CAPITOLO 4

Topologia Senza Punti

4.1. Caratterizzazione dei Powerset

DEFINIZIONE 4.1.1. *Siano $(X,\leq)$ un reticolo ed $a\in X$.*
a si dice un ***atomo*** *(di $(X,\leq)$) se $a\neq\bot$ e se $\forall x\in X$*

$$\bot\neq x\leq a \;\Rightarrow\; x=a.$$

a si dice un ***antiatomo*** *(di $(X,\leq)$) se $a\neq\top$ e se $\forall x\in X$*

$$a\leq x\neq\top \;\Rightarrow\; x=a.$$

DEFINIZIONE 4.1.2. *Un reticolo $(X,\leq)$ si dice* ***atomico*** *se $\forall x\in X$, $x\neq\bot$, esiste $a\in X$, a atomo tale che $a\leq x$.*

DEFINIZIONE 4.1.3. *Siano $(X,\leq)$ un reticolo e $k\in X$.*
k si dice ***$\vee$-irriducibile*** *(o* ***coprimo*** *o* ***molecola****) (in $(X,\leq)$) se $k\neq\bot$ e*

$$k\leq x\vee y,\ con\ x,y\in X\ e\ k\nleq x \;\Rightarrow\; k\leq y.$$

k si dice ***completamente $\vee$-irriducibile*** *(o* ***completamente coprimo****) (in $(X,\leq)$) se $\forall K\subseteq\mathcal{P}(X)$ tale che $k\leq\bigvee K$ esiste $y\in K$ per cui risulta $k\leq y$.*
h si dice ***$\wedge$-irriducibile*** *(o* ***primo****) (in $(X,\leq)$) se $h\neq\top$ e*

$$x\wedge y\leq h,\ con\ x,y\in X\ e\ x\nleq h\Rightarrow y\leq h.$$

h si dice ***completamente $\wedge$-irriducibile*** *(o* ***completamente primo****) (in $(X,\leq)$) se $\forall H\subseteq\mathcal{P}(X)$ tale che $\bigwedge H\leq h$ esiste $y\in H$ per cui risulta $y\leq h$.*

Ovviamente ogni elemento completamente coprimo (completamente primo, rispettivamente) è coprimo (primo, rispettivamente).

Inoltre la nozione di antiatomicità e quella di $\bigwedge$-irriducibilità di un elemento sono duali di quelle di atomicità e di $\bigvee$-irriducibilità di un elemento.

In particolare si ha quindi che un antiisomorfismo tra reticoli, eventualmente completi, cioè una bigezione che sia un isomorfismo dal primo reticolo all'opposto del secondo (ad esempio un'involuzione che inverte l'ordine in

X è un antiisomorfismo da X in se stesso), trasforma atomi in antiatomi, elementi $\bigvee$-irriducibili in elementi $\bigwedge$-irriducibili e viceversa.

PROPOSIZIONE 4.1.4. *Sia $(X, \leq)$ un reticolo distributivo e sia $k \in X$. Allora*

(1) *k coprimo $\Leftrightarrow k \neq \perp$ e $(k = x \vee y$, con $x, y \in X$ e $k \neq x \Rightarrow k = y)$.*
(2) *k primo $\Leftrightarrow k \neq \top$ e $(k = x \wedge y$, con $x, y \in X$ e $k \neq x \Rightarrow k = y)$.*

DIMOSTRAZIONE. (1) "$\Rightarrow$" Se k è elemento coprimo, allora $k \neq \perp$.
Sia $k = x \vee y$, con $x, y \in X$ e $k \neq x$; allora $x \leq k$ e $y \leq k$. Poiché è $k \not\leq x$ segue che $k \leq y$ e quindi $y = k$.

"$\Leftarrow$" Sia $k \neq \perp$ tale che $k \leq x \vee y$, con $x, y \in X$ e $k \not\leq x$. Poiché, per ipotesi, il reticolo X è distributivo si ha

$$k = k \wedge (x \vee y) = (k \wedge x) \vee (k \wedge y).$$

Da $k \not\leq x$ segue che $k \wedge x \neq k$, quindi per l'ipotesi, si ha che $k = k \wedge y$, ovvero che $k \leq y$.

(2) La dimostrazione si ottiene dualizzando quella del punto (1). □

PROPOSIZIONE 4.1.5. *Sia $(X, \leq)$ un frame (coframe, rispettivamente). Allora, $\forall k \in X$, si ha*

$$k \text{ completamente coprimo (completamente primo, rispettivamente)}$$
$$\Updownarrow$$
$$k \neq \perp \ (k \neq \top, \text{ rispettivamente})$$
$$e$$
$$k = \bigvee A \ (k = \bigwedge A, \text{ rispettivamente}), \text{ con } A \subseteq X \Rightarrow \exists x \in A : k = x.$$

DIMOSTRAZIONE. "$\Downarrow$" Sia $k \in X$, k completamente coprimo. Allora $k \neq \perp$ e $k = \bigvee A$, con $A \subseteq X$, $\Rightarrow a \leq k$, $\forall a \in A$, ed $\exists x \in A$ tale che $k \leq x$ $\Rightarrow \exists x \in A$ tale che $k = x$.

"$\Uparrow$" Sia $k \leq \bigvee H$, con $H \subseteq X$. Allora

$$k = k \wedge \left(\bigvee H\right) = \bigvee \{k \wedge h | h \in H\}.$$

Per l'ipotesi, esiste $y \in H$ tale che $k = k \wedge y$ e quindi $k \leq y$. Ciò prova che k è completamente coprimo.

La dimostrazione si completa per dualità. □

Il seguente esempio mostra che senza le ipotesi di ditributività le condizioni poste nelle due precedenti proposizioni, sempre necessarie, non risultano essere sufficienti, quindi non caratterizzano i concetti introdotti nella definizione 4.1.3.

ESEMPIO 4.1.6. Sia $(\mathcal{S}, \leq)$ il reticolo (completo ma non distributivo) dei sottospazi di uno spazio vettoriale di dimensione 2. Chiaramente ogni retta vettoriale K verifica le condizioni poste nelle proposizioni 4.1.4 e 4.1.5, ma non è un elemento coprimo. Siano, infatti, X e Y altre due rette vettoriali distinte tra loro e da K. Chiaramente, $K \leq X \vee Y$, ma $K \nleq X$ e $K \nleq Y$.

PROPOSIZIONE 4.1.7. *Se $(X, \leq)$ è un reticolo distributivo e $a \in X$ allora*

a atomo (antiatomo, rispettivamente) $\Rightarrow$ a coprimo (primo, rispettivamente).

DIMOSTRAZIONE. Sia $a \in X$, a atomo. Per ipotesi si ha $a \neq \bot$; se $a = x \vee y$, con $x, y \in X$ e $a \neq x$, poiché a è un atomo risulta $x = \bot$ e quindi $y = x \vee y = a$.

La dimostrazione si completa per dualità. □

PROPOSIZIONE 4.1.8. *In un frame ogni atomo è completamente coprimo. In un coframe ogni antiatomo è completamente primo.*

DIMOSTRAZIONE. E' analoga a quella della proposizione precedente utilizzando la Proposizione 4.1.5. □

ESEMPIO 4.1.9. (a) Se $S \in |\mathbf{Set}|$, $\forall x \in S$, $\{x\}$ è un atomo di $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$, infatti $\{x\} \neq \emptyset$ e $\forall A \in \mathcal{P}(S)$, $A \neq \emptyset$,

$$A \subseteq \{x\} \;\Rightarrow\; A = \{x\}.$$

Inoltre, $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ è un reticolo atomico, in quanto $\forall A \in \mathcal{P}(S)$, $A \neq \emptyset$, esiste almeno un $x \in A$ per cui $\{x\}$ è un atomo di $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ e $\{x\} \subseteq A$.

(b) Se $(X, \leq)$ è un reticolo totalmente ordinato, ogni $x \in X$, $x \neq \top$, è primo ed ogni $x \in X$, $x \neq \bot$, è coprimo. Se $(X, \leq)$ ha un atomo a, allora esso è unico, in quanto se esiste $a' \in X$, a' atomo, allora per la totalità dell'ordinamento risulta $a \leq a'$ o $a' \leq a$, da cui in ogni caso segue che $a' = a$.

(c) Il reticolo $([0,1], \leq)$ non ha atomi, in quanto, comunque prendo un elemento in $[0,1]$ diverso da zero ne esiste sempre uno più piccolo di esso e diverso da zero. Analogamente si vede che non ha antiatomi.

(d) Il sottoreticolo $L = \{0\} \cup [\frac{1}{2}, 1]$ di $([0,1], \leq)$ ha $\frac{1}{2}$ come atomo che, come si è osservato in (c), è anche unico.

(e) Ogni reticolo $(X, \leq)$ finito è atomico, in quanto $\forall a \in X$, $a \neq \bot$, o a è un atomo, o detto $A = \{x \in X | \bot \neq x \leq a\}$ esiste $\overline{a}$ elemento minimale per A che è un atomo ed è $\overline{a} \leq a$.

DEFINIZIONE 4.1.10. *Un reticolo $(X, \leq)$ si dice **powerset (insieme potenza)** se esiste $S \in |\mathbf{Set}|$ tale che*

$$(X, \leq) \cong (\mathcal{P}(S), \subseteq).$$

Ovviamente, è necessario che $(X, \leq)$ sia un'algebra di Boole, in quanto è isomorfo ad un'algebra di Boole.

