) = \bigcap\{M|M \in R(L) : x \leq \bigvee M\}$, allora $\forall x \in L$ :*

$$K(x) \text{ è una famiglia fine di } x \text{ in } L \Leftrightarrow \bigvee K(x) = x.$$

DIMOSTRAZIONE. "$\Rightarrow$" E' ovvio, perchè se $K(x)$ è una famiglia fine deve soddisfare 5.5.1 (1)

"$\Leftarrow$" Per ipotesi $K(x)$ verifica la proprietà 5.5.1 (1). Sia, ora, $A \subseteq L$, tale che $x \leq \bigvee A$. Allora per il Lemma 5.3.7 (2) si ha $K(x) \subseteq K(\bigvee A)$. Pertanto se $k \in K(x)$ allora per il Lemma 5.3.7 (3), $k \in K(\bigvee A) = \bigcup\{K(a)|a \in A\}$, allora esiste $\overline{a} \in A$ tale che $k \in K(\overline{a})$ e per l'osservazione 5.3.8 risulta $k \leq \overline{a}$.

Quindi $\forall k \in K(x)$ $\exists \overline{a} \in A$ tale che $k \leq \overline{a}$, ovvero $K(x)$ è una famiglia fine di $x$. □

PROPOSIZIONE 5.5.6. *Siano $L$ un reticolo completo ed $x \in L$. $\bigvee K(x) = x$ se e solo se $K(x)$ è la più grande famiglia fine di $x$, cioè $\beta(x) = K(x)$.*

DIMOSTRAZIONE. La condizione è necessaria, infatti sia $x \in L$. Per la Proposizione 5.5.5 $K(x)$ è una famiglia fine di $x$, quindi $K(x) \subseteq \beta(x)$. Supponiamo per assurdo che esista $A \subseteq L$ una famiglia fine di $x$ tale che $A \nsubseteq K(x)$; allora $\exists \overline{a} \in A \setminus K(x)$ e poiché $K(x)$ è un lower set risulta $\overline{a} \nleq k$, $\forall k \in K(x)$. Pertanto $K(x) \subseteq L$, $\bigvee K(x) = x$, ma preso $\overline{a} \in A$, non esiste alcun $k \in K(x)$ per cui $\overline{a} \leq k$, ovvero non è verificata per $A$ la proprietà (2) di 5.5.1, e quindi $A$ non è una famiglia fine di $X$, che è un assurdo. Pertanto $A \subseteq K(x)$, $\forall A \subseteq \beta(x)$, ovvero $\beta(x) = K(x)$.

La sufficienza segue banalmente da 5.5.5. □

TEOREMA 5.5.7. *Se $(L, \leq)$ è un reticolo completo, allora*

$$L \text{ è completamente distributivo} \Leftrightarrow \forall x \in L\ \exists \beta(x).$$

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione é conseguenza delle proposizioni 5.5.2, 5.5.5, 5.5.6 e 5.3.9. □

COROLLARIO 5.5.8. *Se $(L, \leq)$ è un reticolo completo, allora*

$$L \text{ è completamente distributivo} \Leftrightarrow K(x) \text{ è una famiglia fine, } \forall x \in L.$$

DIMOSTRAZIONE. Segue da 5.3.9 e 5.5.6. □

DEFINIZIONE 5.5.9. *Se* $(L, \leq)$ *è un reticolo completo,* $a \in L$ *e* $B \subseteq L$*, allora* $B$ *si dice* ***famiglia fine standard*** *di* $a$ *se* $B$ *è una famiglia fine di* $a$ *e* $b$ *è coprimo,* $\forall b \in B$.

OSSERVAZIONE 5.5.10. Siano $(L, \leq)$ un reticolo completo completamente distributivo ed $a \in L$ tale che $\exists \beta(a)$. Se $\forall x \in \beta(a)$ poniamo $[x] = \{y \in L | y \text{ coprimo e } y \leq x\}$ dalla Proposizione 5.4.8 segue che $x = \bigvee[x]$ e ciò consente di verificare che

$$\beta^*(a) = \bigcup \{[x] | x \in \beta(a)\}$$

è una famiglia fine standard di $a$.

