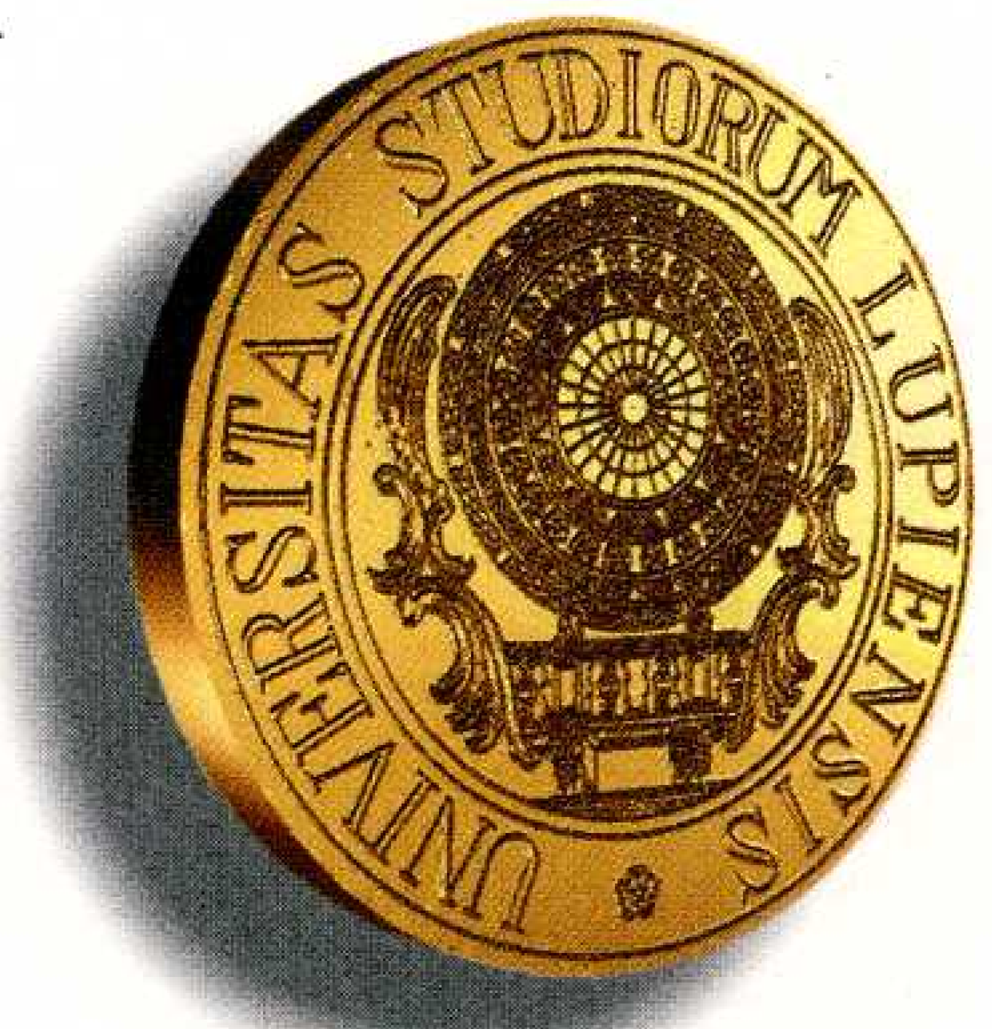
Università degli Studi di Lecce
Dipartimento di Matematica
"Ennio De Giorgi"

**Anna Frascella** **Cosimo Guido**

Dipartimento di Matematica
"Ennio De Giorgi"
Università degli Studi di Lecce

# Strutture Topologiche

## Categorie, Reticoli e Topologia Generale




**Quaderno 1/2005: ISBN 88-8305-023-1**
**Università di Lecce - Coordinamento di SIBA**

Università degli Studi di Lecce
Dipartimento di Matematica
"Ennio De Giorgi"

**Anna Frascella** **Cosimo Guido**

Dipartimento di Matematica
"Ennio De Giorgi"
Università degli Studi di Lecce

# Strutture Topologiche

## Categorie, Reticoli
## e
## Topologia Generale

**Quaderno 1/2005: ISBN 88-8305-023-1**
**Università di Lecce - Coordinamento di SIBA**

QUADERNI DI MATEMATICA

Una pubblicazione a cura del

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

"ENNIO DE GIORGI"

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI LECCE

---



---

I QUADERNI del Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Lecce documentano gli aspetti di rilievo dell'attività di ricerca e didattica del Dipartimento. Nei Quaderni sono pubblicati articoli di carattere matematico che siano:

(1) lavori di rassegna e monografie su argomenti di ricerca;
(2) testi di seminari di interesse generale, tenuti da docenti o ricercatori del Dipartimento o esterni;
(3) lavori di specifico interesse didattico.

La pubblicazione dei lavori è soggetta all'approvazione del Comitato di Redazione, che decide tenendo conto del parere di un *referee*, nominato di volta in volta sulla base delle competenze specifiche.

**Quaderno 1/2005: ISBN 88-8305-023-1**
**Università di Lecce - Coordinamento di SIBA**

# Strutture Topologiche

## Categorie, Reticoli
## e
## Topologia Generale

Anna Frascella

Cosimo Guido

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI LECCE
LECCE-ARNESANO P. O. BOX 193
73100 LECCE, ITALIA

*anna.frascella@unile.it*
*cosimo.guido@unile.it*

2000 *Mathematics Subject Classification.*

03E72, 06B15, 06B23, 06D05, 06D10
06D20, 06D22, 06E05, 06E15, 18A05
18A40, 18B30, 18B35, 54A40, 54B30

*Key words and phrases.*

Teoria degli insiemi fuzzy
Reticoli completi e distributivi
Teoremi di rappresentazione
Algebre di Boole e di Heyting
Categorie e funtori
Topologia generale
Topologia senza punti
Topologia fuzzy

# INTRODUZIONE

Questo Quaderno vuole essere una introduzione agli aspetti più formali ed astratti della cosiddetta **Topologia Generale** che, a partire dagli anni '30, con le ricerche di *M. H. Stone*, proseguendo poi negli anni '50, con la nascita della cosiddetta **topologia senza punti** e poi negli anni '70, con lo sviluppo della cosiddetta **topologia fuzzy**, ha trovato agganci sempre più profondi con la teoria dei **reticoli**.

La **teoria delle categorie** è uno strumento di grande efficacia per una trattazione unitaria delle tematiche considerate e consente una descrizione chiara e completa dei profondi legami che ci sono tra la topologia e la teoria dei reticoli.

Lo scopo è quello di fornire, in modo sufficientemente dettagliato e con una esposizione autocomprensiva, i concetti di base necessari e di far intravedere come questi strumenti possano essere utilizzati per nuove ricerche.

Così, da una parte si mostra come sia possibile affrontare in modo più semplice ed elegante argomenti, anche difficili, già studiati in passato. Un esempio è dato dai *Teoremi di Rappresentazione* di classi di reticoli ottenuti negli anni '30 da M. H. Stone, che fu il primo a scoprire importanti legami tra la topologia ed i reticoli completi.

Dall'altra, si accenna alla possibilità di affrontare problematiche di più recente sviluppo. Ne è un esempio la cosiddetta *teoria degli insiemi fuzzy* (più precisamente si dovrebbe parlare di insiemi costruiti su un reticolo completo $L$, o, come attualmente si usa chiamarli, $L$-insiemi) le cui applicazioni alla topologia hanno avuto un enorme sviluppo a partire dagli anni '70 ed hanno raggiunto attualmente un notevole livello di approfondimento (si veda [**7, 13**]).

Il Quaderno raccoglie argomenti trattati ed utilizzati dagli autori in corsi di insegnamento, seminari e nell'attività di ricerca, presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Lecce.

In particolare, l'impostazione generale si basa sulla struttura del corso di *Topologia Generale* per la Laurea Specialistica in Matematica, già secondo modulo di *Topologia* per il Corso di Laurea in Matematica del vecchio ordinamento svolti presso questo Dipartimento di Matematica a partire dall'a.a. 1995-1996. Gli argomenti esposti in tali corsi sono stati integrati con l'inserimento di approfondimenti e sviluppi, alcuni relativi a un ciclo di seminari tenuto, sempre presso questo Dipartimento, per gli studenti del Dottorato in Matematica nell'a.a. 2001-2002, altri trattati da laureandi nelle loro Tesi di Laurea (si veda [**3, 9**]), altri ancora oggetto di ricerche attualmente svolte presso questo Dipartimento di Matematica.

Riteniamo che tale Quaderno possa essere proficuamente utilizzato sia dagli studenti del Corso di Laurea Specialistica, che dagli studenti dei Corsi di Dottorato in Matematica, anche indipendentemente dall'eventuale interesse per gli argomenti specifici di topologia. L'introduzione alla *Teoria delle Categorie* (Cap. 1), alla *Teoria dei Reticoli* (Cap. 2) e dei *Reticoli Completi* (Cap. 3), alla *Teoria degli Insiemi Fuzzy* (Cap. 6) contengono infatti, coordinati fra loro ed unificati nel linguaggio, alcuni concetti fondamentali, sicuramente utili in vari campi della matematica. Tra gli altri citiamo i concetti di *Funtore* (Sez. 1.6), *Trasformazione Naturale* (Sez. 1.8), *Algebra di Boole* (Sez. 2.4), *Ideale* e *Filtro* nei reticoli (Sez. 4.2), *L-insieme* (Sez. 6.1), *Operatori Powerset* e loro estensioni (Sez. 6.4).

Lecce, 6 aprile 2005

A. Frascella
C. Guido

# Premessa

Gli argomenti che tratteremo faranno costantemente riferimento alla **teoria intuitiva degli insiemi**, nell'ambito della quale assumeremo di poter operare tutte le costruzioni tradizionalmente considerate che portano alla creazione di nuovi insiemi a partire da insiemi dati. In particolare, terremo presente, come di consueto nell'ambito della "matematica classica", che si possono costruire i seguenti insiemi con le note modalità che non descriviamo esplicitamente:

- Per ogni insieme $X$ e per ogni proprietà $\mathcal{P}$, si può considerare l'insieme $\big\{x \in X | \mathcal{P}(x)\big\}$. In particolare, si può considerre l'insieme vuoto.
- Per ogni insieme $X$ si può considerare l'insieme $\mathcal{P}(X)$ dei suoi sottoinsiemi, detto powerset di $X$.
- Considerati due qualsiasi insiemi $X$ e $Y$, si possono costruire:
  - l'insieme $\{X, Y\}$.
  - l'insieme unione $X \cup Y$.
  - l'insieme intersezione $X \cap Y$.
  - l'insieme prodotto cartesiano $X \times Y$.
  - l'insieme differenza $X \setminus Y$.
  - l'insieme $Y^X$ delle funzioni da $X$ in $Y$.
- Considerata una qualsiasi famiglia di insiemi, con indici in un insieme $I$, $(X_i)_{i \in I}$, cioè una funzione che ad ogni $i \in I$ associa un insieme $X_i$ si possono considerare:
  - l'insieme degli insiemi della famiglia $\big\{X_i | i \in I\big\}$.
  - l'unione degli insiemi della famiglia $\bigcup \big\{X_i | i \in I\big\}$.
  - l'intersezione degli insiemi della famiglia $\bigcap \big\{X_i | i \in I\big\}$, nell'ipotesi $I \neq \emptyset$.
  - il prodotto cartesiano degli insiemi della famiglia

$$\prod_{i \in I} X_i = \Big\{f : I \to \bigcup \big\{X_i | i \in I\big\} | f(i) \in X_i, \ \forall i \in I\Big\}.$$

- Si può considerare l'insieme di tutti i numeri naturali, ovvero esiste un insieme con infiniti elementi.