TEOREMA 4.1.11 (A. Lindenbaum, A. Tarski, 1935). *Se* $(X, \leq)$ *è un reticolo allora*

$$(X, \leq) \text{ è } \textit{powerset} \Leftrightarrow (X, \leq) \text{ è } \textit{algebra di Boole completa e atomica.}$$

DIMOSTRAZIONE. "$\Rightarrow$" Ovvio.

"$\Leftarrow$" Osserviamo intanto che dalle proposizioni 2.5.10, 3.3.4 e 3.3.6 (2) segue che $(X, \leq)$ verifica le leggi di distributività infinita.

Sia, ora, $S = \{a \in X | a \text{ atomo}\}$.

$\forall h \in X$ sia

$$H = \{a \in S | a \leq h\},$$

allora risulta $h = \bigvee H$. Infatti ovviamente, per come è stato costruito H, h è un maggiorante per H. Inoltre, se $\overline{h}$ è un maggiorante per H allora risulta

$$\neg\overline{h} \wedge h = \perp$$

in quanto se così non fosse allora poiché per ipotesi X è un reticolo atomico, esisterebbe $a \in S$, tale che $a \leq \neg\overline{h} \wedge h$ e quindi $a \leq \neg\overline{h}$ e $a \leq h$ da cui seguirebbe che $a \in H$ e quindi $a \leq \overline{h}$, ma ciò conduce all'assurdo $a \leq \overline{h} \wedge (\neg\overline{h}) = \perp$.

Pertanto si ha

$$\neg\overline{h} \wedge h = \perp \;\Rightarrow\; \overline{h} \vee (\neg\overline{h} \wedge h) = \overline{h} \vee \perp \;\Rightarrow\; \overline{h} \vee h = \overline{h} \;\Rightarrow\; h \leq \overline{h}$$

ovvero h è il più piccolo maggiorante di H.

La seguente funzione, chiaramente isotona,

$$f : X \to \mathcal{P}(S),\; h \longmapsto f(h) = H = \{a \in S | a \leq h\}$$

è un isomorfismo fra algebre di Boole. Infatti

- f iniettiva:
  Se $h, k \in X$ sono tali che $f(h) = H = K = f(k)$, allora $h = \bigvee H = \bigvee K = k$.
- f suriettiva:
  Se $L \subseteq S$, poiché $(X, \leq)$ è completo allora esiste $l = \bigvee L$ e risulta $f(l) = L$. Infatti
  "$\subseteq$" Per 2.5.10, 3.3.4 vale in X la (**ILD**∞), quindi per 4.1.5 e 4.1.8 si ha

$$\begin{aligned} a \in f(l) &\Rightarrow \perp \neq a \leq l = \bigvee L \\ &\Rightarrow \exists b \in L : \perp \neq a \leq b \\ &\Rightarrow a = b \in L. \end{aligned}$$

  "$\supseteq$" $a \in L \;\Rightarrow\; a \leq \bigvee L \;\Rightarrow\; a \in f(l)$.

Siano $x, x' \in X$

- $f(x \vee x') = f(x) \cup f(x')$:

"$\subseteq$" Per 4.1.7

$$\begin{aligned} a \in f(x \vee x') &\Rightarrow a \in S,\ a \leq x \vee x' \\ &\Rightarrow a \in S,\ a \leq x \ \text{ o } \ a \leq x' \\ &\Rightarrow\ a \in f(x) \ \text{ o } \ a \in f(x') \\ &\Rightarrow a \in f(x) \cup f(x'). \end{aligned}$$

"$\supseteq$" Ovvio, perchè f è isotona.

- Ovviamente $f(\perp) = \perp$.

Quindi per le proposizioni 3.3.8 e 2.4.10 f è un isomorfismo di algebre di Boole.

Dalle proprietà su dimostrate segue che $(X, \leq) \cong (\mathcal{P}(S), \subseteq)$, cioè che X è powerset. □

COROLLARIO 4.1.12. *Ogni algebra di Boole completa e atomica è completamente distributiva.*

DIMOSTRAZIONE. Infatti, è ben noto (si veda l'Esempio 3.4.5 (a)) che il powerset $\mathcal{P}(X)$ di un qualsiasi insieme è completamente distributivo. □

4.2. Ideali e Filtri

DEFINIZIONE 4.2.1. *Siano $(X, \leq)$ un semireticolo superiore ed $I \subseteq X$. I si dice **ideale** in $(X, \leq)$ se*

I_1. $\perp \in I$.
I_2. $x, y \in I \Rightarrow x \vee y \in I$.
I_3. $x \in I$ *e* $y \leq x \Rightarrow y \in I$.

DEFINIZIONE 4.2.2. *Siano $(X, \leq)$ un semireticolo inferiore ed $F \subseteq X$. F si dice **filtro** in $(X, \leq)$ se*

F_1. $\top \in F$.
F_2. $x, y \in F \Rightarrow x \wedge y \in F$.
F_3. $x \in F$ *e* $x \leq y \Rightarrow y \in F$.

OSSERVAZIONE 4.2.3. 1. Le proprietà I_1 e I_2 sono equivalenti alla seguente proprietà:

$$A \subseteq I,\ A \text{ finito } \Rightarrow \vee A \in I$$

cioè I è un $\vee$-sottosemireticolo di X.

2. Le proprietà F_1 ed F_2 sono equivalenti alla seguente proprietà:

$$B \subseteq F,\ B \text{ finito } \Rightarrow \wedge B \in F$$

cioè F è un $\wedge$-sottosemireticolo di X.

3. La condizione I_3 si esprime dicendo che I è un ***lower-set***. La condizione F_3 si esprime dicendo che F è un ***upper-set***.

Se, $\forall S \subseteq X$, si pone $\downarrow S = \{x \in X | \exists s \in S : x \leq s\}$ e $\uparrow S \doteq \{y \in S | \exists s \in S : s \leq y\}$, allora la condizione I_3 (F_3, rispettivamente), è equivalente all'uguaglianza $\downarrow I = I$ ($\uparrow F = F$, rispettivamente).

4. Se $(X, \leq)$ è un $\vee$-semireticolo ($\wedge$-semireticolo, rispettivamente) e consideriamo una qualsiasi famiglia $\mathcal{I}$ di ideali ($\mathcal{F}$ di filtri, rispettivamente) in X si verifica facilmente che l'intersezione è ancora un ideale (un filtro, rispettivamente) che si indica con

$$\bigwedge \mathcal{I} = \bigcap \mathcal{I}, \quad (\bigwedge \mathcal{F} = \bigcap \mathcal{F}, \text{rispettivamente}).$$

5. Da quanto osservato al punto 4. segue che per ogni $\emptyset \neq A \subseteq X$ è possibile determinare univocamente l'ideale (il filtro, rispettivamente) che contiene A ed è contenuto in ogni altro ideale (filtro, rispettivamente) che contiene A. Tale ideale (filtro, rispettivamente) si indica con $< A >$ e si dice che è l'*ideale* (il *filtro*, rispettivamente) *generato da A*. E' facile verificare che l'ideale $< A >$ è costituito dagli elementi $x \in X$ per i quali $\exists H \subseteq A$, H finito tale che $x \leq \bigvee H$. Il filtro $< A >$ è invece costituito dagli elementi $y \in X$ per i quali $\exists G \subseteq A$, G finito tale che $\bigwedge G \leq y$.

DEFINIZIONE 4.2.4. *Sia* $(X, \leq)$ *un semireticolo superiore* (*inferiore, rispettivamente*).

Un ideale I *in* X (*un filtro* F *in* X*, rispettivamente*) *si dice* ***principale*** *se ha un massimo* (*un minimo, rispettivamente*).

OSSERVAZIONE 4.2.5. Se $(X, \leq)$ è un $\bigvee$-semireticolo ($\bigwedge$-semireticolo, rispettivamente) completo si ha che un ideale I in X (un filtro F in X, rispettivamente) è principale sse è chiuso per $\bigvee$ (per $\bigwedge$, rispettivamente).

PROPOSIZIONE 4.2.6. *Siano* $(X, \leq)$ *un* $\bigvee$*-semireticolo ed* $I \subseteq X$.

$$I \text{ è un ideale principale} \Leftrightarrow \exists | a \in X \text{ tale che } I = \downarrow a.$$

DIMOSTRAZIONE. "$\Rightarrow$" Se I è un ideale principale, posto $a = \bigvee I \in I$, allora $I = \downarrow a$. Infatti, se $x \in \downarrow a$, allora $x \leq a$ e poiché $a \in I$ essendo I un ideale si ha $x \in I$. Viceversa se $x \in I$ allora $x \leq \bigvee I = a$ e quindi $x \in \downarrow a$. Per doppia inclusione segue pertanto l'uguaglianza $I = \downarrow a$.

Se inoltre fosse $I = \downarrow a'$, allora sarebbe $a \in \downarrow a'$ e $a' \in \downarrow a$, quindi $a' = a$.

"$\Leftarrow$" I è un lower-set, cioè verifica la condizione I_3, infatti se $x \in I$ ed $y \in X$ è tale che $y \leq x$, allora $y \leq x \leq a$, ovvero $y \in I$.