Dalla Osservazione 5.5.4 segue chiaramente che se indichiamo con $M(L)$ l'insieme degli elementi coprimi di $L$ allora

$$\beta^*(a) = \beta(a) \cap M(L).$$

TEOREMA 5.5.11. *Se* $(L, \leq)$ *è un reticolo completo, allora*

$L$ *è completamente distributivo* $\Leftrightarrow \forall a \in L\ \exists A \subseteq L$, $A$ *famiglia fine standard di* $a$.

DIMOSTRAZIONE. Segue dal Teorema 5.5.7 e dalla Definizione 5.5.9. □

ESEMPIO 5.5.12. (a) $\forall A \in \mathcal{P}(X)$, con $X \in |\mathbf{Set}|$, si ha

$$\beta^*(A) = \{\{x\} | x \in A\}$$

infatti $M(L) = \{\{x\} | x \in X\}$.

(b) E' facile vedere che, per $I = [0, 1]$, $M(I) = \{a \in I | a \neq 0\}$ e $M(I^X) = \{f : X \to I || supp(f)| = 1\}$. Quindi tenendo conto anche degli esempi (b) e (c) di 5.5.3 si ha

$$\beta^*(a) = (0, a)\ , \quad \forall a \in I$$

$$\beta^*(h) = \{f \in I^X | f \leq h, |supp(f)| = 1\}, \quad \forall h \in I^X.$$

DEFINIZIONE 5.5.13. *Se* $(L, \leq)$ *è un reticolo completo,* $a \in L$ *e* $A \subseteq L$*, allora* $A$ *si dice* ***famiglia grossolana*** *di* $a$ *in* $L$ *se* $A \neq \emptyset$ *e risulta*

(1) $\bigwedge A = a$.
(2) $B \subseteq L$, $\bigwedge B \leq a \Rightarrow \forall x \in A\ \exists y \in B : y \leq x$.

PROPOSIZIONE 5.5.14. *Se* $L$ *è un reticolo completo ed* $a \in L$*, allora l'unione di famiglie grossolane di* $a$ *è ancora una famiglia grossolana di* $a$.

DIMOSTRAZIONE. Banale. □

L'unione di tutte le famiglie grossolane di $a$, se esiste, si indica con $\alpha(a)$.

Esempio 5.5.15. (a) In $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$, con $X \in |\mathbf{Set}|, \forall E \in \mathcal{P}(X)$, $E \neq X$, $\alpha(E) = \big\{X \setminus \{e\} | e \notin E\big\} \cup \{X\}$ è la più grande famiglia grossolana di $E$ e $\alpha(X) = \{X\}$ è l'unica famiglia grossolana di $X$.

(b) In $(I, \leq)$, $\forall a \in (0,1]$, $\alpha(a) = (a,1]$ è la più grande famiglia grossolana di $a$ e $\alpha(1) = \{1\}$ è l'unica famiglia grossolana di 1.

(c) In $(I^X, \leq)$, con $X \in |\mathbf{Set}|$, $\forall h \in I^X$, $\alpha(h) = \big\{f \in I^X | h \leq f \leq 1$ e $|\{x \in X | f(x) \neq 1\}| \leq 1\big\}$ è la più grande famiglia grossolana di $h$.

Teorema 5.5.16. *Se $(L, \leq)$ è un reticolo completo allora*

*$L$ è un reticolo completamente distributivo $\Leftrightarrow$ $\forall a \in L$ $\exists A \subseteq L$ famiglia grossolana di $a$.*

Dimostrazione. "$\Rightarrow$" Siano $L$ un reticolo completamente distributivo ed $a \in L$.

Posto

$$\mathcal{A} = \big\{A \subseteq L | \bigwedge A \leq a\big\}$$

poiché $\big\{a\big\} \in \mathcal{A}$ allora risulta $\mathcal{A} \neq \emptyset$.

