Premessa

Gli argomenti che tratteremo faranno costantemente riferimento alla **teoria intuitiva degli insiemi**, nell'ambito della quale assumeremo di poter operare tutte le costruzioni tradizionalmente considerate che portano alla creazione di nuovi insiemi a partire da insiemi dati. In particolare, terremo presente, come di consueto nell'ambito della "matematica classica", che si possono costruire i seguenti insiemi con le note modalità che non descriviamo esplicitamente:

- Per ogni insieme X e per ogni proprietà $\mathcal{P}$, si può considerare l'insieme $\{x \in X | \mathcal{P}(x)\}$. In particolare, si può considerre l'insieme vuoto.
- Per ogni insieme X si può considerare l'insieme $\mathcal{P}(X)$ dei suoi sottoinsiemi, detto powerset di X.
- Considerati due qualsiasi insiemi X e Y, si possono costruire:
  - l'insieme $\{X, Y\}$.
  - l'insieme unione $X \cup Y$.
  - l'insieme intersezione $X \cap Y$.
  - l'insieme prodotto cartesiano $X \times Y$.
  - l'insieme differenza $X \setminus Y$.
  - l'insieme Y^X delle funzioni da X in Y.
- Considerata una qualsiasi famiglia di insiemi, con indici in un insieme I, $(X_i)_{i \in I}$, cioè una funzione che ad ogni $i \in I$ associa un insieme X_i si possono considerare:
  - l'insieme degli insiemi della famiglia $\{X_i | i \in I\}$.
  - l'unione degli insiemi della famiglia $\bigcup \{X_i | i \in I\}$.
  - l'intersezione degli insiemi della famiglia $\bigcap \{X_i | i \in I\}$, nell'ipotesi $I \neq \emptyset$.
  - il prodotto cartesiano degli insiemi della famiglia

$$\prod_{i \in I} X_i = \left\{ f : I \to \bigcup \{X_i | i \in I\} | f(i) \in X_i, \ \forall i \in I \right\}.$$

- Si può considerare l'insieme di tutti i numeri naturali, ovvero esiste un insieme con infiniti elementi.

Tale contesto della teoria degli insiemi risulta inadeguato, perchè troppo ristretto, per la **teoria delle categorie** in cui si ha anche l'esigenza di considerare la totalità di enti matematici di qualche tipo come tutti gli insiemi, tutti i gruppi, tutte le funzioni e così via. La nota antinomia di Russell spiega perchè ciò non è possibile restando nell'ambito della teoria degli insiemi tradizionali.

Le esigenze sopra considerate riconducono tutte alla necessità di considerare la totalità di tutti gli insiemi che, evidentemente, non è un insieme.

Chiamando ***classe*** ogni collezione di insiemi ed assumendo la possibilità di considerare, per ogni proprietà $\mathcal{P}$, la classe di tutti gli insiemi che verificano tale proprietà $\mathcal{P}$, si può ottenere la classe $\mathcal{U}$ di tutti gli insiemi, detta comunemente ***universo***.

Inoltre, si ha quanto segue:

- Ogni insieme è una classe ma ci sono classi che non sono insiemi e che si chiamano ***classi proprie***.
- Una classe è un insieme *sse* è elemento di qualche classe .
- Le costruzioni di nuovi insiemi a partire da insiemi di insiemi, tra cui quelle precedentemente descritte, si possono estendere alle classi.
- Anche l'antinomia di Russell si estende alle classi cosicchè non è possibile considerare la classe di tutte le classi.

Le considerazioni che abbiamo fatto in merito alla necessità di introdurre il concetto di classe e il verificarsi, in teoria delle categorie, di situazioni in cui è opportuno considerare la totalità di tutte le classi conducono al concetto di ***conglomerato*** definito come una qualsiasi collezione di classi.

Le considerazioni fatte per le classi si estendono ai conglomerati e questo processo di estensione potrebbe ulteriormente proseguire, ma non avremo necessità di farlo.

Osserviamo che tra gli assiomi della teoria degli insiemi, estesi poi alle classi e ai conglomerati, assumeremo, senza precisare in quali casi risulta necessario, il tradizionale **assioma della scelta**; così ad esempio assumeremo che ogni funzione tra conglomerati (in particolare fra classi o fra insiemi) ha una restrizione iniettiva.