Inoltre, I è chiuso per $\bigvee$, infatti, se $S \subseteq I$, allora $\bigvee S \leq \bigvee I = a \in I$ quindi $\bigvee S \in I$. Da ciò segue anche che I verifica le condizioni I_1 e I_2. $\square$

PROPOSIZIONE 4.2.7. *Siano* $(X, \leq)$ *un semireticolo inferiore ed* $F \subseteq X$.

$$F \text{ è un filtro principale} \Leftrightarrow \exists | a \in X \text{ tale che } F = \uparrow a.$$

DIMOSTRAZIONE. Si ottiene dualizzando quella di 4.2.6. □

Con riferimento alle notazioni delle proposizioni 4.2.6 e 4.2.7 si dice che I ed F sono rispettivamente l'*ideale* e il *filtro principali generati da a*.

PROPOSIZIONE 4.2.8.

(1) $f \in \vee\text{-}\mathbf{SLat}(X,Y) \Rightarrow Kerf = \{a \in X | f(a) = \bot\}$ *è un ideale di* X.

(2) *Se* $X \in |\vee\text{-}\mathbf{SLat}|$ *ed* $I \subseteq X$ *è un ideale di* X *allora esistono* $Y \in |\vee\text{-}\mathbf{SLat}|$ *ed* $f \in \vee\text{-}\mathbf{SLat}(X,Y)$ *tale che* $I = Kerf$.

(3) *Se* $X \in |\mathbf{DLat}|$ *e* I *è un ideale di* X *allora esistono* $Y \in |\mathbf{DLat}|$ *ed* $f \in \mathbf{DLat}(X,Y)$ *tale che* $Kerf = I$.

DIMOSTRAZIONE. (1) Chiaramente $\bot \in Kerf$.
Se $f \in \vee\text{-}\mathbf{SLat}(X,Y)$ ed $x, y \in Kerf$ allora

$$f(x \vee y) = f(x) \vee f(y) = \bot \ \Rightarrow\ x \vee y \in Kerf.$$

Se inoltre, $x \in Kerf$ ed $a \leq x$, allora

$$f(a) \leq f(x) = \bot \ \Rightarrow\ f(a) = \bot \ \Rightarrow\ a \in Kerf.$$

(2) Siano $X \in |\vee\text{-}\mathbf{SLat}|$ ed I un ideale di X. $\forall a, b \in X$, sia

$$a \equiv b \ \Leftrightarrow\ \exists x, y \in I \ : a \vee x = b \vee y.$$

Ovviamente "$\equiv$" è una relazione d'equivalenza ed inoltre "$\equiv$" è compatibile con $\vee$, infatti

$$\begin{aligned} a \equiv a',\ b \equiv b' &\Rightarrow\ \exists\, x, x', y, y' \in I \ :\ a \vee x = a' \vee x' \ , b \vee y = b' \vee y' \\ &\Rightarrow\ (a \vee b) \vee (x \vee y) = (a' \vee b') \vee (x' \vee y') \\ &\Rightarrow\ a \vee b \equiv a' \vee b'. \end{aligned}$$

Sia $Y = X/\equiv$ il semireticolo quoziente e sia $f : X \to Y$ la suriezione canonica (che è un morfismo in $\vee\text{-}\mathbf{SLat}$), allora si ha che $Kerf = I$, infatti

$$\begin{aligned} a \in Kerf &\Rightarrow\ f(a) = \bot = f(\bot) \\ &\Rightarrow\ a \equiv \bot \\ &\Rightarrow \exists\, x, y \in I : a \vee x = \bot \vee y = y \in I \\ &\Rightarrow\ a \in I. \end{aligned}$$

Viceversa

$$a \in I \ \Rightarrow\ a \vee a = \bot \vee a \ \Rightarrow\ a \equiv \bot \ \Rightarrow\ f(a) = \bot.$$

(3) Mediante lo stesso procedimento seguito in (2) si costruisce di Y che sotto le attuali ipotesi è un reticolo, infatti "$\equiv$" è compatibile anche con $\wedge$

$$\begin{aligned} a \equiv a',\ b \equiv b' \Rightarrow\ & \exists\, x, x', y, y' \in I\ :\ a \vee x = a' \vee x',\ b \vee y = b' \vee y' \\ \Rightarrow\ & (a \vee x) \wedge (b \vee y) = (a' \vee x') \wedge (b' \vee y') \\ \Rightarrow\ & (a \wedge b) \vee (a \wedge y) \vee (x \wedge b) \vee (x \wedge y) \\ & = (a' \wedge b') \vee (a' \wedge y') \vee (x' \wedge b') \vee (x' \wedge y') \\ \Rightarrow\ & a \wedge b \equiv a' \wedge b'. \end{aligned}$$

La distributività in Y si eredita banalmente da X.

Pertanto, la suriezione canonica $f : X \to Y$ è un morfismo di reticoli e analogamente a (2) si verifica che $Kerf = I$. □

PROPOSIZIONE 4.2.9.

(1) $f \in \wedge\text{-}\mathbf{SLat}(X, Y) \Rightarrow \wedge\text{-}Kerf = \{a \in A | f(a) = \top\}$ *è un filtro di* X.

(2) *Se* $X \in |\wedge\text{-}\mathbf{SLat}|$ *ed* $F \subseteq X$ *è un filtro di* X *allora esistono* $Y \in |\wedge\text{-}\mathbf{SLat}|$ *ed* $f \in \wedge\text{-}\mathbf{SLat}(X, Y)$ *tale che* $F = \wedge\text{-}Kerf$.

(3) *Se* $X \in |\mathbf{DLat}|$ *ed* F *è un filtro di* X *allora esistono* $Y \in |\mathbf{DLat}|$ *ed* $f \in \mathbf{DLat}(X, Y)$ *tale che* $\wedge\text{-}Kerf = F$.

DIMOSTRAZIONE. Si ottiene dualizzando quella di 4.2.8. □

PROPOSIZIONE 4.2.10. *Siano* $(X, \leq)$ *un reticolo,* $I \subseteq X$ *ed* $F = X \setminus I$, *allora sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

(i) I *è un ideale ed* F *è un filtro di* X.

(ii) I *è un ideale,* $\top \notin I$ *e* $(x \wedge y \in I \ \Rightarrow\ x \in I$ *o* $y \in I)$.

(iii) F *è un filtro,* $\perp \notin F$ *e* $(a \vee b \in F \ \Rightarrow\ a \in F$ *o* $b \in F)$.

(iv) $\exists f \in \mathbf{Lat}(X, \mathit{2})$ *tale che* $f^{\leftarrow}(\perp) = I$ *e* $f^{\leftarrow}(\top) = F$.

DIMOSTRAZIONE. "$(i) \Rightarrow (ii)$" $\top \in F = X \setminus I \Rightarrow \top \notin I$.

Se $x \wedge y \in I$ allora $x \in I$ o $y \in I$; infatti se così non fosse, cioè se $x, y \notin I$ allora $x, y \in F$ da cui segue $x \wedge y \in F = X \setminus I$ ovvero $x \wedge y \notin I$, che è assurdo.

"$(ii) \Rightarrow (iii)$" Da $\perp \in I$ segue che $\perp \notin F$. Inoltre, da $a, b \notin F$, cioè $a, b \in I$, segue ovviamente $a \vee b \notin F$.

"$(iii) \Rightarrow (iv)$" Posto $f(x) = \perp$, $\forall x \in I$ e $f(y) = \top$, $\forall y \in F$, si ha che $f : X \to \mathit{2}$ è un morfismo di reticoli. Siano, infatti, $x, y \in X$.

Se $x \vee y \notin F$, allora $x, y \notin F$, quindi $f(x \vee y) = \perp = f(x) \vee f(y)$.

Se $x \vee y \in F$, allora $x \in F$ o $y \in F$, quindi $f(x \vee y) = \top = f(x) \vee f(y)$.

Se $x \wedge y \notin F$, allora $x \notin F$ o $y \notin F$, quindi $f(x \wedge y) = \perp = f(x) \wedge f(y)$.

Se $x \wedge y \in F$, allora $x, y \in F$ quindi $f(x \wedge y) = \top = f(x) \wedge f(y)$.

"$(iv) \Rightarrow (i)$" Ovvio, per le proposizioni 4.2.8 e 4.2.9. □

DEFINIZIONE 4.2.11. *Se* $(X, \leq)$ *è un reticolo ed* $I \subseteq X$ *è un ideale di* X *che verifica una delle condizini equivalenti* $(i), (ii), (iv)$ *della* Proposizione 4.2.10 *allora* I *si dice ideale* ***primo***. *Un filtro caratterizzato dalle condizioni equivalenti* $(i), (iii), (iv)$ *della stessa proposizione si dice filtro* ***coprimo***.

OSSERVAZIONE 4.2.12. L'espressione filtro coprimo che usiamo qui differisce da quella usata in [**6, 8**]. Riteniamo che le seguenti proposizioni, in particolare la 4.2.14, giustifichino tale scelta.