Consideriamo $\mathcal{A}$ come una famiglia di sottoinsiemi di $L$

$$\mathcal{A} = \big\{A_i | i \in H\big\} \text{ e } A_i = \big\{a_{ij} | j \in J_i\big\}, \quad \forall i \in H.$$

Allora

$$A = \left\{ \bigvee_{i \in H} a_{if(i)} | f \in \prod_{i \in H} J_i \right\}$$

è una famiglia grossolana di $a$: infatti dalla definizione di $A_i$ e per la completa distributività segue che

$$\begin{aligned}
\bigwedge A &= \bigwedge_{f \in \prod J_i} \left( \bigvee_{i \in H} a_{if(i)} \right) \\
&= \bigvee_{i \in H} a_{if(i)} \left( \bigwedge_{j \in J_i} a_{ij} \right) \\
&= \bigvee_{i \in H} \bigwedge A_i \\
&= a.
\end{aligned}$$

Inoltre, se $B \subseteq L$ è tale che $\bigwedge B \leq a$, allora per definizione di $\mathcal{A}$, $\exists i_0 \in H$ tale che $B = A_{i_0}$. Ora, fissato $x \in A$, $\exists f \in \prod J_i$ tale che $x = \bigvee_{i \in H} a_{if(i)}$. Quindi, posto $y = a_{i_0 f(i_0)}$, risulta $y \in B$ e ovviamente $y \leq x$. Pertanto $\mathcal{A}$ è una famiglia grossolana di $a$.

"$\Leftarrow$" Per dimostrare che $L$ è un reticolo completamete distributivo proviamo la condizione (**CDII**), ovvero, posto $a = \bigvee_{i\in H}\left(\bigwedge_{j\in J_i} a_{ij}\right)$ si deve provare che

$$a = \bigwedge_{f\in\prod J_i}\left(\bigvee_{i\in H} a_{if(i)}\right).$$

$\forall i \in H$ e $\forall f \in \prod J_i$ risulta $\bigwedge_{j\in J_i} a_{ij} \leq a_{if(i)}$ e quindi $a \leq \bigvee_{i\in H} a_{if(i)}$, da cui segue che

$$a \leq \bigwedge_{f\in\prod J_i}\left(\bigvee_{i\in H} a_{if(i)}\right).$$

Consideriamo, ora, $\alpha(a)$, la più grande famiglia grossolana di $a$. $\forall i \in H$, sia $B_i = \{a_{ij} | j \in J_i\} \subseteq L$, allora $\bigwedge B_i = \bigwedge_{j\in J_i} a_i \leq a$.

Dalla definizione di famiglia grossolana segue che $\forall i \in H$ e $\forall x \in \alpha(a)$ $\exists j_i \in J_i : a_{ij_i} \leq x$. Considerata $f \in \prod_{i\in H} J_i$ definita $\forall i \in H$ da $f(i) = j_i$ allora $a_{if(i)} \leq x$, $\forall i \in H$.

Pertanto $\forall x \in \alpha(a)$ $\exists f \in \prod_{i\in H} J_i$ tale che $\bigvee_{i\in H} a_{if(i)} \leq x$ da cui segue che

$$\bigwedge_{f\in\prod_{i\in I} J_i}\left(\bigvee_{i\in H} a_{if(i)}\right) \leq \bigwedge \alpha(a) = a.$$

$\square$

DEFINIZIONE 5.5.17. *Sia $L$ un reticolo completo.*

*$A \subseteq L$ si dice* ***famiglia grossolana standard*** *di $a \in L$ se è una famiglia grossolana di $a$ formata da elementi primi.*

Osserviamo che se esiste $\alpha(a)$, famiglia grossolana massimale di $a$, allora la più grande famiglia grossolana standard è $\alpha^*(a) = \{x \in L | x \in \alpha(a), x \text{ primo}\}$.

COROLLARIO 5.5.18. *Se $L$ è un reticolo completo allora*

$$L \text{ completamente distributivo} \Leftrightarrow \forall a \in L\ \exists \alpha^*(a).$$