Tale contesto della teoria degli insiemi risulta inadeguato, perchè troppo ristretto, per la **teoria delle categorie** in cui si ha anche l'esigenza di considerare la totalità di enti matematici di qualche tipo come tutti gli insiemi, tutti i gruppi, tutte le funzioni e così via. La nota antinomia di Russell spiega perchè ciò non è possibile restando nell'ambito della teoria degli insiemi tradizionali.

Le esigenze sopra considerate riconducono tutte alla necessità di considerare la totalità di tutti gli insiemi che, evidentemente, non è un insieme.

Chiamando ***classe*** ogni collezione di insiemi ed assumendo la possibilità di considerare, per ogni proprietà $\mathcal{P}$, la classe di tutti gli insiemi che verificano tale proprietà $\mathcal{P}$, si può ottenere la classe $\mathcal{U}$ di tutti gli insiemi, detta comunemente ***universo***.

Inoltre, si ha quanto segue:

- Ogni insieme è una classe ma ci sono classi che non sono insiemi e che si chiamano ***classi proprie***.
- Una classe è un insieme *sse* è elemento di qualche classe .
- Le costruzioni di nuovi insiemi a partire da insiemi di insiemi, tra cui quelle precedentemente descritte, si possono estendere alle classi.
- Anche l'antinomia di Russell si estende alle classi cosicchè non è possibile considerare la classe di tutte le classi.

Le considerazioni che abbiamo fatto in merito alla necessità di introdurre il concetto di classe e il verificarsi, in teoria delle categorie, di situazioni in cui è opportuno considerare la totalità di tutte le classi conducono al concetto di ***conglomerato*** definito come una qualsiasi collezione di classi.

Le considerazioni fatte per le classi si estendono ai conglomerati e questo processo di estensione potrebbe ulteriormente proseguire, ma non avremo necessità di farlo.

Osserviamo che tra gli assiomi della teoria degli insiemi, estesi poi alle classi e ai conglomerati, assumeremo, senza precisare in quali casi risulta necessario, il tradizionale **assioma della scelta**; così ad esempio assumeremo che ogni funzione tra conglomerati (in particolare fra classi o fra insiemi) ha una restrizione iniettiva.

CAPITOLO 1

# Categorie e Funtori

## 1.1. Categorie

DEFINIZIONE 1.1.1. *Una **categoria**, $\mathbf{C}$, è definita dai seguenti dati:*

- *Una classe $Ob(\mathbf{C})$ (o $|\mathbf{C}|$), i cui elementi sono detti oggetti della categoria $\mathbf{C}$ e sono, di solito, indicati con le lettere maiuscole dell'alfabeto, $A, B, C, \dots \in |\mathbf{C}|$.*
- *Una classe $\mathcal{M}or(\mathbf{C})$, i cui elementi sono detti morfismi ed una funzione*
$$\mathbf{C} : |\mathbf{C}| \times |\mathbf{C}| \to \mathcal{P}\big(\mathcal{M}or(\mathbf{C})\big)$$
*che associa ad ogni coppia di oggetti $(A, B)$, un insieme $\mathbf{C}(A, B)$ contenuto nella classe dei morfismi, i cui elementi sono detti morfismi dall'oggetto $A$ (detto dominio) nell'oggetto $B$ (detto codominio) e si indicano con*
$$f : A \to B \quad \textit{oppure} \quad A \xrightarrow{f} B.$$
*Si richiede, inoltre, che*
$$\{\mathbf{C}(A, B) | A, B \in |\mathbf{C}|,\ \mathbf{C}(A, B) \neq \emptyset\}$$
*sia una partizione di $\mathcal{M}or(\mathbf{C})$. $\mathbf{C}(A, B)$ è anche, a volte, denotato con $\mathcal{M}or_{\mathbf{C}}(A, B)$.*
- *Una legge di composizione parziale*
$$\circ : \mathcal{M}or(\mathbf{C}) \times \mathcal{M}or(\mathbf{C}) \to \mathcal{M}or(\mathbf{C})$$
*che soddisfa le seguenti condizioni: se $f \in \mathbf{C}(A, B)$, $g \in \mathbf{C}(B, C)$, esiste*
$$\circ(f, g) = g \circ f \in \mathbf{C}(A, C).$$
*Inoltre "$\circ$" è associativa, ovvero se $f \in \mathbf{C}(A, B)$, $g \in \mathbf{C}(B, C)$, $h \in \mathbf{C}(C, D)$, allora*
$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$
- *Per ogni $A \in |\mathbf{C}|$, esiste*
$$1_A \in \mathbf{C}(A, A)$$

*detto morfismo identico (o identità) di $A$, tale che $\forall f \in \mathbf{C}(A, B)$ e $\forall g \in \mathbf{C}(C, A)$ risulta*

$$f \circ 1_A = f \text{ ed } 1_A \circ g = g.$$

OSSERVAZIONE 1.1.2. Sia $\mathbf{C}$ una categoria. $\forall A \in |\mathbf{C}|$, $\exists | 1_A \in \mathbf{C}(A, A)$, morfismo identico di $A$. Infatti, se $i_A \in \mathbf{C}(A, A)$ è un altro morfismo identico di $A$, per le proprietà dei morfismi identici si ha

$$i_A = i_A \circ 1_A = 1_A.$$

ESEMPIO 1.1.3. (a) **Set** è la categoria degli insiemi, i cui oggetti sono gli insiemi ed i cui morfismi sono le funzioni fra insiemi che si compongono secondo la usuale composizione di funzioni. Le identità sono le funzioni identiche.

Indichiamo con **FSet** la categoria avente per oggetti gli insiemi finiti e per morfismi le funzioni fra di essi. Composizione ed identità, in questo come negli esempi dei successivi punti (b)-(i) ed (m), sono le stesse che in **Set**.

(b) **SGrp** è la categoria dei semigruppi, in cui gli oggetti sono i semigruppi ed i morfismi sono gli omomorfismi tra semigruppi.

(c) **Mon** è la categoria dei monoidi, in cui gli oggetti sono i monoidi ed i morfismi sono gli omomorfismi tra monoidi.

(d) **Grp** è la categoria dei gruppi in cui gli oggetti sono i gruppi ed i morfismi sono gli omomorfismi tra gruppi.

(e) **Rng** è la categoria degli anelli in cui gli oggetti sono gli anelli ed i morfismi sono gli omomorfismi tra anelli, cioè le funzioni che conservano la somma e il prodotto.

(f) **Field** è la categoria avente per oggetti i campi e per morfismi gli omomorfismi di campi, ovvero le funzioni che conservano le due leggi di composizione.

(g) **Vec** è la categoria degli spazi vettoriali i cui oggetti sono gli spazi vettoriali su un qualsiasi campo ed i cui morfismi sono le applicazioni lineari (si noti il punto 3. dell'Osservazione 1.1.4).

(h) **Top** è la categoria degli spazi topologici in cui gli oggetti sono gli spazi topologici ed i morfismi fra gli oggetti $(S, \sigma)$, $(T, \tau)$ sono le applicazioni

$$f : S \to T$$

che soddisfano la seguente condizione

$$f^{\leftarrow}(A) = \{x \in S | f(x) \in A\} \in \sigma, \ \forall A \in \tau,$$

ovvero sono le applicazioni continue da $(S, \sigma)$ in $(T, \tau)$.

(i) **pTop** è la categoria avente per oggetti gli spazi topologici puntati, ovvero le coppie formate da uno spazio topologico e da un punto fissato nel sostegno dello spazio; i morfismi sono le funzioni continue che portano il punto fissato nel primo oggetto nel punto fissato nel secondo.

(l) **hTop** è la categoria avente per oggetti gli spazi topologici e per morfismi le classi di omotopia di funzioni continue.

(m) Altri esempi di categorie si ottengono considerando **Set** e selezionando la classe dei morfismi; si indicano ad esempio con:

- $<<$ **Set** la categoria avente per oggetti tutti gli insiemi e per morfismi solo le funzioni iniettive.
- $>>$ **Set** la categoria avente per oggetti tutti gli insiemi e per morfismi solo le funzioni suriettive.
- $=$ **Set** la categoria avente per oggetti tutti gli insiemi e per morfismi solo le funzioni bigettive.

(n) $\mathbf{0}$ è la categoria vuota, in cui $|\mathbf{0}| = \emptyset$ e $\mathcal{M}or(\mathbf{0}) = \emptyset$.

$\mathbf{1}$ è la categoria avente un solo oggetto, $|\mathbf{1}| = \{A\}$, ed un solo morfismo, $\mathcal{M}or(\mathbf{1}) = \{1_A\}$.

$\mathbf{2}$ è la categoria avente due soli oggetti, $|\mathbf{2}| = \{A, B\}$ e due soli morfismi, $\mathcal{M}or(\mathbf{2}) = \{1_A, 1_B\}$ e così via$\cdots$

Tali categorie sono dette *categorie discrete.*

(o) Ogni classe $X$ può essere rivista come categoria, che indichiamo con $\mathbf{X}$ in cui

$$|\mathbf{X}| = X, \ \mathbf{X}(x,y) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } x \neq y \\ \{x\} & \text{se } x = y \end{cases}, \ 1_x = x \ \text{ ed } \ x \circ x = x,$$

ovvero, in esse i soli morfismi sono le identità. Se $X$ è un insieme finito, tale categoria rientra nell'esempio precedente.

(p) Se $(M, \bullet)$ è un monoide, con $e$ elemento neutro, $(M, \bullet)$ è una categoria $\mathbf{M}$ con un solo oggetto

$$|\mathbf{M}| = \{M\}, \ \mathbf{M}(M,M) = M, \ 1_M = e \ \text{ ed } \ y \circ x = y \bullet x.$$

(q) $\mathbf{Mat}_K$ è la categoria avente per oggetti tutti i numeri naturali e per morfismi fra gli oggetti $m$ ed $n$, l'insieme di tutte le matrici $m \times n$ in un fissato campo $K$, le identità $1_n : n \to n$, $n \in \mathbb{N}$, sono le matrici diagonali unitarie $n \times n$ e la composizione "$\circ$" è il prodotto righe per colonne. Si noti che, a differenza dell'Esempio (g), non si può considerare $K$ arbitrario, altrimenti $\mathbf{Mat}_K(m,n)$ non sarebbe un insieme.