PROPOSIZIONE 4.2.13. *Siano* $(X, \leq)$ *un reticolo ed* I *un ideale in* X.

$$I \text{ è un ideale principale primo} \Leftrightarrow \exists | a \in X, \ a \text{ primo, tale che } I = \downarrow a.$$

DIMOSTRAZIONE. "$\Rightarrow$" Dalla Proposizione 4.2.6 segue che $\exists | a \in X$ tale che $I =\downarrow a$. poiché I è primo, allora $\top \notin \downarrow a$ e quindi $a \neq \top$. Se $x \wedge y \leq a$, $x, y \in X$ e $x \nleq a$ allora $x \wedge y \in \downarrow a$, $x \notin \downarrow a$ e poiché $\downarrow a$ è primo si ha $y \in \downarrow a$, ovvero $y \leq a$, cioè a è primo.

"$\Leftarrow$" Dalla Proposizione 4.2.6 segue che I è un ideale principale. Inoltre, poiché a è primo, allora $a \neq \top$, quindi $\top \notin I$. Sia $x \wedge y \in \downarrow a$, $x, y \in X$. Se $x \leq a$, $x \in \downarrow a$ allora la tesi è vera. Se invece $x \nleq a$, allora essendo a primo si ha $y \leq a$ e quindi $y \in \downarrow a$, ovvero $\downarrow a$ è un ideale primo. □

PROPOSIZIONE 4.2.14. *Siano* $(X, \leq)$ *un reticolo ed* F *un filtro in* X.

$$F \text{ è un filtro principale coprimo} \Leftrightarrow \exists | a \in X, \ a \text{ coprimo, tale che } F = \uparrow a.$$

DIMOSTRAZIONE. Si ottiene dualizzando quella di 4.2.13. □

DEFINIZIONE 4.2.15. *Siano* $(X, \leq)$ *un reticolo ed* F *un filtro in* X.
F si dice ***filtro completamente coprimo*** *se*

$$\perp \notin F \text{ e } \bigvee A \in F \Rightarrow \exists a \in A : a \in F.$$

OSSERVAZIONE 4.2.16. 1. F filtro completamente coprimo $\Rightarrow$ F filtro coprimo.

2. Dalla Proposizione 4.2.10 segue chiaramente che se S è un locale e $p : S \to \mathbf{2}$ è una funzione, allora

$$p^{\leftarrow}(\perp) \text{ ideale primo} \Leftrightarrow p \text{ morfismo di reticoli} \Leftrightarrow p^{\leftarrow}(\top) \text{ filtro coprimo}.$$

PROPOSIZIONE 4.2.17. *Siano* S *un locale e* $p : S \to \mathbf{2}$ *una funzione, allora*

$$p \text{ morfismo di frame} \Leftrightarrow I = p^{\leftarrow}(\perp) \text{ ideale principale primo}.$$

DIMOSTRAZIONE. "$\Rightarrow$" Sia $p : S \to \mathbf{2}$ un morfismo di frame e sia $I = p^{\leftarrow}(\perp)$.

E' noto che I è primo. Se, inoltre, $A \subseteq I$, allora

$$p\left(\bigvee A\right) = \bigvee \{p(a) | a \in A\} = \perp \ \Rightarrow \ \bigvee A \in I,$$

quindi I è principale.

"$\Leftarrow$" Dalla Osservazione 4.2.16 (2.) segue che p è un morfismo di reticoli da S in $\mathbf{2}$. Inoltre p conserva $\bigvee$: infatti sia $X \subseteq S$. Se $\bigvee X \in I$, allora $p(\bigvee X) = \perp = \bigvee p^{\rightarrow}(X)$. Se $\bigvee X \notin I$, allora, poiché I è principale, $\exists x' \in X$: $x' \notin I$ e quindi $p(\bigvee X) = \top = \bigvee p^{\rightarrow}(X)$. □

COROLLARIO 4.2.18. *Siano S un locale e $p : S \to \mathbf{2}$ una funzione, allora*

p morfismo di frame $\Leftrightarrow F = p^{\leftarrow}(\top)$ filtro completamente coprimo.

DIMOSTRAZIONE. "$\Rightarrow$" Sia $p : S \to \mathbf{2}$ un morfismo di frame e sia $F = p^{\leftarrow}(\top)$. Se $A \subseteq S$ è tale che $\bigvee A \in F$, allora $\top = p(\bigvee A) = \bigvee \{p(a) | a \in A\}$ e quindi esiste $a' \in A$ per cui risulta $p(a') = \top$, altrimenti se così non fosse si avrebbe $A \subseteq p^{\leftarrow}(\perp)$ da cui si avrebbe l'assurdo $\bigvee \{p(a) | a \in A\} = \perp$.

"$\Leftarrow$" poiché F è coprimo (si veda l'Osservazione 4.2.16 (1.), per l'Osservazione 4.2.16 2. p è un morfismo di reticoli. Inoltre, $\forall A \subseteq S$ si ha

$$\begin{aligned} p\left(\bigvee A\right) = \top \Rightarrow & \bigvee A \in F \\ \Rightarrow & \exists a \in A : a \in F \\ \Rightarrow & p(a) = \top \\ \Rightarrow & \bigvee p^{\rightarrow}(A) = \top \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} p\left(\bigvee A\right) = \perp \Rightarrow & \bigvee A \notin F \\ \Rightarrow & a \notin F, \forall a \in A \\ \Rightarrow & p(a) = \perp, \forall a \in A \\ \Rightarrow & \bigvee p^{\rightarrow}(A) = \perp \end{aligned}$$

da cui segue che $p(\bigvee A) = \bigvee p^{\rightarrow}(A)$, ovvero che p è un morfismo di frame. □

PROPOSIZIONE 4.2.19. *Siano $(X, \leq)$ un reticolo, I un ideale di X ed F un filtro di X tali che $I \cap F = \emptyset$; allora esiste M ideale di X, massimale fra quelli che contengono I e non intersecano F, ed esiste G filtro di X massimale tra quelli che contengono F e non intersecano I.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathcal{M}$ la famiglia degli ideali di X disgiunti da F e $\mathcal{C}$ una catena ascendente di ideali contenuta in $\mathcal{M}$. Allora si verifica facilmente che $C = \bigcup \mathcal{C}$ è un ideale appartenente ad $\mathcal{M}$ e per il Lemma di Zorn esiste un elemento M massimale in $\mathcal{M}$.

Il resto della proposizione si dimostra per dualità. □

PROPOSIZIONE 4.2.20. *Se $(X, \leq)$ è un reticolo distributivo, F è un filtro di X ed I è un ideale massimale fra quelli disgiunti da F, allora I è primo.*

DIMOSTRAZIONE. Poiché per ipotesi $I \cap F = \emptyset$, allora $\top \notin I$.

Sia $x_1 \wedge x_2 \in I$ e siano J_1 e J_2 gli ideali generati da I insieme con x_1 ed x_2, rispettivamente. Allora il generico elemento di J_i, con $i = 1, 2$, è del tipo $a \vee (x_i \wedge b)$, con $a \in I$, $b \in X$: infatti, esso si può ottenere come $(p \vee x_i) \wedge q$, con $p \in I$ e $q \in X$, quindi per la distributività, è del tipo $(p \wedge q) \vee (x_i \wedge q)$, con $p \wedge q = a \in I$ e $q = b \in X$.

Se $J_1 \cap F \neq \emptyset \neq J_2 \cap F$ allora $\exists a_1 \vee (x_1 \wedge b_1) \in F$ ed $\exists a_2 \vee (x_2 \wedge b_2) \in F$ con $a_i \in I$ e $b_i \in X$, pertanto

$$[a_1 \vee (x_1 \wedge b_1)] \wedge [a_2 \vee (x_2 \wedge b_2)] \in F,$$

ma

$$\begin{aligned}&[a_1 \vee (x_1 \wedge b_1)] \wedge [a_2 \vee (x_2 \wedge b_2)] = \\ &= \underbrace{(a_1 \wedge a_2)}_{\in I} \vee \underbrace{(a_1 \wedge (x_2 \wedge b_2))}_{\in I} \vee \underbrace{((x_1 \wedge b_1) \wedge a_2))}_{\in I} \vee \underbrace{(x_1 \wedge b_1 \wedge x_2 \wedge b_2)}_{\in I} \in I\end{aligned}$$

e ciò è assurdo in quanto $I \cap F = \emptyset$.

Quindi sia $J_1 \cap F = \emptyset$; poiché $J_1 \supseteq I$ per la massimalità di I ho $J_1 = I$, quindi $a_1 \in I$. □

PROPOSIZIONE 4.2.21. *Se $(X, \leq)$ è un reticolo distributivo, I è un ideale di X ed F è un filtro massimale fra quelli disgiunti da I, allora F è coprimo.*

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione si ottiene dalla 4.2.20 per dualità. □

DEFINIZIONE 4.2.22. *Un ideale I si dice **proprio** se è diverso da X, cioè se $\top \notin I$.*

*Un filtro F si dice **proprio** se è diverso da X, cioè se $\perp \notin F$.*

*Un ideale in $(X, \leq)$ massimale tra quelli disgiunti dal filtro $\{\top\}$ si dice ideale **proprio massimale** o semplicemente ideale **massimale**.*

*Un filtro in $(X, \leq)$ massimale tra quelli disgiunti dall'ideale $\{\perp\}$ si dice filtro **proprio massimale** o semplicemente filtro **massimale**.*

OSSERVAZIONE 4.2.23. Comunemente si usa il termine filtro su un insieme X, per denotare un filtro nel powerset di X, $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$. A volte capita di considerare filtri in qualche sottoreticolo del powerset di X; in tal caso si usa accompagnare il termine filtro con un aggettivo che suggerisca l'entità del sottoreticolo in cui si considera il filtro. Ad esempio per "*filtro aperto*" su uno spazio topologico (X, τ) si intende un filtro nel reticolo completo τ.

Col termine ***ultrafiltro*** (su X) si usa abitualmente indicare un filtro massimale proprio nel powerset di X. Anche in questo caso si possono utilizzare espressioni come, facendo riferimento all'esempio su dato, ultrafiltro aperto.

COROLLARIO 4.2.24. *In un reticolo distributivo ogni ideale massimale è primo, ogni filtro massimale è coprimo.*

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione segue dalle proposizioni 4.2.20 e 4.2.21. □

PROPOSIZIONE 4.2.25. *Sia* $(X, \leq)$ *un reticolo distributivo. Se* $a, b \in X$, $b \not\leq a$, *allora esiste un morfismo di reticoli* $f : X \to \mathbf{2}$ *con* $f(a) = \bot$, $f(b) = \top$.

DIMOSTRAZIONE. Considero il filtro $\uparrow b$ e l'ideale $\downarrow a$. Se $x \in \uparrow b \cap \downarrow a$, allora $b \leq x \leq a$ da cui segue che $b \leq a$, che è assurdo. Quindi $\uparrow b \cap \downarrow a = \emptyset$. Se I un ideale massimale fra quelli che sono disgiunti da $\uparrow b$, allora I è primo e quindi è nucleo di un morfismo di reticoli $f : X \to \mathbf{2}$ per cui risulta $f(a) = \bot$, $f(b) = \top$ in quanto $a \in I$ e $b \notin I$. □

PROPOSIZIONE 4.2.26. *Se* $(X, \vee, \wedge, \neg)$ *è un'algebra di Boole e* I *è un ideale in* X, *allora sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

(i) I *è primo.*
(ii) $\forall a \in X : a \in I \Leftrightarrow \neg a \notin I$.
(iii) I *è massimale.*

DIMOSTRAZIONE. "(i) $\Rightarrow$ (ii)" $\forall a \in X$ risulta $a \wedge \neg a = \bot \in I$ quindi $a \in I$ oppure $\neg a \in I$ essendo I primo. Se inoltre si avesse $a \in I$ e $\neg a \in I$, allora sarebbe $a \vee \neg a = \top \in I$ contro l'ipotesi che I sia primo.

"(ii) $\Rightarrow$ (iii)" poiché $\bot \in I$, da (ii) segue che $\neg\bot = \top \notin I$ quindi I è proprio ($I \cap \{\top\} = \emptyset$).

Se J è un ideale proprio, $J \supsetneqq I$ e se $a \in J \setminus I$ allora $\neg a \in I \subset J$ e quindi $a \vee \neg a = \top \in J$, che è assurdo.

"(iii) $\Rightarrow$ (i)" Segue dala Proposizione 4.2.20. □

PROPOSIZIONE 4.2.27. *Se* $(X, \vee, \wedge, \neg)$ *è un'algebra di Boole e* F *è un filtro in* X, *allora sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

(i) F *è coprimo.*
(ii) $\forall a \in X : a \in F \Leftrightarrow \neg a \notin F$.
(iii) F *è massimale.*

DIMOSTRAZIONE. E' duale di quella della proposizione precedente. □

COROLLARIO 4.2.28. *Se* $(X, \vee, \wedge, \neg)$ *è un'algebra di Boole ed* $a \in X$, *allora*

$$a \text{ primo} \Leftrightarrow \neg a \text{ atomo.}$$

DIMOSTRAZIONE. "$\Rightarrow$" Se $a \in X$ è primo, allora $\downarrow a$ è ideale primo, quindi $a \neq \top$ e pertanto $\neg a \neq \bot$. Se $a' \leq \neg a$, allora $a \leq \neg a'$. Nel caso $a \leq \neg a'$, e $a \neq \neg a'$, si ha $\neg a' \notin \downarrow a$; essendo $\downarrow a$ un ideale primo per 4.2.26 si ha $a' \in \downarrow a$ e quindi $a' \leq a \wedge \neg a = \bot$. Nel caso $\neg a' = a$, allora $a' = \neg a$. Pertanto dall'arbitrarietà di a' segue che $\neg a$ è un atomo.

"$\Leftarrow$" Se $a \in X$ è tale che $\neg a$ è un atomo, allora evidentemente a è un antiatomo. La tesi segue quindi dalla Proposizione 4.1.7. $\square$

4.3. Punti di un Locale

DEFINIZIONE 4.3.1. *Se S è un locale, si dice* **punto** *di S un'applicazione*

$$p : S \to \mathbf{2}$$

che conserva $\bigvee$ ed $\wedge$, cioè che sia un morfismo di frame.

L'insieme dei punti di S lo indichiamo con

$$pt(S) = \{p : S \to \mathbf{2} \mid p\ morfismo\ di\ frame\}.$$

PROPOSIZIONE 4.3.2. *Se S è un locale, $pt(S)$ è in corrispondenza bigettiva con l'insieme degli elementi primi di S.*

DIMOSTRAZIONE. Posto $P = \{a \in S | a \text{ primo}\}$, $\forall a \in P$ definiamo

$$p_a : S \to \mathbf{2},\ x \mapsto p_a(x) = \begin{cases} \bot & \text{se } x \leq a \\ \top & \text{se } x \nleq a. \end{cases}$$

Poiché, $\forall a \in P$, $p_a^{\leftarrow}(\bot) =\downarrow a$ è un ideale principale primo, per la Proposizione 4.2.17 si ha che p_a è un morfismo di frame, ovvero $p_a \in pt(S)$.

Viceversa, ogni $p \in pt(S)$ determina, sempre per la Proposizione 4.2.17 un ideale principale primo, $p^{\leftarrow}(\bot) =\downarrow a_p$, quindi un elemento primo $a_p \in P$.

E' facile verificare che le corrispondenze

$$a \in P \longmapsto p_a \in pt(S)$$

e

$$p \in pt(S) \longmapsto a_p \in P$$

sono una l'inversa dell'altra. $\square$

Sia S un locale e sia

$$\varphi : S \to \mathcal{P}(pt(S))$$

la funzione definita $\forall x \in S$ da

$$\varphi(x) = \{p \in pt(S) | p(x) = \top\}.$$

COROLLARIO 4.3.3. *$\varphi(x)$ è in corrispondenza bigettiva con l'insieme $\{a \in S | a\ primo\ :\ x \nleq a\}$.*

DIMOSTRAZIONE. Con riferimento alle corrispondenze definite nella dimostrazione della Proposizione 4.3.2 se $p \in \varphi(x)$, si ha $x \nleq a_p$, altrimenti se fosse $x \leq a_p$ allora sarebbe $\top = p(x) \leq p(a_p)$, che è assurdo.

Se $a \in S$ è primo, e $x \nleq a$, allora $p_a(x) = \top$, quindi $p_a \in \varphi(x)$. $\square$

Lemma 4.3.4. *Se* $(X, \leq)$ *ed* $(Y, \leq)$ *sono reticoli completi,* $f : X \to Y$ *conserva* $\bigvee$ *e* $\wedge$ *ed* $S \subseteq X$ *è un frame,* $(S, \leq)$*, con la relazione d'ordine indotta da* X*, allora* $(f^{\to}(S), \leq)$ *è un frame con la relazione d'ordine indotta da* Y*.*

Dimostrazione. Considerato a piacere $A \subseteq f^{\to}(S)$ e scelto a piacere $A' \subseteq S$ tale che $f^{\to}(A') = A$ si ha evidentemente

$$\bigvee A = \bigvee f^{\to}(A') = f^{\to}\left(\bigvee A'\right) \in f^{\to}(S)$$

quindi $f^{\to}(S)$ è un sottosemireticolo superiore completo di Y quindi un reticolo completo con la relazione d'ordine indotta da Y.

Inoltre, in $f^{\to}(S)$ si verifica la (**ILD**∞), infatti se $b \in f^{\to}(S)$ e $b = f(b')$, con $b' \in S$, allora, usando ancora le precedenti notazioni si ha

$$\begin{aligned} b \wedge \left(\bigvee A\right) &= f(b') \wedge \left(\bigvee f^{\to}(A')\right) \\ &= f(b') \wedge f\left(\bigvee A'\right) \\ &= f\left(b' \wedge (\bigvee A')\right) \\ &= f\left(\bigvee \{b' \wedge a' | a' \in A'\}\right) \\ &= \bigvee \{f(b') \wedge f(a') | a' \in A'\} \\ &= \bigvee \{b \wedge a | a \in A\}. \end{aligned}$$

□

Proposizione 4.3.5. $\varphi : S \to \mathcal{P}(pt(S))$ *è un morfismo di frame, quindi* $\varphi(S)$ *è una topologia su* $pt(S)$*.*

Dimostrazione. Se $X \subseteq S$, allora $\varphi(\bigvee X) = \bigcup \{\varphi(x) | x \in X\}$; infatti,

$$\begin{aligned} p \in \bigcup \{\varphi(x) | x \in X\} &\Leftrightarrow \exists x \in X : p(x) = \top \\ &\Leftrightarrow \bigvee \{p(x) | x \in X\} = p\left(\bigvee X\right) = \top \\ &\Leftrightarrow p \in \varphi\left(\bigvee X\right). \end{aligned}$$

Siano $x, y \in S$, allora $\varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \cap \varphi(y)$, infatti

$$\begin{aligned} p \in \varphi(x) \cap \varphi(y) &\Leftrightarrow p(x) = \top = p(y) \\ &\Leftrightarrow p(x \wedge y) = p(x) \wedge p(y) = \top \\ &\Leftrightarrow p \in \varphi(x \wedge y). \end{aligned}$$

□

Pertanto, $\varphi(S)$ è una topologia su $pt(S)$. Lo spazio topologico così ottenuto lo indicheremo brevemente con $pt(S)$ e la sua topologia la denoteremo con $\tau\big(pt(S)\big)$. Ovviamente, la ridotta di φ a $\tau\big(pt(S)\big)$

$$\varphi : S \to \tau\big(pt(S)\big)$$

è un morfismo in **Frm** quindi determina un morfismo, che indichiamo con lo stesso simbolo, $\varphi \in \mathbf{Loc}(\tau\big(pt(S)\big), S)$.