(r) **Rel** è la categoria avente per oggetti gli insiemi e per morfismi le relazioni binarie fra insiemi. In **Rel**, per ogni $\mathcal{R} \subseteq X \times Y$ ed $\mathcal{S} \subseteq Y \times Z$, con $X, Y, Z \in |\mathbf{Rel}|$, la composizione fra morfismi è l'usuale composizione fra relazioni $\mathcal{S} \circ \mathcal{R} \subseteq X \times Z$, definita da

$$(x,z) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R} \ \Leftrightarrow \ \exists y \in Y : x\mathcal{R}y \text{ e } y\mathcal{S}z$$

che è una legge di composizione associativa; il morfismo identità di ogni oggetto, cioè di ogni insieme, è la relazione di uguaglianza nell'insieme stesso.

(s) Un insieme pre-ordinato, $(X, \leq)$, è una categoria, indicata con $\mathbf{X}$, in cui la classe degli oggetti è $X$ stesso ed in cui l'insieme dei morfismi da un oggetto $x \in X$ ad un oggetto $y \in X$ è

$$\mathbf{X}(x,y) = \begin{cases} \{(x,y)\} & \text{se } x \leq y \\ \emptyset & \text{altrimenti} \end{cases}, \quad 1_x = (x,x) \quad \text{e} \quad (y,z) \circ (x,y) = (x,z).$$

Osservazione 1.1.4. 1. Se $\mathbf{C}$ è una categoria, $\forall A \in |\mathbf{C}|$, l'insieme di tutti i morfismi da $A$ in se stesso, $\mathbf{C}(A,A)$, con la legge di composizione "$\circ$" è una struttura algebrica; precisamente $\big(\mathbf{C}(A,A), \circ\big)$ è un monoide.

2. Per le categorie (b)-(i) ed (m) dell'Esempio 1.1.3, i morfismi fra due oggetti nella categoria costituiscono un sottoinsieme dell'insieme dei morfismi fra i sostegni delle due strutture nella categoria **Set**. Inoltre, la composizione in tali categorie è data dalla composizione in **Set**, ed i morfismi identità sono le identità in **Set**.

3. Se $(V, +, \cdot)$ e $(W, +', \cdot')$ sono due spazi vettoriali su campi diversi, allora

$$\mathbf{Vec}\big((V,+,\cdot),(W,+',\cdot')\big) = \emptyset$$

e ciò accade anche se i sostegni dei due spazi coincidono, cioè $V = W$. **Vec**, pertanto, fornisce un esempio di categoria in cui l'insieme dei morfismi fra due oggetti fissati può essere vuoto. Altri esempi di questo tipo sono (n), (o) ed (s).

Definizione 1.1.5. *Sia* $\mathbf{C}$ *una categoria.*

$\mathbf{C}$ *si dice* ***piccola*** *se la classe degli oggetti di* $\mathbf{C}$ *è un insieme.*

$\mathbf{C}$ *si dice* ***connessa*** *se* $\mathbf{C}(A,B) \neq \emptyset$, $\forall A, B \in |\mathbf{C}|$.

$\mathbf{C}$ *si dice* ***discreta*** *se gli unici morfismi sono i morfismi identici.*

$\mathbf{C}$ *si dice* ***monoide*** *se ha un solo oggetto, ovvero* $|\mathbf{C}| = \{A\}$.

Osservazione 1.1.6. 1. In particolare, una categoria discreta si può identificare con la sua classe degli oggetti (si veda l'Esempio 1.1.3 (o)); se una categoria è discreta e piccola, allora essa può essere identificata con l'insieme che costituisce la sua classe degli oggetti.

2. Il termine categoria monoide trova giustificazione nel fatto che una tale categoria, $\mathbf{C}$, si può identificare col monoide dei morfismi dell'unico oggetto $A$ in se stesso $\big(\mathbf{C}(A,A), \bullet\big)$ (si veda l'Esempio 1.1.3 (p) e l'Osservazione 1.1.4).

3. Affinchè un insieme munito di una relazione $(X, \leq)$ sia una categoria, nel senso dell'Esempio 1.1.3 (s), è necessario e sufficiente che la relazione sia di pre-ordine; infatti la transitività della relazione equivale all'esistenza della composizione dei morfismi, mentre la riflessività equivale all'esistenza delle identità.

La seguente definizione descrive formalmente tale situazione.

DEFINIZIONE 1.1.7. *Una categoria* $\mathbf{C}$ *è detta* ***quasi ordinata*** *o* ***pre-ordinata*** *se verifica la seguente proprietà:*

$$|\mathbf{C}(X,Y)| \leq 1, \ \forall X,Y \in |\mathbf{C}|.$$

In tal caso, nella classe degli oggetti di $\mathbf{C}$, $|\mathbf{C}|$, resta definita la seguente relazione $\leq$:

$$X \leq Y \Leftrightarrow \mathbf{C}(X,Y) \neq \emptyset, \ \forall X,Y \in |\mathbf{C}|.$$

Dall'esistenza della composizione fra morfismi in $\mathbf{C}$, segue che $\leq$ è una relazione transitiva; inoltre, poiché per ogni $X \in |\mathbf{C}|$ esiste il morfismo identico su $X$, $1_X$, allora la relazione $\leq$ è riflessiva. Quindi $\leq$ è una relazione di pre-ordine e la classe degli oggetti di $\mathbf{C}$ con tale relazione è pre-ordinata.

Affinchè questa relazione definita su $|\mathbf{C}|$ sia una relazione d'ordine, occorre e basta che $\mathbf{C}$ verifichi una condizione un pò più forte della precedente, cioè:

$$|\mathbf{C}(X,Y) \cup \mathbf{C}(Y,X)| \leq 1, \ \forall X,Y \in |\mathbf{C}|.$$

In tal caso la categoria si dice ***ordinata***. Se nella disuguaglianza precedente si verifica, in particolare, l'uguaglianza, per ogni $X,Y \in |\mathbf{C}|$, allora $\leq$ è una relazione d'ordine totale. Se $\mathbf{C}$ è una categoria ordinata, la classe degli oggetti di $\mathbf{C}$ è ordinata e si indica con $(|\mathbf{C}|, \leq)$.

DEFINIZIONE 1.1.8. *Una categoria* $\mathbf{C}$ *si dice* ***concreta*** *se ogni oggetto* $A$ *di* $\mathbf{C}$ *individua univocamente un insieme* $u(A)$ *ed ogni morfismo* $f \in \mathbf{C}(A,B)$ *individua univocamente una funzione*

$$u(f) : u(A) \to u(B)$$

*dall'insieme corrispondente ad* $A$ *nell'insieme corrispondente a* $B$*, in modo tale che* $\forall f \in \mathbf{C}(A,B)$, $\forall g \in \mathbf{C}(B,C)$*, si abbia*

$$u(g \circ f) = u(g) \circ u(f)$$

*e* $\forall A \in |\mathbf{C}|$ *risulti*

$$u(1_A) = 1_{u(A)} : u(A) \to u(A).$$

Spesso il morfismo $f$ e la funzione $u(f)$ si indicano con lo stesso simbolo.

La maggior parte delle categorie analizzate nell'Esempio 1.1.3 sono categorie concrete. Ad esempio, la categoria dei gruppi, **Grp**, è una categoria concreta: infatti ad ogni gruppo $(G,*)$ si può associare il sostegno $G$ ed ogni omomorfismo di gruppi è un'applicazione tra i sostegni dei gruppi considerati.

DEFINIZIONE 1.1.9. *Sia* $\mathbf{C}$ *una categoria.*

*Una sottocategoria* $\mathbf{D}$ *di* $\mathbf{C}$*, indicata con* $\mathbf{D} \subseteq \mathbf{C}$*, è una categoria in cui:*

$$|\mathbf{D}| \subseteq |\mathbf{C}| \quad e \quad \mathbf{D}(A,B) \subseteq \mathbf{C}(A,B), \quad \forall A,B \in |\mathbf{D}|$$

*la composizione è la restrizione a* $\mathcal{M}or(\mathbf{D})$ *della composizione in* $\mathcal{M}or(\mathbf{C})$ *ed i morfismi identici in* $\mathbf{D}$ *sono i morfismi identici in* $\mathbf{C}$.

**D** *è una* ***sottocategoria piena*** *di* **C** *se*

$$\mathbf{D}(A,B) = \mathbf{C}(A,B), \quad \forall A, B \in |\mathbf{D}|.$$

OSSERVAZIONE 1.1.10. Se **D** è una sottocategoria (piena) di **C** ed **E** è una sottocategoria (piena) di **D**, allora evidentemente **E** è una sottocategoria (piena) di **C**.

ESEMPIO 1.1.11. Alcuni esempi di sottocategoria sono:

(a) $\mathbf{FSet} \subseteq \mathbf{Set}$, ed è piena.

(b) $\mathbf{Mon} \subseteq \mathbf{SGrp}$: infatti, ogni monoide è un semigruppo ed ogni omomorfismo di monoidi è un omomorfismo di semigruppi che porta l'elemento neutro della prima struttura nell'elemento neutro della seconda. **Mon**, però, non è una sottocategoria piena di **SGrp**, infatti si ha che un'applicazione fra i sostegni di due monoidi che sia un omomorfismo di semigruppi è un omomorfismo di monoidi solo se verifica l'ulteriore condizione relativa all'elemento neutro, non automaticamente realizzata.

(c) $\mathbf{Grp} \subseteq \mathbf{Mon}$ ed è piena.

(d) $\mathbf{Grp} \subseteq \mathbf{SGrp}$ ed è piena.

OSSERVAZIONE 1.1.12. Se $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{D} \subseteq \mathbf{C}$ ed **E** è piena sia in **C** che in **D** ciò non implica che **D** sia piena in **C**, come mostra facilmente l'esempio in cui $\mathbf{C} = \mathbf{SGrp}$, $\mathbf{D} = \mathbf{Mon}$ ed $\mathbf{E} = \mathbf{Grp}$.

DEFINIZIONE 1.1.13. *Sia* **C** *una categoria. Se esiste una relazione d'equivalenza* $\sim$ *in* $\mathcal{M}or(\mathbf{C})$ *tale che*

$$\begin{gathered} f \in \mathbf{C}(A,B) \quad g \in \mathbf{C}(B,C) \ e \ f \sim f', \ g \sim g' \\ \Downarrow \\ f' \in \mathbf{C}(A,B) \quad g' \in \mathbf{C}(B,C) \ e \ g \circ f \sim g' \circ f' \end{gathered}$$

*allora si definisce* ***categoria quoziente*** *di* **C** *relativamente alla relazione* $\sim$*, denotata con* $\mathbf{C}/\sim$*, la categoria avente per oggetti i medesimi oggetti di* **C** *e per morfismi le classi di equivalenza dei morfismi di* **C**.

ESEMPIO 1.1.14. **hTop** è la categoria quoziente di **Top** relativamente alla relazione di omotopia definita da:

$$\begin{aligned} f, g : S \to T \text{ continue}, \ f \sim g \ \Leftrightarrow \ & \exists H : S \times I \to T \text{ continua t.c.} \\ & H(s,0) = f(s), \ H(s,1) = g(s), \quad \forall s \in S. \end{aligned}$$

DEFINIZIONE 1.1.15. *Siano* $\mathbf{C}_1$ *e* $\mathbf{C}_2$ *due categorie. Si definisce* ***categoria prodotto*** *di* $\mathbf{C}_1$ *per* $\mathbf{C}_2$*, indicata con* $\mathbf{C}_1 \times \mathbf{C}_2$*, la categoria avente come classe degli oggetti il prodotto cartesiano delle classi degli oggetti di* $\mathbf{C}_1$ *e* $\mathbf{C}_2$*,*

$$|\mathbf{C}_1 \times \mathbf{C}_2| = |\mathbf{C}_1| \times |\mathbf{C}_2|$$

*e come morfismi fra gli oggetti* $(A,X)$*,* $(B,Y)$*, le coppie* $(f,g)$*, tali che* $f \in \mathbf{C}_1(A,B)$ *e* $g \in \mathbf{C}_2(X,Y)$.