PROPOSIZIONE 4.3.6. *Se $(X, \vee, \wedge, \neg)$ è un'algebra di Boole completa, $\neg$ induce un antiisomorfismo (bigezione che inverte l'ordine e quindi porta $\bigvee$ in $\bigwedge$ e $\bigwedge$ in $\bigvee$), di insiemi ordinati fra $pt(X)$ e $\{a \in X |\ a$ atomo$\}$.*

DIMOSTRAZIONE. La tesi segue dalla Proposizione 4.3.2 che permette di identificare i punti di X con gli elementi primi di X e dal Corollario 4.2.28. $\square$

COROLLARIO 4.3.7. *Se $(X, \vee, \wedge, \neg)$ è un'algebra di Boole completa, allora $\varphi(x)$ è antiisomorfo, tramite $\neg$, a $\{a \in X | a$ atomo $: a \leq x\}$, $\forall x \in X$.*

DIMOSTRAZIONE. Se $p \in \varphi(x)$, con $x \in X$, allora p determina un elemento primo $b \in X$, $x \not\leq b$, quindi tale che $\neg x \leq b$, ovvero $a = \neg b \leq x$, che per 4.2.28 è un atomo.

Tale corrispondenza è un antiisomorfismo di insiemi ordinati. $\square$

PROPOSIZIONE 4.3.8. *Se $(X, \vee, \wedge, \neg)$ è un'algebra di Boole completa, allora*

$$\varphi : X \to \mathcal{P}\big(pt(X)\big) \text{ è iniettiva } \Leftrightarrow X \text{ è atomica.}$$

DIMOSTRAZIONE. "$\Rightarrow$" Sia $\perp \neq x \in X$, allora

$$\varphi(x) \cong \{a \in X | a \text{ atomo} : a \leq x\} \neq \varphi(\perp) = \emptyset$$

e quindi esiste $a \in X$, a atomo, tale che $a \leq x$.

"$\Leftarrow$" Sia X atomica e siano $x, y \in X$ tali che $x \neq y$.

Allora $(x \wedge \neg y, \neg x \wedge y) \neq (\perp, \perp)$.

Sia $x \wedge \neg y \neq \perp$ e sia $a \in X$ un atomo, tale che $a \leq x \wedge \neg y$. Risulta $a \leq x$ e $a \leq \neg y$, quindi $a \not\leq \neg x$, altrimenti si avrebbe $a \leq x \wedge \neg x = \perp$. Ne segue che $y \leq \neg a$ e $x \not\leq \neg a$ e quindi il punto $p_{\neg a}$, determinato dall'elemento primo $\neg a$, sta in $\varphi(x)$ ma non in $\varphi(y)$, cioè $\varphi(x) \neq \varphi(y)$. $\square$

4.4. Aggiunzione tra Top e Loc

In modo informale possiamo dire che la *topologia senza punti* è quella disciplina che studia la cetegoria **Loc**. I legami tra tale categoria e la categoria **Top** degli spazi topologici che descriveremo in questo paragrafo giustificano l'uso del termine *topologia senza punti*, considerando anche il fatto che gli elementi dell'insieme sostegno di uno spazio topologico si chiamano punti dello spazio stesso, mentre la famiglia degli aperti è la topologia dello spazio.

Definiremo ora, due funtori tra le categorie **Top** e **Loc**.

Sia $f \in \mathbf{Loc}(S,T)$ ed $f^{op} : T \to S$ il corrispondente morfismo di frame. Se $p \in pt(S)$, poniamo

$$\overline{f}(p) = p \circ f^{op} : T \to \mathit{2},$$

allora $\overline{f}(p) \in pt(T)$.

In questo modo resta quindi definita una funzione

$$pt(f) = \overline{f} : pt(S) \to pt(T)$$

che è un morfismo in **Top**, ovvero una funzione continua, infatti gli aperti di $pt(T)$ sono tutti e soli della forma

$$\varphi(x) = \{q \in pt(T) | q(x) = \top\}, \text{ con } x \in T.$$

Per ciascuno di essi si ha

$$\begin{aligned}\overline{f}^{\leftarrow}(\varphi(x)) &= \{p \in pt(S) | \overline{f}(p) = q \text{ con } q \in pt(T) \text{ e } q(x) = \top\} \\ &= \{p \in pt(S) | (p \circ f^{op})(x) = \top\} \\ &= \{p \in pt(S) | p(f^{op}(x)) = \top\} \\ &= \varphi(f^{op}(x)) \in \tau(pt(S)).\end{aligned}$$

DEFINIZIONE 4.4.1. *La coppia di funzioni*

$$pt : |\mathbf{Loc}| \to |\mathbf{Top}|,\ S \longmapsto (pt(S), \tau(pt(S)) = \varphi(S))$$

e

$$pt : \mathcal{M}or(\mathbf{Loc}) \to \mathcal{M}or(\mathbf{Top}),\ f \longmapsto pt(f) = \overline{f}$$

costituisce un funtore da **Loc** *in* **Top**

$$pt : \mathbf{Loc} \to \mathbf{Top}.$$

Infatti

$$pt(1_S)(p) = p \circ 1_S = p,\ \forall p \in pt(S)$$

cioè

$$pt(1_S) = 1_{pt(S)}.$$

Inoltre, se $f \in \mathbf{Loc}(S,T)$ e $g \in \mathbf{Loc}(T,Z)$, allora

$$f^{op} : T \to S,\ g^{op} : Z \to T$$

e quindi

$$f^{op} \circ g^{op} : Z \to S$$

ovvero $g \circ f \in \mathbf{Loc}(S, Z)$ e si ha $\forall p \in pt(S)$:

$$\begin{aligned} pt(g \circ f)(p) &= p \circ f^{op} \circ g^{op} \\ &= (p \circ f^{op}) \circ g^{op} \\ &= pt(g)(p \circ f^{op}) \\ &= pt(g)\big(pt(f)(p)\big) \\ &= \big(pt(g) \circ pt(f)\big)(p). \end{aligned}$$

Se X è uno spazio topologico, allora $\tau(X)$ è un locale. I punti di $\tau(X)$ sono individuati dagli ideali principali primi, ovvero dagli aperti primi $A \in \tau(X)$, (cioè quelli per i quali $\downarrow A$ è primo), che sono quegli aperti $A \neq X$ tali che $\forall B, C \in \tau(X)$ risulta $B \cap C \subseteq A \Rightarrow B \subseteq A$ o $C \subseteq A$. Pertanto essi sono individuati dai chiusi irriducibili o coprimi, ovvero dai chiusi $D \neq \emptyset$ tali che $\forall G, H$ chiusi si ha $D \subseteq G \cup H \Rightarrow D \subseteq G$ o $D \subseteq H$.

In termini ancora equivalenti, un punto in $\tau(X)$ è individuato da un filtro completamente coprimo nel reticolo degli aperti; in tal caso, l'unione degli aperti che non ne fanno parte e che costituiscono l'ideale principale primo individuato dal punto, è un aperto primo ed il suo complementare è il corrispondente chiuso irriducibile.

E' utile osservare che ogni elemento $x \in X$ individua un punto in $\tau(X)$: infatti, $\tau(x) = \big\{A \in \tau(X) | x \in A\big\}$ è un filtro completamente coprimo in $\tau(X)$, in quanto, se l'unione di una famiglia di aperti contiene x, allora uno di tali aperti contiene x.

L'aperto primo corrispondente a tale punto è il più grande aperto che non contiene x, $A = \bigcup\big\{B \in \tau(X) | x \notin B\big\}$, ed il corrispondente chiuso irriducibile è $\overline{\{x\}}$, il più piccolo chiuso contenente x. Riprenderemo questo argomento nel prossimo paragrafo.

Indichiamo tale punto con p_x

$$p_x : \tau(X) \to \mathit{2}$$

tale che $\forall B \in \tau(X)$,

$$p_x(B) = \begin{cases} \perp & \text{se } x \notin B \\ \top & \text{se } x \in B. \end{cases}$$

PROPOSIZIONE 4.4.2. *La funzione*

$$\psi : X \to pt(\tau(X)),\ x \longmapsto p_x$$

è continua rispetto alle topologie τ su X e $\tau(pt(\tau(X)))$ su $pt(\tau(X))$.

DIMOSTRAZIONE. Il generico aperto di $\tau(pt(\tau(X)))$ è del tipo

$$\varphi(A) = \big\{p \in pt(\tau(X)) | p(A) = \top\big\}, \quad con A \in \tau(X).$$

Allora risulta

$$\begin{aligned}\psi^{\leftarrow}(\varphi(A)) &= \{x \in X | p_x \in \varphi(A)\}\\ &= \{x \in X | p_x(A) = \top\}\\ &= \{x \in X | x \in A\}\\ &= A \in \tau(X).\end{aligned}$$

□

La seguente definizione riprende un argomento già trattato nell' Osservazione 3.3.14. E' facile verificare quanto è asserito da tale definizione.

Definizione 4.4.3. *La coppia di funzioni*

$$\tau : |\mathbf{Top}| \to |\mathbf{Loc}|,\ X \longmapsto \tau(X)$$

e

$$\begin{gathered}\tau : \mathcal{M}or(\mathbf{Top}) \to \mathcal{M}or(\mathbf{Loc}),\\ f \in \mathbf{Top}(X, X') \mapsto \tau(f) \in \mathbf{Loc}(\tau(X), \tau(X'))\end{gathered}$$

tale che

$$(\tau(f))^{op} = f^{\leftarrow} : \tau(X') \to \tau(X)$$

costituisce un funtore da **Top** *in* **Loc** *che si indica con*

$$\tau : \mathbf{Top} \to \mathbf{Loc}.$$

Teorema 4.4.4. *Il funtore*

$$\tau : \mathbf{Top} \to \mathbf{Loc}$$

è aggiunto a sinistra del funtore

$$pt : \mathbf{Loc} \to \mathbf{Top},$$

ovvero

$$\tau \dashv pt.$$

Dimostrazione. L'unità dell'aggiunzione è definita come segue:

$$\eta : 1_{\mathbf{Top}} \to pt \circ \tau,\ \eta = (\eta_X)_{X \in |\mathbf{Top}|}$$

con $\eta_X \in \mathbf{Top}(X, pt(\tau(X)))$, e

$$\psi \equiv \eta_X : X \to pt(\tau(X)),\ x \longmapsto p_x.$$

η è una trasformazione naturale.

Infatti, se $f \in \mathbf{Top}(X, Y)$, il diagramma

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\eta_X} & pt(\tau(X)) \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle pt(\tau(f))} \\ Y & \xrightarrow{\eta_Y} & pt(\tau(Y)) \end{array}$$

è commutativo. Infatti, $\forall x \in X$ risulta

$$pt\big(\tau(f)\big)(\eta_X)(x) = pt\big(\tau(f)\big)(p_x) = p_x \circ (\tau(f))^{op} = p_x \circ f^{\leftarrow}$$

ed

$$\eta_Y(f(x)) = p_{f(x)};$$

inoltre, $\forall B \in \tau(Y)$ si ha

$$f(x) \in B \;\Leftrightarrow\; x \in f^{\leftarrow}(B) \;\Rightarrow\; p_x\big(f^{\leftarrow}(B)\big) = \top = p_{f(x)}(B)$$

$$f(x) \notin B \;\Leftrightarrow\; x \notin f^{\leftarrow}(B) \;\Rightarrow\; p_x\big(f^{\leftarrow}(B)\big) = \bot = p_{f(x)}(B).$$

La counità dell'aggiunzione è definita come segue:

$$\epsilon : \tau \circ pt \to 1_{\mathbf{Loc}},\;\; \epsilon = (\epsilon_S)_{S \in |\mathbf{Loc}|}$$

con $\epsilon_S \in \mathbf{Loc}\big(\tau(pt(S)), S\big)$ e

$$\varphi \equiv (\epsilon_S)^{op} : S \to \tau\big(pt(S)\big),\;\; a \longmapsto \varphi(a) = \big\{p \in pt(S) | p(a) = \top\big\}.$$

ϵ è una trasformazione naturale.

Infatti, se $g \in \mathbf{Loc}(T, S)$, il seguente diagramma

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{(\epsilon_S)^{op}} & \tau\big(pt(S)\big) \\ g^{op} \downarrow & & \downarrow (\tau(pt(g)))^{op} \\ T & \xrightarrow{(\epsilon_T)^{op}} & \tau(pt(T)) \end{array}$$

è commutativo. Infatti, $\forall a \in S$ si ha

$$\begin{aligned} \big(\tau(pt(g))\big)^{op}\big((\epsilon_S)^{op}(a)\big) &= (pt(g))^{\leftarrow}(\varphi(a)) \\ &= \big\{q \in pt(T) | q \circ g^{op} \in \varphi(a)\big\} \\ &= \big\{q \in pt(T) | q(g^{op}(a)) = \top\big\} \end{aligned}$$

ed

$$(\epsilon_T)^{op}(g^{op}(a)) = \varphi(g^{op}(a)) = \big\{q \in pt(T) | q(g^{op}(a)) = \top\big\}.$$

Si verificano, inoltre, le condizioni

$$\tau\left(pt\big(\tau(X)\big)\right) \xrightarrow{(\tau(\eta_X))^{op}} \tau(X) \xrightarrow{(\epsilon_{\tau(X)})^{op}} \tau\left(pt\big(\tau(X)\big)\right) = 1_{\tau\left(pt\left(\tau(X)\right)\right)}.$$

Infatti, gli elementi di $\tau(pt\big(\tau(X)\big))$ sono del tipo $\varphi(A)$, con $A \in \tau(X)$ e si ha

$$\begin{aligned} (\epsilon_{\tau(X)})^{op}\big((\tau(\eta_X))^{op}(\varphi(A))\big) &= (\epsilon_{\tau(X)})^{op}\big(\eta_X^{\leftarrow}(\varphi(A))\big) \\ &= (\epsilon_{\tau(X)})^{op}\big(\big\{x \in X | p_x(A) = \top\big\}\big) \\ &= (\epsilon_{\tau(X)})^{op}\big(\big\{x \in X | x \in A\big\}\big) \\ &= (\epsilon_{\tau(X)})^{op}(A) = \varphi(A) \\ &= 1_{\tau\left(pt\left(\tau(X)\right)\right)}(\varphi(A)). \end{aligned}$$

$$pt\left(\tau\left(pt(S)\right)\right) \overset{pt(\epsilon_S)}{\longrightarrow} pt(S) \overset{\eta_{pt(S)}}{\longrightarrow} pt\left(\tau\left(pt(S)\right)\right) = 1_{pt(\tau(pt(S)))}.$$

Infatti, i punti di $\tau\big(pt(S)\big)$ sono funzioni $p : \tau\big(pt(S)\big) \to \mathbf{2}$, morfismi di frames e gli aperti di $\tau\big(pt(S)\big)$ sono del tipo $\varphi(a)$, con $a \in S$, quindi si ha

$$\eta_{pt(S)}\big(pt(\epsilon_S)(p)\big)(\varphi(a)) = \eta_{pt(S)}(p \circ \epsilon_S^{op})(\varphi(a)) = p_{p\circ\epsilon_S^{op}}(\varphi(a))$$

$$= \begin{cases} \perp & \text{se } p \circ \epsilon_S^{op} \notin \varphi(a) \\ \top & \text{se } p \circ \epsilon_S^{op} \in \varphi(a) \end{cases} = \begin{cases} \perp & \text{se } p(\epsilon_S^{op}(a)) = \perp \\ \top & \text{se } p(\epsilon_S^{op}(a)) = \top \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \perp & \text{se } p(\varphi(a)) = \perp \\ \top & \text{se } p(\varphi(a)) = \top \end{cases} = p(\varphi(a)) = 1_{pt\left(\tau\left(pt(S)\right)\right)}(\varphi(a)).$$

□

4.5. Equivalenza tra Spazi Sobri e Locali Spaziali

DEFINIZIONE 4.5.1. *Sia X uno spazio topologico.*

Un chiuso irriducibile F è un elemento coprimo nel coframe dei chiusi di $\tau(X)$.

ESEMPIO 4.5.2. Se $X \in |\mathbf{Top}|$ e $x \in X$, allora $\overline{\{x\}}$ è un chiuso irriducibile in X.

Infatti, $\{x\} \subseteq \overline{\{x\}}$, quindi $\overline{\{x\}} \neq \emptyset$; inoltre, se $\overline{\{x\}} \subseteq F \cup F'$, con F, F' chiusi di X, allora $\{x\} \subseteq F \cup F' \Rightarrow x \in F$ o $x \in F' \Rightarrow \overline{\{x\}} \subseteq F$ o $\overline{\{x\}} \subseteq F'$.

Sia $X \in |\mathbf{Top}|$. La funzione

$$\psi : X \to pt\big(\tau(X)\big),\ x \longmapsto p_x$$

definita in precedenza non è, in generale, né iniettiva né suriettiva.

In effetti, se si pensa ai punti di $pt\big(\tau(X)\big)$ come ai chiusi irriducibili in $\tau(X)$, complementari degli aperti primi di $\tau(X)$, così che il chiuso irriducibile determinato da p_x è proprio $\overline{\{x\}}$, può capitare che punti $x, y \in X$, con $x \neq y$, abbiano la stessa chiusura, e quindi $p_x = p_y$; inoltre non è detto che un chiuso irriducibile sia la chiusura di qualche suo punto.