*Se* $(f, h) \in \mathbf{C}_1 \times \mathbf{C}_2\big((A, X), (B, Y)\big)$ *e* $(g, k) \in \mathbf{C}_1 \times \mathbf{C}_2\big((B, Y), (C, Z)\big)$, *allora la composizione in* $\mathbf{C}_1 \times \mathbf{C}_2$ *è data da*

$$(g, k) \circ (f, h) = (g \circ f, k \circ h).$$

*L' associatività della composizione delle singole componenti garantisce l'associatività della composizione tra le coppie.*

*Il morfismo identico di un oggetto* $(A, X)$ *è la coppia dei singoli morfismi identici di* $A$ *in* $\mathbf{C}_1$ *e di* $X$ *in* $\mathbf{C}_2$*, cioè*

$$1_{(A,X)} = (1_A, 1_X).$$

## 1.2. Proprietà dei Morfismi

Definizione 1.2.1. *Sia* $\mathbf{C}$ *una categoria e siano* $A, B \in |\mathbf{C}|$ *ed* $f \in \mathbf{C}(A, B)$*. Si dice che:*

(a) $f$ *è una* ***sezione*** *se è invertibile a sinistra, cioè*
$$\exists f' \in \mathbf{C}(B, A) \text{ tale che } f' \circ f = 1_A.$$
(b) $f$ *è una* ***retrazione*** *se è invertibile a destra, cioè*
$$\exists f'' \in \mathbf{C}(B, A) \text{ tale che } f \circ f'' = 1_B.$$
(c) $f$ *è un* ***isomorfismo*** *se è invertibile a sinistra e a destra.*

Osservazione 1.2.2. 1. Dall'associatività della composizione di morfismi segue subito che se $f$ è un isomorfismo allora ogni inversa a destra coincide con ogni inversa a sinistra. Infatti, se $f \in \mathbf{C}(A, B)$ ed

$$f' \in \mathbf{C}(B, A) \text{ è tale che } f' \circ f = 1_A$$

ed

$$f'' \in \mathbf{C}(B, A) \text{ è tale che } f \circ f'' = 1_B,$$

allora

$$f' = f' \circ (f \circ f'') = (f' \circ f) \circ f'' = f''.$$

Quindi c'è un'unica inversa a destra che coincide con l'unica inversa a sinistra.

In tal caso il morfismo $f' = f'' : B \to A$ si indica con $f^{-1}$ ed è detto l'inverso di $f$.

Segue facilmente che se $f$ è invertibile, allora $f^{-1}$ è invertibile ed

$$(f^{-1})^{-1} = f.$$

2. In una categoria concreta si ha evidentemente:

$f$ sezione $\Rightarrow$ $f$ iniettiva.
$f$ retrazione $\Rightarrow$ $f$ suriettiva.
$f$ isomorfismo $\Rightarrow$ $f$ bigettiva.

Le implicazioni inverse sono vere in alcune categorie, come **Set** e **Vec**, e sono false in altre, come **Top**; infatti, se $X$ è un insieme, $|X| \geq 2$, $\delta$ la topologia discreta e $\vartheta$ la topologia caotica su $X$, $i_X : (X, \delta) \to (X, \vartheta)$ è continua, quindi è un morfismo in **Top**, ma la sua unica possibile inversa (a sinistra e a destra) $i_X : (X, \vartheta) \to (X, \delta)$ non è un morfismo in **Top**.

DEFINIZIONE 1.2.3. *Sia* $\mathbf{C}$ *una categoria e siano* $A, B \in |\mathbf{C}|$ *ed* $f \in \mathbf{C}(A, B)$. *Si dice che:*

(a) $f$ *è un **monomorfismo** se è cancellabile (semplificabile) a sinistra, ovvero se* $\forall g, g' \in \mathbf{C}(A', A)$,
$$f \circ g = f \circ g' \;\Rightarrow\; g = g'.$$
(b) $f$ *è un **epimorfismo** se è cancellabile (semplificabile) a destra, ovvero se* $\forall h, h' \in \mathbf{C}(B, B')$,
$$h \circ f = h' \circ f \;\Rightarrow\; h = h'.$$
(c) $f$ *è un **bimorfismo** se è cancellabile (semplificabile) sia a destra che a sinistra.*

PROPOSIZIONE 1.2.4. *In ogni categoria* $\mathbf{C}$, $\forall f \in \mathbf{C}(A, B)$, *si hanno le seguenti implicazioni:*

(1) $f$ *sezione* $\Rightarrow f$ *monomorfismo.*
(2) $f$ *retrazione* $\Rightarrow f$ *epimorfismo.*
(3) $f$ *isomorfismo* $\Rightarrow f$ *bimorfismo.*

DIMOSTRAZIONE. (1) Sia $f$ una sezione. Se $g, g' \in \mathbf{C}(A', A)$ sono tali che $f \circ g = f \circ g'$ e se $f' \in \mathbf{C}(B, A)$ è inversa a sinistra di $f$, allora $f' \circ f \circ g = f' \circ f \circ g' \Rightarrow 1_A \circ g = 1_A \circ g' \Rightarrow g = g'$, ovvero $f$ è un monomorfismo.
Le verifiche di (2) e (3) sono analoghe. □

OSSERVAZIONE 1.2.5. In una categoria concreta, $\forall f \in \mathbf{C}(A, B)$, si hanno le seguenti implicazioni:

$f$ iniettiva $\Rightarrow f$ monomorfismo.
$f$ suriettiva $\Rightarrow f$ epimorfismo.
$f$ bigettiva $\Rightarrow f$ bimorfismo.

DEFINIZIONE 1.2.6. *Una categoria* $\mathbf{C}$ *si dice **bilanciata** se per ogni* $f \in \mathcal{M}or(\mathbf{C})$, *si ha*
$$f \text{ isomorfismo} \Leftrightarrow f \text{ bimorfismo}.$$

ESEMPIO 1.2.7. (a) **Set** e **Vec** sono categorie bilanciate; infatti, nella teoria degli insiemi e nella teoria degli spazi vettoriali si dimostra che, per ogni morfismo $f$:

$f$ è invertibile a sinistra $\Leftrightarrow f$ è iniettivo $\Leftrightarrow f$ è semplificabile a sinistra.

$f$ è invertibile a destra $\Leftrightarrow f$ è suriettivo $\Leftrightarrow f$ è semplificabile a destra.

$f$ è invertibile $\Leftrightarrow f$ è bigettivo $\Leftrightarrow f$ è semplificabile a sinistra e a destra.

(b) **Top** non è bilanciata; infatti, se $(X, \tau)$ e $(X, \tau')$ sono due spazi topologici e $\tau \subset \tau'$, l'applicazione identica di $X$, $i_X : X \to X$, è un'applicazione continua da $(X, \tau')$ in $(X, \tau)$. Inoltre, $i_X$ è bigettiva ed essendo **Top** una categoria concreta, quindi $i_X$ è un bimorfismo. Ma la funzione $i_X$ ammette un'unica inversa a sinistra

$$i_X : (X, \tau) \to (X, \tau')$$

che però non è un'applicazione continua, ovvero $i_X$ non è invertibile a sinistra in **Top** e quindi **Top** non è una categoria bilanciata.

C'è da osservare che in **Top** le implicazioni dell'Osservazione 1.2.5 sono invertibili, quelle dell'Osservazione 1.2.2 (2.) evidentemente no.

(c) **HComp**, sottocategoria piena di **Top** degli spazi topologici compatti di Hausdorff è una categoria bilanciata; la verifica non è banale e segue dal fatto che uno spazio compatto di Hausdorff è compatto massimale ed è di Hausdorff minimale.

(d) **SGrp**, **Mon** e **Rng** non sono categorie bilanciate, infatti, l'inclusione $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ è un bimorfismo in **Mon**, **SGrp** e **Rng**, ma non è un isomorfismo. Questo esempio mostra anche che almeno la seconda, quindi la terza delle implicazioni dell'Osservazione 1.2.5 non sono invertibili.

PROPOSIZIONE 1.2.8. *Sia* $\mathbf{C}$ *una categoria.*
*Se* $f \in \mathbf{C}(A, B)$ *e* $g \in \mathbf{C}(B, C)$ *allora*

(1) $f$, $g$ *sezioni (retrazioni, isomorfismi, rispettivamente)* $\Rightarrow$ $g \circ f$ *sezione (retrazione, isomorfismo, rispettivamente).*
(2) $f$, $g$ *monomorfismi (epimorfismi, bimorfismi, rispettivamente)* $\Rightarrow$ $g \circ f$ *monomorfismo (epimorfismo, bimorfismo, rispettivamente).*
(3) $g \circ f$ *monomorfismo (sezione, rispettivamente)* $\Rightarrow$ $f$ *monomorfismo (sezione, rispettivamente).*
(4) $g \circ f$ *epimorfismo (retrazione, rispettivamente)* $\Rightarrow$ $g$ *epimorfismo (retrazione, rispettivamente).*

DIMOSTRAZIONE. (1) Se $f$ e $g$ sono sezioni, allora siano $h : B \to A$ e $k : C \to B$ tali che $h \circ f = 1_A$ e $k \circ g = 1_B$; considerata $h \circ k : C \to A$ si ha che $(h \circ k) \circ (g \circ f) = h \circ (k \circ g) \circ f = h \circ f = 1_A$, ovvero $g \circ f$ è una sezione.

Analogamente si procede per retrazioni ed isomorfismi.

(2) Se $f$ e $g$ sono monomorfismi, siano $h, k : D \to A$, con $(g \circ f) \circ h = (g \circ f) \circ k$; sfruttando le ipotesi e l'associatività si ha $g \circ (f \circ h) = g \circ (f \circ k)$, da cui $f \circ h = f \circ k$ e quindi $h = k$.

Si procede allo stesso modo per epimorfismi e bimorfismi.

(3) Sia $g \circ f$ un monomorfismo; se $h, k : D \to A$ sono tali che $f \circ h = f \circ k$, allora componendo a sinistra per $g$ si ha $g \circ (f \circ h) = g \circ (f \circ k)$ e per l'associatività $(g \circ f) \circ h = (g \circ f) \circ k$ da cui dall'ipotesi discende che $h = k$.

Se $g \circ f$ è una sezione, sia $h : C \to A$ la sua inversa a sinistra, allora $h \circ (g \circ f) = 1_A$; per l'associatività risulta quindi $(h \circ g) \circ f = 1_A$, ovvero $f$ è invertibile a sinistra ed ha inversa a sinistra $h \circ g$.

(4) La dimostrazione è analoga a quella della parte (3). □

PROPOSIZIONE 1.2.9. *Sia* $\mathbf{C}$ *una categoria. Se* $f \in \mathbf{C}(A, B)$ *allora sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

(*i*) *$f$ è un epimorfismo e una sezione.*
(*ii*) *$f$ è un isomorfismo.*
(*iii*) *$f$ è un monomorfismo ed una retrazione.*

DIMOSTRAZIONE. "$(i) \Rightarrow (ii)$" Affinchè $f$ sia un isomorfismo, occorre verificare che $f$ è una retrazione, ovvero è invertibile a destra. Poiché per ipotesi $f$ è invertibile a sinistra, esite $g : B \to A$ tale che $g \circ f = 1_A$; componendo a sinistra con $f$ si ha $f \circ (g \circ f) = f \circ 1_A$ allora $(f \circ g) \circ f = 1_B \circ f$ ed essendo per ipotesi $f$ un epimorfismo, quindi cancellabile a destra, si ha $f \circ g = 1_B$, ovvero $f$ è invertibile e il suo inverso $f^{-1} = g$.

"$(iii) \Rightarrow (ii)$" Poiché per ipotesi $f$ è invertibile a destra, esiste $g : B \to A$ tale che $f \circ g = 1_B$. Componendo a destra con $f$ ed usando l'associatività si ha $(f \circ g) \circ f = 1_B \circ f$ allora $f \circ (g \circ f) = f \circ 1_A$ e per la cancellabilità a sinistra di $f$ segue che $g \circ f = 1_A$, ovvero $f$ è invertibile a sinistra; pertanto $f$ risulta un isomorfismo con inverso $f^{-1} = g$.

"$(ii) \Rightarrow (i)$" e "$(ii) \Rightarrow (iii)$" seguono dalle definizioni e dalla Proposizione 1.2.4. □

PROPOSIZIONE 1.2.10. *Sia* $\mathbf{C}$ *una categoria e sia* $\mathbf{D} \subseteq \mathbf{C}$. *Se* $f \in \mathbf{D}(A, B)$ *allora si ha:*

(1) *$f$ sezione (retrazione, isomorfismo, rispettivamente) in* $\mathbf{D} \Rightarrow f$ *sezione (retrazione, isomorfismo, rispettivamente) in* $\mathbf{C}$.
(2) *$f$ monomorfismo (epimorfismo, bimorfismo, rispettivamente) in* $\mathbf{C}$ $\Rightarrow f$ *monomorfismo (epimorfismo, bimorfismo, rispettivamente) in* $\mathbf{D}$.

DIMOSTRAZIONE. (1) Se $f \in \mathbf{D}(A, B)$ è una retrazione, allora $\exists g \in \mathbf{D}(B, A)$ tale che $f \circ g = 1_B$. Poiché $\mathbf{D}(B, A) \subseteq \mathbf{C}(B, A)$, allora $f$ ha inversa a destra in $\mathbf{C}$, ovvero $f$ è una retrazione in $\mathbf{C}$.

Analogamente si dimostra la tesi per le sezioni e quindi per gli isomorfismi.

(2) Sia $f \in \mathbf{C}(A, B)$ un monomorfismo. Siano $h, k \in \mathbf{D}(C, A)$ tali che $f \circ h = f \circ k$; poiché $\mathbf{D}$ è una sottocategoria di $\mathbf{C}$, allora $h, k : C \to A$ sono morfismi in $\mathbf{C}$ tali che $f \circ h = g \circ k$ ed essendo $f$ un monomorfismo in $\mathbf{C}$, si ha $h = k$. Da ciò segue che $f$ è un monomorfismo in $\mathbf{D}$.

La tesi si ottiene in modo analogo per gli epimorfismi e quindi per i bimorfismi. □

## 1.3. Proprietà degli Oggetti

DEFINIZIONE 1.3.1. *Sia* $\mathbf{C}$ *una categoria. Se* $A, B \in |\mathbf{C}|$, $A$ *e* $B$ *si dicono* ***isomorfi*** *in* $\mathbf{C}$, *in simboli* $A \cong_{\mathbf{C}} B$, *o semplicemente* $A \cong B$, *se esiste* $f : A \to B$ *che sia un isomorfismo.*

La relazione di isomorfismo è una relazione di equivalenza nella classe degli oggetti della categoria.

PROPOSIZIONE 1.3.2. *Siano* $\mathbf{C}$ *una categoria e* $\mathbf{D} \subseteq \mathbf{C}$ *una sua sottocategoria. Se* $A, B \in |\mathbf{D}|$, *allora*

$$A \cong_{\mathbf{D}} B \;\Rightarrow\; A \cong_{\mathbf{C}} B.$$

DIMOSTRAZIONE. Segue, ovviamente, dalla Proposizione 1.2.10. □

L' implicazione inversa non è sempre verificata, come mostra il seguente esempio.

ESEMPIO 1.3.3. Sia $\mathbf{C}$ la categoria pre-ordinata con oggetti $\{\perp, a, b, \top\}$ e relazione tale che $\perp \leq a \leq b \leq a \leq \top$, e sia $\mathbf{D}$ la sottocategoria (ordinata) individuata dalla relazione $\perp \leq a \leq b \leq \top$. $a$ e $b$ sono isomorfi in $\mathbf{C}$ ma non in $\mathbf{D}$.

DEFINIZIONE 1.3.4. *Sia* $\mathbf{C}$ *una categoria e sia* $A \in |\mathbf{C}|$. $A$ *si dice* ***oggetto iniziale*** *in* $\mathbf{C}$ *se* $\forall X \in |\mathbf{C}|$, $|\mathbf{C}(A, X)| = 1$.

PROPOSIZIONE 1.3.5. *Sia* $\mathbf{C}$ *una categoria.*

(1) *Se* $A$ *e* $B$ *sono oggetti iniziali allora* $A \cong B$ *(ovviamente c'è un unico isomorfismo da* $A$ *in* $B$*).*
(2) *Se* $A$ *è un oggetto iniziale, allora* $\forall A' \in |\mathbf{C}|$ *tale che* $A' \cong A$ *risulta* $A'$ *oggetto iniziale.*

DIMOSTRAZIONE. (1) Se $A$ e $B$ sono oggetti iniziali allora $\exists| h : A \to B$ ed $\exists| k : B \to A$ e componendo si ottiene $k \circ h : A \to A$ e $h \circ k : B \to B$, ma poiché $1_A$ e $1_B$ sono per ipotesi gli unici morfismi da $A$ in sè e da $B$ in sè, si ha $k \circ h = 1_A$ e $h \circ k = 1_B$, ovvero $h$ è un isomorfismo da $A$ in $B$.

(2) Sia $A' \in |\mathbf{C}|$ tale che $A' \cong A$, allora $\exists| h : A' \to A$ isomorfismo. Per ipotesi, $\forall B \in |\mathbf{C}|$, $\exists| f : A \to B$; da ciò segue che $f \circ h : A' \to B$ è l'unico morfismo da $A'$ in $B$, infatti preso $g : A' \to B$ si ha $g \circ h^{-1} : A \to B$ e quindi $g \circ h^{-1} = f$ ovvero $g = f \circ h$. □

DEFINIZIONE 1.3.6. *Sia* $\mathbf{C}$ *una categoria e sia* $A \in |\mathbf{C}|$. $A$ *è detto* ***oggetto finale*** *o* ***terminale*** *se* $\forall X \in |\mathbf{C}|$, $|\mathbf{C}(X, A)| = 1$.

PROPOSIZIONE 1.3.7. *Sia* $\mathbf{C}$ *una categoria.*

(1) *Se* $A$ *e* $B$ *sono oggetti finali allora* $A \cong B$ *(ovviamente c'è un unico isomorfismo da* $A$ *in* $B$*).*
(2) *Se* $A$ *è un oggetto finale, allora* $\forall B \in |\mathbf{C}|$ *tale che* $B \cong A$ *risulta* $B$ *oggetto finale.*

DIMOSTRAZIONE. Analoga alla dimostrazione della Proposizione 1.3.5. □

DEFINIZIONE 1.3.8. *Sia* $\mathbf{C}$ *una categoria e sia* $A \in |\mathbf{C}|$. *A si dice* ***oggetto zero*** *se A è sia oggetto iniziale che finale.*

PROPOSIZIONE 1.3.9. *L'eventuale oggetto zero in una categoria è unico a meno di isomorfismi.*

DIMOSTRAZIONE. Segue dalle proposizioni 1.3.5 e 1.3.7. □

ESEMPIO 1.3.10. (a) In **Set**, $\emptyset$ è l'unico oggetto iniziale ed i singoletti sono gli unici oggetti finali, quindi non esiste oggetto zero.

(b) In **SGrp** l'unico oggetto iniziale è il semigruppo vuoto e i semigruppi con un solo elemento (in realtà si tratta di monoidi), sono gli unici oggetti finali e pertanto non esiste oggetto zero.

(c) In **Grp** ogni gruppo avente per sostegno il singoletto formato dall'elemento neutro è oggetto iniziale e finale, ovvero oggetto zero.

(d) In **Top** lo spazio topologico vuoto è l'unico oggetto iniziale, gli spazi topologici con un solo punto sono gli unici oggetti finali e quindi **Top** non ammette oggetto zero.

(e) In **pTop** ogni spazio topologico avente un solo punto, che ovviamente è anche il punto particolare fissato nello spazio, è oggetto iniziale e finale e quindi è oggetto zero.

(f) In **Vec** uno spazio vettoriale nullo è oggetto iniziale e oggetto finale, quindi è oggetto zero.

(g) In **Rng** e in **Field** non esistono oggetto iniziale e finale e quindi neanche oggetto zero. Infatti, da ogni oggetto in se stesso ci sono sempre gli omomorfismi identico e nullo che sono distinti tra loro.

DEFINIZIONE 1.3.11. *Sia* $\mathbf{C}$ *una categoria. Se esiste* $Z \in |\mathbf{C}|$ *che sia oggetto zero in* $\mathbf{C}$, *allora* $\forall A, B \in |\mathbf{C}|$

$$\exists | f : A \to Z \text{ ed } \exists | g : Z \to B$$

*e l'applicazione composta*

$$h = g \circ f : A \to B$$

*è detta* ***morfismo zero*** *o* ***nullo*** *da A in B.*

Dall'unicità di $f$ e $g$ segue che il morfismo nullo $h$ è univocamente determinato, una volta fissato l'oggetto zero.

Inoltre, esso non dipende dall'oggetto zero considerato. Infatti, se $Z$ e $Z'$ sono due oggetti zero di $\mathbf{C}$, allora $Z$ e $Z'$ sono isomorfi; sia $h : Z \to Z'$ l'isomorfismo. Poiché $Z'$ è oggetto zero $\exists | f' : A \to Z'$ ed $\exists | g' : Z' \to B$. In questo modo si costruiscono i seguenti diagrammi commutativi:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & Z \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"] & B \\
& Z' \arrow[ur, "g'"'] &
\end{tikzcd}
$$

da cui si ricava che $g \circ f = (g' \circ h) \circ f = g' \circ (h \circ f) = g' \circ f'$.