Nel primo caso si pensi a $|X| \geq 2$ con la topologia caotica o indiscreta, in cui $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$, $\forall x \neq y \in X$; nel secondo caso si pensi a $|X| \geq \omega$ con la topologia cofinita, in cui X è irriducibile, ma la chiusura di ogni suo punto è il punto stesso.

DEFINIZIONE 4.5.3. *Se ψ è bigettiva, cioè se ogni chiuso irriducibile di $\tau(X)$ è chiusura di uno ed un solo punto $x \in X$, lo spazio X si dice **sobrio**.*

In tal caso, $\psi : X \to pt\big(\tau(X)\big)$, è un omeomorfismo. Infatti, ψ è bigettiva e continua; verifichiamo che è anche aperta: $\forall A \in \tau(X)$ risulta

$$\begin{aligned}
\psi^{\rightarrow}(A) &= \big\{\psi(x)|x \in A\big\}\\
&= \big\{p_x|x \in A\big\}\\
&= \big\{p_x|x \in X, p_x(A) = \top\big\}\\
&= \big\{p \in pt\big(\tau(X)\big)|p(A) = \top\big\}\\
&= \varphi(A) \in \tau\big(pt\big(\tau(X)\big)\big).
\end{aligned}$$

PROPOSIZIONE 4.5.4.

(1) *Uno spazio topologico X è T_0 sse ψ è iniettiva.*
(2) *Uno spazio sobrio è T_0.*
(3) *Uno spazio T_1 è sobrio sse ogni chiuso irriducibile è un singoletto.*
(4) *Uno spazio T_2 è sobrio.*

DIMOSTRAZIONE. (1) Siano $x, y \in X$. Allora

$$\begin{aligned}
\psi(x) = \psi(y) &\Leftrightarrow\ p_x = p_y\\
&\Leftrightarrow\ x \in A \textit{ sse } y \in A,\ \forall A \in \tau(X)\\
&\Leftrightarrow\ x, y \text{ hanno gli stessi intorni.}
\end{aligned}$$

Quindi dire che X è T_0, cioè che non esistono punti distinti con gli stessi intorni, equivale a dire che ψ è iniettiva.

(2) Se X è sobrio allora ψ è bigettiva, quindi iniettiva, perciò X è T_0 per la (1).

(3) Sia X uno spazio T_1. Se X è sobrio ed F è chiuso irriducibile, allora $F \neq \emptyset$ e si ha $x \in F \Rightarrow F = \overline{\{x\}} = \{x\}$. Viceversa, se ogni chiuso irriducibile è un singoletto, allora ogni chiuso irriducibile è anche chiusura di tale punto e ovviamente solo di tale punto.

(4) E' sufficiente provare che ogni chiuso irriducibile è un singoletto. Se F è un chiuso contenente due punti distinti $x \neq y$ e se $U \in \tau(x)$, $V \in \tau(y)$, $U \cap V = \emptyset$, allora $F \backslash U$ ed $F \backslash V$ sono chiusi non vuoti strettamente contenuti in F e la cui unione è F; quindi F è riducibile. □

PROPOSIZIONE 4.5.5. *Se S è un locale sono equivalenti le seguenti condizioni*

(i) $\varphi : S \to \mathcal{P}\big(pt(S)\big)$ *è iniettiva.*
(ii) $\varphi : S \to \tau\big(pt(S)\big)$ *è un isomorfismo di frames.*
(iii) $\forall a, b \in S : a \not\leq b \Rightarrow \exists p \in pt(S) : p(a) = \top$ *e* $p(b) = \bot$.

DIMOSTRAZIONE. "(i) $\Rightarrow$ (ii)" Se $\varphi : S \to \mathcal{P}\big(pt(S)\big)$ è iniettiva, la sua ridotta è bigettiva ed è ancora un morfismo di frame. La tesi segue allora dalla Proposizione 3.3.8.

"(ii) $\Rightarrow$ (iii)" Se $\varphi : S \to \tau\big(pt(S)\big)$ è un isomorfismo di frames e $a, b \in S$

sono tali che $a \not\leq b$, allora $\varphi(a) \not\leq \varphi(b)$, quindi $\exists p \in pt(S)$ tale che $p(a) = \top$ e $p(b) = \bot$.

"$(iii) \Rightarrow (i)$" Se $a, b \in S$ e $a \neq b$, in particolare $a \not\leq b$, allora $\exists p \in pt(S)$ tale che $p(a) = \top$ e $p(b) = \bot$, quindi $\varphi(a) \neq \varphi(b)$. Dunque φ è iniettiva.

$\square$

DEFINIZIONE 4.5.6. *Un locale S si dice* ***spaziale*** *se verifica una delle condizioni equivalenti della* Proposizione 4.5.5.

PROPOSIZIONE 4.5.7. *Se $\big(X, \tau(X)\big)$ è uno spazio topologico allora $\tau(X)$ è un locale spaziale.*

DIMOSTRAZIONE. Se $A, B \in \tau(X)$ e $A \not\subseteq B$, sia $a \in A \setminus B$. Il punto p_a verifica allora le condizioni $p_a(A) = \top$ e $p_a(B) = \bot$. $\square$

PROPOSIZIONE 4.5.8. *Se S è un locale, allora lo spazio $pt(S)$ è sobrio.*

DIMOSTRAZIONE. Per ottenere la tesi dobbiamo provare che la funzione

$$\psi : pt(S) \to pt\big(\tau\big(pt(S)\big)\big)$$

è bigettiva.

Suriettività: Se $t \in pt\big(\tau\big(pt(S)\big)\big)$, poniamo $p = t \circ \varphi$ con $\varphi : S \to \tau\big(pt(S)\big)$ morfismo di frame definito in precedenza. Allora $p \in pt(S)$ e si verifica che $\psi(p) = t$. Infatti per ogni aperto $\varphi(a) \in \tau\big(pt(S)\big)$, con $a \in S$, si ha

$$\begin{aligned}\psi(p)\big(\varphi(a)\big) = \top &\Leftrightarrow p \in \varphi(a)\\ &\Leftrightarrow p(a) = \top\\ &\Leftrightarrow t\big(\varphi(a)\big) = \top.\end{aligned}$$

Iniettività: $\forall p, q \in pt(S)$, $p \neq q$, $\exists a \in S$ tale che $p(a) \neq q(a)$. Se $p(a) = \top$ e $q(a) = \bot$, allora $p \in \varphi(a)$ e $q \notin \varphi(a)$.

Ne segue che $pt(S)$ è uno spazio T_0, quindi ψ è iniettiva. $\square$

OSSERVAZIONE 4.5.9. 1. L'assioma di sobrietà è indipendente dall'assioma T_1.

Sia $\tau(X)$ la topologia cofinita sull'insieme infinito X. $(X, \tau(X))$ è T_1 ma non è sobrio; infatti il chiuso X è irriducibile (X è infinito e i chiusi propri sono finiti) e non è un singoletto.

Sia $\tau(Y)$ la topologia del punto particolare $y \in Y$ su Y con almeno due punti. $\big(pt(\tau(Y)), \tau\big(pt(\tau(Y))\big)\big)$ è sobrio, per la Proposizione 4.5.8 ma non è T_1; infatti, se $\varphi(A)$, con $A \in \tau(Y)$ è un qualsiasi aperto non banale in $pt\big(\tau(Y)\big)$, il punto $\psi(y) = p_y : \tau(Y) \to \mathit{2}$ tale che $p_y(B) = \top$ sse $y \in B$ appartiene a $\varphi(A)$: infatti, $\psi(y) \in \varphi(A) \Leftrightarrow \psi(y)(A) = \top \Leftrightarrow y \in A$ che è certamente vero.

2. Dalla Proposizione 4.5.8 segue che se $X \in |\mathbf{Top}|$, allora lo spazio $pt\big(\tau(X)\big)$ è sobrio e si dice *soberificazione* di X.

PROPOSIZIONE 4.5.10. *L'aggiunzione*

$$\tau \dashv pt$$

diventa una equivalenza se si restringe alle sottocategorie piene degli spazi topologici sobri, $\mathbf{Sob} \subseteq \mathbf{Top}$, *e dei locali spaziali* $\mathbf{SpatLoc} \subseteq \mathbf{Loc}$.

DIMOSTRAZIONE. Con riferimento alla dimostrazione del Teorema 4.4.4 osserviamo innanzitutto che τ, ristretto alla categoria **Sob**, ha immagine nella categoria **SpatLoc** per la Proposizione 4.5.7 ed il funtore *pt*, ristretto alla categoria **SpatLoc**, ha immagine nella categoria **Sob** per la Proposizione 4.5.8. L'aggiunzione $\tau \dashv pt$ rimane valida per i funtori considerati tra **Sob** e **SpatLoc**. Inoltre, l'unità dell'aggiunzione in tal caso è un isomorfismo naturale perchè per ogni spazio sobrio X la funzione $\psi : X \to pt\big(\tau(X)\big)$ definita in precedenza, è un isomorfismo. Analogamente, per ogni locale spaziale la funzione $\varphi : S \to \tau\big(pt(S)\big)$ è un isomorfismo, quindi anche la counità dell'aggiunzione è un isomorfismo naturale.

$\square$