## 1.4. Sottooggetti ed Oggetti Quoziente

DEFINIZIONE 1.4.1. *Sia* $\mathbf{C}$ *una categoria. Se* $A \in |\mathbf{C}|$, *si dice* ***sottooggetto*** *di* $A$ *ogni coppia* $(X, \varphi)$, *con* $X \in |\mathbf{C}|$ *e* $\varphi : X \to A$ *monomorfismo.*

ESEMPIO 1.4.2. (a) In **Set** se $A$ è un insieme, i sottooggetti di $A$ sono coppie $(X, \varphi)$, con $\varphi : X \to A$ funzione iniettiva.

Evidentemente, ogni sottoinsieme di $A$ è un sottooggetto di $A$, accoppiato con la funzione inclusione.

(b) In **Vec**, **SGrp**, **Mon**, **Grp**, **Rng**, i sottospazi lineari, i sottosemigruppi, i sottomonoidi, i sottogruppi, i sottoanelli, con la corrispondente funzione inclusione sono ovviamente sottooggetti della struttura che li contiene.

DEFINIZIONE 1.4.3. *Sia* $\mathbf{C}$ *una categoria e siano* $(X, \varphi)$ *e* $(Y, \psi)$ *sottooggetti di un oggetto* $A$ *di* $\mathbf{C}$. *Si dice che:*

(1) $(X, \varphi)$ *e* $(Y, \psi)$ *sono* ***isomorfi***, *e si indica con* $(X, \varphi) \approx (Y, \psi)$, *se* $\exists f : X \to Y$ *isomorfismo tale che* $\varphi = \psi \circ f$.
(2) $(X, \varphi)$ *è* ***più piccolo di*** $(Y, \psi)$, *e si denota con* $(X, \varphi) \leq (Y, \psi)$, *se esiste un morfismo* $f : X \to Y$ *tale che* $\varphi = \psi \circ f$.

Il morfismo $f$ considerato in (2) è chiaramente un monomorfismo, come si deduce dalla Proposizione 1.2.8 (3).

Si ha allora la seguente caratterizzazione.

PROPOSIZIONE 1.4.4. *Sia* $\mathbf{C}$ *una categoria ed* $A \in |\mathbf{C}|$.

*I sottooggetti* $(X, \varphi)$, $(Y, \psi)$ *di* $A$ *sono isomorfi sse* $(X, \varphi) \leq (Y, \psi) \leq (X, \varphi)$.

DIMOSTRAZIONE. "$\Rightarrow$" Ovvia.
"$\Leftarrow$" Poiché per ipotesi $(X, \varphi) \leq (Y, \psi) \leq (X, \varphi)$ allora

$$\exists f : X \to Y \text{ t.c. } \varphi = \psi \circ f$$

e

$$\exists g : Y \to X \text{ t.c. } \psi = \varphi \circ g$$

da cui, essendo $\varphi$ e $\psi$ dei monomorfismi si ha

$$\varphi \circ 1_X = \varphi = \psi \circ f = (\varphi \circ g) \circ f = \varphi \circ (g \circ f) \;\Rightarrow\; 1_X = g \circ f$$

e
$$\psi \circ 1_Y = \psi = \varphi \circ g = (\psi \circ f) \circ g = \psi \circ (f \circ g) \;\Rightarrow\; 1_Y = f \circ g$$
ovvero $f$ è un isomorfismo e $f^{-1} = g$. $\square$

OSSERVAZIONE 1.4.5. 1. La relazione di isomorfismo $\approx$ è una relazione di equivalenza.

2. La relazione $\leq$ è di pre-ordine, ma non è, in genere, antisimmetrica.

3. Se $B$ è un insieme, sia $\mathcal{P}(B)$ l'insieme delle parti di $B$, ovvero l'insieme di tutti i sottoinsiemi di $B$ e sia $\mathcal{S}(B)$ la classe di tutti i sottooggetti di $B$ in **Set**. Ovviamente, poiché esiste almeno $(B, i_B)$ sottooggetto di $B$, $\mathcal{S}(B) \neq \emptyset$. Sia
$$H : \mathcal{S}(B) \to \mathcal{P}(B)$$
l'applicazione definita $\forall (A, \varphi) \in \mathcal{S}(B)$ da
$$H(A, \varphi) = \varphi^{\rightarrow}(A).$$

Allora si verificano facilmente le seguenti proprietà:

(1) $(A, \varphi) \approx (A', \varphi') \Leftrightarrow H(A, \varphi) = H(A', \varphi')$.
(2) $(A, \varphi) \leq (A', \varphi') \Leftrightarrow H(A, \varphi) \subseteq H(A', \varphi')$.

Pertanto, da (1) segue che l'insieme quoziente $\mathcal{S}(B)/\approx$ è in corrispondenza bigettiva con $\mathcal{P}(B)$, e da (2) discende che tale corrispondenza conserva e riflette l'ordine.

DEFINIZIONE 1.4.6. *Sia* $\mathbf{C}$ *una categoria e sia* $B \in |\mathbf{C}|$. *Un* ***oggetto quoziente*** *di* $B$ *è una coppia* $(\pi, A)$, *dove* $A \in |\mathbf{C}|$ *e* $\pi : B \to A$ *è un epimorfismo.*

DEFINIZIONE 1.4.7. *Se* $\mathbf{C}$ *è una categoria,* $B \in |\mathbf{C}|$ *e* $(\pi, A)$, $(\pi', A')$ *sono due oggetti quoziente di* $B$, *allora*

(1) $(\pi, A)$ *e* $(\pi', A')$ *si dicono isomorfi se* $\exists f : A \to A'$ *isomorfismo tale che* $\pi' = f \circ \pi$.
(2) $(\pi, A)$ *è più grande di* $(\pi', A')$, *in simboli* $(\pi, A) \geq (\pi', A')$, *se esiste un morfismo* $f : A \to A'$ *tale che* $\pi' = f \circ \pi$.

Il morfismo $f$ considerato in (2) è chiaramente un epimorfismo, come si deduce dalla Proposizione 1.2.8 (4).

OSSERVAZIONE 1.4.8. Sia $A$ un insieme e siano $\mathbf{E}(A)$ l'insieme di tutte le relazioni di equivalenza su $A$ e $\mathcal{K}(A)$ l'insieme di tutti gli oggetti quoziente su $A$ in **Set**. Sia, inoltre,
$$H : \mathcal{K}(A) \to \mathbf{E}(A)$$
l'applicazione definita $\forall (\pi, B) \in \mathcal{K}(A)$, da
$$H(\pi, B) = \big\{(x, y) \in A \times A | \pi(x) = \pi(y)\big\}.$$

Allora

(1) $(\pi, B)$ e $(\pi', B')$ sono isomorfi $\Leftrightarrow H(\pi, B) = H(\pi', B')$.
(2) $(\pi, B) \geq (\pi', B') \Leftrightarrow H(\pi, B) \subseteq H(\pi', B')$.

Quindi da (1) discende che ogni classe di equivalenza di oggetti quoziente di $A$ è univocamente associata ad una relazione di equivalenza su $A$ con una corrispondenza bigettiva che, per (2), conserva e riflette l'ordine.

ESEMPIO 1.4.9. (a) In costruzioni algebriche come **Vec**, **SGrp**, **Mon**, **Grp**, **Rng**, le classi di equivalenza rispetto alla relazione di isomorfismo di oggetti quoziente di un oggetto $A$ corrispondono bigettivamente alle relazioni di congruenza su $A$, ovvero alle relazioni di equivalenza sull'insieme sostegno di $S$ che sono compatibili con le operazioni.

(b) In **Top** le classi di equivalenza rispetto alla relazione di isomorfismo di oggetti quoziente di un oggetto sono poste in corrispondenza bigettiva con l'insieme di tutte le relazioni di equivalenza sul loro insieme sostegno.

## 1.5. Dualità

DEFINIZIONE 1.5.1. *L'**opposta**, $\mathbf{C}^{op}$, di una categoria $\mathbf{C}$ ha la stessa classe di oggetti di $\mathbf{C}$ e la stessa classe di morfismi di $\mathbf{C}$, ma in modo tale che*

$$\mathbf{C}^{op}(A, B) = \mathbf{C}(B, A), \ \forall A, B \in |\mathbf{C}|.$$

Per ogni morfismo $\varphi \in \mathbf{C}^{op}(A, B)$, si indica con $\varphi^{op}$ lo stesso morfismo come elemento di $\mathbf{C}(A, B)$; si pone cioè

$$\varphi \in \mathbf{C}^{op}(A, B) \ \Leftrightarrow \ \varphi^{op} \in \mathbf{C}(B, A).$$

Ovviamente, la composizione in $\mathbf{C}^{op}$ è definita da

$$\varphi \in \mathbf{C}^{op}(A, B), \psi \in \mathbf{C}^{op}(B, C) \ \Rightarrow \ (\psi \circ \varphi)^{op} = \varphi^{op} \circ \psi^{op}$$

ed il morfismo identico $1_A$ di $A$ in $\mathbf{C}^{op}$ è tale che

$$(1_A)^{op} = 1_A.$$

ESEMPIO 1.5.2. (a) Sia $\mathbf{C} = (X, \leq)$ una categoria pre-ordinata, allora $\forall x, y \in X$, $|\mathbf{C}^{op}(x, y)| = 1 \Leftrightarrow x \geq y$.

Quindi la categoria opposta di $\mathbf{C}$ è

$$\mathbf{C}^{op} = (X, \geq).$$

(b) Sia $\mathbf{C} = (M, \bullet)$ una categoria monoide con oggetto $A$. Se $a, b \in M = \mathbf{C}(A, A) = \mathbf{C}^{op}(A, A)$, allora la composizione di $a$ con $b$ in $\mathbf{C}^{op}$ è determinata da

$$a \bullet' b = b^{op} \bullet a^{op} = b \bullet a.$$

Osserviamo che per ogni categoria $\mathbf{C}$ si ha $(\mathbf{C}^{op})^{op} = \mathbf{C}$, quindi ogni categoria è duale di un'altra categoria.

Più esplicitamente si ha la seguente uguaglianza tra conglomerati (che si tratti di conglomerati è anche ribadito nel paragrafo 1.7)

$$\{\mathbf{C}|\mathbf{C} \text{ è una categoria}\} = \{\mathbf{D}|\exists\mathbf{C} \text{ categoria } : \mathbf{D} = \mathbf{C}^{op}\}.$$

Di qualsiasi concetto, proprietà, proposizione, enunciato, $\mathcal{P}$, in una categoria $\mathbf{C}$ si possono formulare concetto, proprietà, proposizione, enunciato **duale**, $\mathcal{P}^{op}$, ottenuti sostituendo ogni morfismo con il suo opposto, quindi scambiando, per ogni morfismo, il dominio con il codominio.

Ad esempio il concetto di dominio di un morfismo ("$A$ è dominio di un morfismo in $\mathbf{C}$ se $\exists B \in |\mathbf{C}|$ ed $\exists f \in \mathbf{C}(A, B)$") ha come concetto duale quello di codominio ("$A$ è codominio di un morfismo in $\mathbf{C}$ se $\exists B \in |\mathbf{C}|$ ed $\exists g \in \mathbf{C}(B, A)$").

Un concetto $\mathcal{P}$ si dice **autoduale** se $\mathcal{P}^{op} = \mathcal{P}$.

Il concetto di morfismo identità è autoduale.

I concetti duali di sezione e monomorfismo sono quelli di retrazione ed epimorfismo. I concetti di isomorfismo e bimorfismo sono autoduali.

Il concetto duale di sottooggetto è quello di oggetto quoziente; il concetto duale di oggetto iniziale è quello di oggetto finale. Il concetto di oggetto zero è quindi autoduale.

Spesso il concetto duale $\mathcal{P}^{op}$ di un concetto $\mathcal{P}$ si denota anche mediante co-$\mathcal{P}$.

Data una proprietà $\mathcal{P}$ in $\mathbf{C}$, la proprietà duale $\mathcal{P}^{op}$ è verificata in $\mathbf{C}$ se e solo se la proprietà $\mathcal{P}$ è verificata in $\mathbf{C}^{op}$.

Si ha quindi il seguente

**Principio di dualità** per le categorie.
*Se una proprietà $\mathcal{P}$ è verificata in ogni categoria, allora la proprietà duale $\mathcal{P}^{op}$ è verificata in ogni categoria.*

Le proprietà considerate nelle categorie hanno quindi due formulazioni tra loro duali. Verificare una delle due in tutte le categorie, equivale a verificare l'altra, sempre in tutte le categorie.

## 1.6. Funtori

DEFINIZIONE 1.6.1. *Siano $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ due categorie.*
*Un **funtore** da $\mathbf{C}$ in $\mathbf{D}$, indicato con*

$$F : \mathbf{C} \to \mathbf{D} \text{ o } \mathbf{C} \xrightarrow{F} \mathbf{D}$$

*è una coppia di funzioni, generalmente indicate con lo stesso simbolo,*

$$F \equiv \big(F : |\mathbf{C}| \to |\mathbf{D}|, F : \mathcal{M}or(\mathbf{C}) \to \mathcal{M}or(\mathbf{D})\big)$$

*che verifichi le seguenti proprietà :*

(1) *se* $A, A' \in |\mathbf{C}|$ *ed* $f \in \mathbf{C}(A, A')$, *allora*

$$F(f) \in \mathbf{D}\big(F(A), F(A')\big).$$

(2) *se* $A, A', A'' \in |\mathbf{C}|$, $f \in \mathbf{C}(A, A')$ *e* $g \in \mathbf{C}(A', A'')$, *allora*

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f).$$

(3) $F(1_A) = 1_{F(A)}$, $\forall A \in |\mathbf{C}|$.

PROPOSIZIONE 1.6.2. *Se* $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *e* $G : \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ *sono funtori allora si ottiene un funtore*

$$G \circ F : \mathbf{A} \to \mathbf{C}$$

*ponendo* $\forall A \in |\mathbf{A}|$ *e* $\forall f \in \mathbf{A}(A, A')$

$$(G \circ F)(A) = G\big(F(A)\big)$$

$$(G \circ F)(f) = G\big(F(f)\big) \in \mathbf{C}\big(G(F(A)), G(F(A'))\big).$$

□

ESEMPIO 1.6.3. (a) Per ogni categoria $\mathbf{C}$ si può definire il *funtore identico* di $\mathbf{C}$

$$1_{\mathbf{C}} \equiv \big(i_{|\mathbf{C}|}, i_{\mathcal{M}or(\mathbf{C})}\big).$$

(b) Se $\mathbf{D} \subseteq \mathbf{C}$, si definisce *funtore inclusione* di $\mathbf{D}$ in $\mathbf{C}$, il funtore

$$J : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$$

che associa ad ogni oggetto di $\mathbf{D}$ il medesimo oggetto in $\mathbf{C}$ ed ad ogni morfismo in $\mathbf{D}$ il medesimo morfismo in $\mathbf{C}$.

(c) Se $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ sono due categorie e $D \in |\mathbf{D}|$, il *funtore costante* con valore $D$ è il funtore che ad ogni oggetto di $\mathbf{C}$ associa $D$ ed ad ogni morfismo fra due oggetti in $\mathbf{C}$ associa il morfismo identico dell'oggetto $D$.

(d) Se $\mathbf{C}$ è una categoria concreta, le corrispondenze già descritte in 1.1.8, che ad ogni oggetto $A$ e ad ogni morfismo $f$ di $\mathbf{C}$ associano rispettivamente $u(A)$ ed $u(f)$, determinano un funtore

$$U : \mathbf{C} \to \mathbf{Set}$$

detto *funtore dimentico.*

(e) Le corrispondenze che ad ogni spazio topologico puntato associano il suo gruppo fondamentale e ad ogni funzione continua fra due spazi topologici puntati associano l'omomorfismo indotto fra i rispettivi gruppi fondamentali, definiscono un funtore $\Pi_1 : \mathbf{pTop} \to \mathbf{Ab}$ detto *funtore omotopia.*

Un analogo funtore può essere definito su $\mathbf{hTop}$, poiché funzioni omotope determinano lo stesso omomorfismo.

(f) Le corrispondenze che ad ogni spazio topologico $(X, \tau)$ associano il suo $n$-simo gruppo di omologia singolare $H_n(X,\tau)$, con $n \in \mathbb{N}$, e ad ogni funzione continua fra due spazi topologici associano l'omomorfismo indotto fra i rispettivi gruppi di omologia singolare definiscono un funtore $H_n$ : **Top** $\to$ **Ab**, detto $n$-simo *funtore omologia*, che può anche essere definito su **hTop**.

(g) Le corrispondenze

$$X \in |\mathbf{Set}| \longmapsto \to (X) = \mathcal{P}(X) = \{A | A \subseteq X\},$$

e

$$f \in \mathbf{Set}(X,T) \longmapsto \to (f) = f^{\to} : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(T)$$

con $f^{\to}(A) = \{f(x) | x \in A\}$, $\forall A \in \mathcal{P}(X)$, definiscono un funtore

$$\to : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$$

detto *funtore powerset diretto.*

Definizione 1.6.4. *Siano* **C** *e* **D** *due categorie. Una coppia di applicazioni*

$$F \equiv \big(F : |\mathbf{C}| \to |\mathbf{D}|, F : \mathcal{M}or(\mathbf{C}) \to \mathcal{M}or(\mathbf{D})\big)$$

*che verifichi:*

(1)$'$ *se* $A, A' \in |\mathbf{C}|$, $f \in \mathbf{C}(A, A')$, *allora*

$$F(f) \in \mathbf{D}\big(F(A'), F(A)\big)$$

(2)$'$ *se* $A, A', A'' \in |\mathbf{C}|$, $f \in \mathbf{C}(A, A')$ *e* $g \in \mathbf{C}(A', A'')$, *allora*

$$F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$$

*e* (3), *come in* 1.6.1, *è detto* ***funtore controvariante.***

Esempio 1.6.5. (a) Le corrispondenze

$$X \in |\mathbf{Set}| \longmapsto \leftarrow (X) = \mathcal{P}(X),$$

e

$$f \in \mathbf{Set}(X,T) \longmapsto \leftarrow (f) = f^{\leftarrow} : \mathcal{P}(T) \to \mathcal{P}(X)$$

con $f^{\leftarrow}(B) = \{x \in X | f(x) \in B\}$, $\forall B \in \mathcal{P}(T)$, definiscono un funtore controvariante

$$\leftarrow : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$$

detto *funtore powerset inverso.*

(b) Le corrispondenze che associano ad ogni

$$V \in \mathbf{Vec} \longmapsto *(V) = V^*$$

dove $V^*$ è lo spazio vettoriale duale di $V$, e ad ogni

$$f \in \mathbf{Vec}(V, W) \longmapsto *(f) = f^* \in \mathbf{Vec}(W^*, V^*)$$

con $f^*(g) = g \circ f$, $\forall g \in W^*$, definiscono un funtore controvariante

$$* : \mathbf{Vec} \to \mathbf{Vec}$$

detto *funtore dualità* per gli spazi vettoriali.

PROPOSIZIONE 1.6.6. *Ogni funtore conserva sezioni, retrazioni e quindi isomorfismi.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ un funtore e sia $f \in \mathbf{C}(A, B)$ una sezione; per ipotesi esiste $g \in \mathbf{C}(B, A)$ tale che $g \circ f = 1_A$ e dalla compatibilità dei funtori con la composizione segue che $F(g) \circ F(f) = F(g \circ f) = F(1_A) = 1_{F(A)}$, ovvero $F(f) \in \mathbf{D}\big(F(A), F(B)\big)$ è una sezione.

La dimostrazione è analoga per retrazioni e quindi per isomorfismi. □

OSSERVAZIONE 1.6.7. 1. La proposizione 1.6.6 ha un'interessante conseguenza; essa, infatti, può essere utilizzata per verificare che alcuni oggetti in una categoria non sono isomorfi. Ad esempio, mediante il funtore omotopia si può provare che due spazi topologici non sono omeomorfi (anzi nemmeno omotopicamente equivalenti), mostrando che i loro gruppi fondamentali non sono isomorfi.

2. Non è detto che un funtore $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ rifletta isomorfismi, ovvero se $F(f)$ è un isomorfismo, non è detto che $f$ lo sia. Ad esempio, sia $U : \mathbf{Top} \to \mathbf{Set}$ il funtore dimentico. Se consideriamo l'applicazione identica $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ essa è un'applicazione continua dallo spazio topologico dato da $\mathbb{R}$ con la topologia discreta nello spazio topologico dato da $\mathbb{R}$ con la topologia naturale, ma non è un omeomorfismo, ovvero non è un isomorfismo fra i due spazi topologici pensati come oggetti di **Top**, ma, evidentemente, $U(i) = i$ è un isomorfismo in **Set**.

DEFINIZIONE 1.6.8. *Sia $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ un funtore.*

*$F$ si dice **pieno** se, $\forall A, B \in |\mathbf{C}|$, $F_{|\mathbf{C}(A,B)} : \mathbf{C}(A, B) \to \mathbf{D}\big(F(A), F(B)\big)$ è suriettiva.*

*$F$ si dice **fedele** se, $\forall A, B \in |\mathbf{C}|$, $F_{|\mathbf{C}(A,B)} : \mathbf{C}(A, B) \to \mathbf{D}\big(F(A), F(B)\big)$ è iniettiva.*

*$F$ si dice **immersione** se $F : \mathcal{M}or(\mathbf{C}) \to \mathcal{M}or(\mathbf{D})$ è iniettiva.*

*$F$ si dice **rappresentativo** (o **denso**) se $\forall B \in |\mathbf{D}|$ $\exists A \in |\mathbf{C}|$ tale che $F(A) \cong B$.*

OSSERVAZIONE 1.6.9. 1. Ovviamente, se un funtore è un'immersione allora è anche fedele.

Il funtore dimentico $U : \mathbf{Vec} \to \mathbf{Set}$ è fedele, ma non è né pieno, né denso, né un'immersione.

Il funtore dimentico $U : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}_0$ è fedele e denso ma non è né pieno, né un'immersione, avendo indicato con $\mathbf{Set}_0$ la sottocategoria piena di **Set** costituita dagli insiemi non vuoti.

Il funtore dimentico $U : \mathbf{Top} \to \mathbf{Set}$ è fedele e denso, ma non è né pieno, né un'immersione.

Il funtore dimentico $U : \mathbf{Field} \to \mathbf{Set}$ è fedele ma non è né pieno, né denso e non é un'immersione.

2. I funtori inclusione sono immersioni. Inoltre, se la sottocategoria è piena allora il funtore inclusione è pieno.

Il funtore inclusione $J : \mathbf{Haus} \to \mathbf{Top}$ della categoria degli spazi di Hausdorff è un'immersione, quindi è fedele, ed inoltre è pieno, ma non è denso.

Proposizione 1.6.10. *Se $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ è un funtore, allora valgono le seguenti proprietà:*

(1) *Se $F$ è fedele $\Rightarrow$ $F$ riflette monomorfismi, epimorfismi e bimorfismi.*
(2) *Se $F$ è fedele e pieno $\Rightarrow$ $F$ riflette sezioni, retrazioni ed isomorfismi.*
(3) *Se $F$ è fedele, pieno e denso $\Rightarrow$ $F$ conserva monomorfismi, epimorfismi, bimorfismi.*

Dimostrazione. (1) Verifichiamo che se $F$ è un funtore fedele allora $F$ riflette epimorfismi.

Sia $f \in \mathbf{C}(A, B)$, tale che $F(f) \in \mathbf{D}\big(F(A), F(B)\big)$ sia un epimorfismo e siano $f', g' \in \mathbf{C}(B, C)$ tali che $f' \circ f = g' \circ f$. Allora applicando $F$, essendo $F(f)$ un epimorfismo, si ha

$$\begin{aligned} F(f' \circ f) = F(g' \circ f) &\Rightarrow F(f') \circ F(f) = F(g') \circ F(f) \\ &\Rightarrow F(f') = F(g') \end{aligned}$$

da cui poiché $F$ è fedele si ricava $f' = g'$, ovvero $f$ è un epimorfismo.

Le altre verifiche si eseguono analogamante.

(2) Se $F$ è fedele e pieno verifichiamo che esso riflette sezioni.

Sia $f \in \mathbf{C}(A, B)$ tale che $F(f) : F(A) \to F(B)$ sia una sezione, allora esiste $g' : F(B) \to F(A)$ tale che $g' \circ F(f) = 1_{F(A)}$. Poiché per ipotesi $F$ è pieno allora esiste $f' \in \mathbf{C}(B, A)$ tale che $F(f') = g'$ e si ha $F(1_A) = 1_{F(A)} = g' \circ F(f) = F(f') \circ F(f) = F(f' \circ f)$ ed essendo $F$ fedele segue che $f' \circ f = 1_A$, ovvero $f$ è una sezione.

La dimostrazione negli altri casi è analoga.

(3) Se $F$ è fedele, pieno e denso, dimostriamo che $F$ conserva epimorfismi.

Siano $f \in \mathbf{C}(A, B)$ un epimorfismo e $h', g' \in \mathbf{D}\big(F(B), C'\big)$ tali che $g' \circ F(f) = h' \circ F(f)$. Poiché per ipotesi $F$ è denso allora $\exists C \in |\mathbf{C}|$ tale che $F(C) \cong C'$ e sia $\varphi : C' \to F(C)$ un isomorfismo; allora $\varphi \circ g', \varphi \circ h' \in \mathbf{D}(F(B), F(C))$ e poiché $F$ è pieno esistono $g, h \in \mathbf{C}(B, C)$ tali che $F(g) = \varphi \circ g'$, $F(h) = \varphi \circ h'$, da cui $g' = \varphi^{-1} \circ F(g)$ e $h' = \varphi^{-1} \circ F(h)$. Pertanto si ha $\varphi^{-1} \circ F(g) \circ F(f) = g' \circ F(f) = h' \circ F(f) = \varphi^{-1} \circ F(h) \circ F(f) \Rightarrow F(g) \circ F(f) = F(h) \circ F(f) \Rightarrow F(g \circ f) = F(h \circ f)$ ed essendo $F$ fedele risulta $g \circ f = h \circ f$ quindi essendo $f$ un epimorfismo $g = h$ da cui

$$F(g) = F(h) \Rightarrow \varphi \circ g' = \varphi \circ h' \Rightarrow g' = h'.$$

Quindi $F(f)$ è un epimorfismo.

Le altre verifiche sono analoghe. □

LEMMA 1.6.11. *Sia $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ un funtore.*
*Se $F : \mathcal{M}or(\mathbf{C}) \to \mathcal{M}or(\mathbf{D})$ è una bigezione allora $F : |\mathbf{C}| \to |\mathbf{D}|$ è una bigezione.*

DIMOSTRAZIONE. $F : |\mathbf{C}| \to |\mathbf{D}|$ iniettiva: se $A, B \in |\mathbf{C}|$ ed $F(A) = F(B)$, allora poiché $F : \mathcal{M}or(\mathbf{C}) \to \mathcal{M}or(\mathbf{D})$ è una bigezione si ha

$$1_{F(A)} = 1_{F(B)} \ \Rightarrow F(1_A) = F(1_B) \ \Rightarrow 1_A = 1_B \ \Rightarrow A = B.$$

$F : |\mathbf{C}| \to |\mathbf{D}|$ suriettiva: se $A' \in |\mathbf{D}|$ allora $1_{A'} \in \mathcal{M}or(\mathbf{D})$ quindi $\exists f \in \mathcal{M}or(\mathbf{C})$, $f : A \to B$, tale che $1_{A'} = F(f) : F(A) \to F(B)$ quindi $F(A) = A'$. □

PROPOSIZIONE 1.6.12. *Se $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ è un funtore allora sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

(*i*) *$F : \mathcal{M}or(\mathbf{C}) \to \mathcal{M}or(\mathbf{D})$ è una bigezione.*
(*ii*) *$F : |\mathbf{C}| \to |\mathbf{D}|$ è una bigezione ed il funtore $F$ è fedele e pieno.*

DIMOSTRAZIONE. "$(i) \Rightarrow (ii)$" Se $F : \mathcal{M}or(\mathbf{C}) \to \mathcal{M}or(\mathbf{D})$ è una bigezione, allora $\forall A, B \in |\mathbf{C}|$, $F_{|\mathbf{C}(A,B)} : \mathbf{C}(A,B) \to \mathbf{D}\big(F(A), F(B)\big)$ è una bigezione, ovvero $F$ è fedele e pieno, e per 1.6.11 segue la tesi.

"$(ii) \Rightarrow (i)$" $F : \mathcal{M}or(\mathbf{C}) \to \mathcal{M}or(\mathbf{D})$ iniettiva: siano $f \in \mathbf{C}(A,B)$ e $g \in \mathbf{C}(C,D)$ tali che $F(f) = F(g)$; allora $F(A) = F(C)$ e $F(B) = F(D)$ quindi per l'ipotesi $A = C$ e $B = D$. Allora $f, g \in \mathbf{C}(A,B)$ con $F(f) = F(g)$ ed essendo per ipotesi il funtore $F$ fedele segue che $f = g$.

$F : \mathcal{M}or(\mathbf{C}) \to \mathcal{M}or(\mathbf{D})$ suriettiva: Sia $f' \in \mathcal{M}or(\mathbf{D})$, $f' : A' \to B'$. Poiché $F : |\mathbf{C}| \to |\mathbf{D}|$ è una bigezione esistono $A, B \in |\mathbf{C}|$ tali che $F(A) = A'$ ed $F(B) = B'$ ed $f' \in \mathbf{D}\big(F(A), F(B)\big)$, quindi essendo $F$ pieno esiste $f \in \mathbf{C}(A,B)$, tale che $F(f) = f'$. □

DEFINIZIONE 1.6.13. *Un funtore $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ è un **isomorfismo** se esiste un funtore $G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ tale che*

$$G \circ F = 1_{\mathbf{C}} \quad e \quad F \circ G = 1_{\mathbf{D}}.$$

*Due categorie $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ si dicono **isomorfe**, in simboli $\mathbf{C} \cong \mathbf{D}$, se esiste $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ isomorfismo.*

OSSERVAZIONE 1.6.14. 1. Ovviamente il funtore $G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ della Definizione 1.6.13, univocamente determinato da $F$ e generalmente indicato con $F^{-1}$, è esso stesso un isomorfismo.

2. Nella classe di tutte le categorie la relazione di isomorfismo è una relazione di equivalenza; categorie fra loro isomorfe sono considerate sostanzialmente la stessa.

3. Dalla Proposizione 1.6.12 segue che un funtore $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ è un isomorfismo se e solo se $F : \mathcal{M}or(\mathbf{C}) \to \mathcal{M}or(\mathbf{D})$ è una bigezione o equivalentemente se e solo se $F : |\mathbf{C}| \to |\mathbf{D}|$ è una bigezione ed il funtore $F$ è fedele e pieno.

ESEMPIO 1.6.15. Se $K$ è un anello commutativo unitario, indichiamo con $K$-**Mod** la categoria concreta avente per oggetti i $K$ moduli (sinistri) e per morfismi omomorfismi di $K$-moduli. Osserviamo che se $K$ è un campo allora un $K$-modulo è uno spazio vettoriale su $K$; pertanto $\mathbf{Vec} \subseteq K\text{-}\mathbf{Mod}$. Inoltre, se $K = \mathbb{Z}$ si ha $\mathbb{Z}$-**Mod** $\cong$**Ab**. Infatti ogni gruppo abeliano $G$ è uno $\mathbb{Z}$-modulo con l'operazione definita, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\forall x \in G$, da

$$|k|x = \underbrace{x + x \cdots + x}_{|k|} \text{ e } (-k)x = -(kx)$$

ed i morfismi tra due gruppi $G$ ed $H$ sono esattamente le funzioni che sono anche morfismi di $\mathbb{Z}$-moduli tra $G$ ed $H$.

La precedente Osservazione 1.6.14 (3.) mostra che $\mathbb{Z}$-**Mod** $\cong$**Ab**.

PROPOSIZIONE 1.6.16. *Siano $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ e $G : \mathbf{D} \to \mathbf{E}$ due funtori, allora valgono le seguenti proprietà:*

(1) *Se $F$ e $G$ sono isomorfismi (immersioni, fedeli, pieni, rispettivamente) allora $G \circ F$ è un isomorfismo (immersione, fedele, pieno, rispettivamente).*
(2) *Se $G \circ F$ è un'immersione (fedele, rispettivamente) allora $F$ è un'immersione (fedele, rispettivamente).*
(3) *Se $G \circ F$ è pieno allora $G$ è pieno.*

DIMOSTRAZIONE. Le verifiche di (1), (2) e (3) seguono immediate da proprietà elementari delle funzioni tra classi. $\square$

## 1.7. Categorie di Categorie

Dalle proprietà dei funtori segue che essi agiscono come morfismi fra categorie; infatti, tra essi ha senso fare la composizione che, come visto in 1.6.1, è ancora un funtore e tale operazione è associativa, ed inoltre i funtori identici si comportano rispetto ad essa come le identità.

Queste osservazioni suggeriscono l'idea di considerare la "categoria delle categorie" per definire la quale però è necessario ovviare a due difficoltà intrinseche in una costruzione di questo tipo: innanzitutto poiché le categorie costituiscono un conglomerato, che contiene in effetti tutte le classi (si pensi alle categorie dell'Esempio 1.1.3 (o)), non si può realizzare una classe avente per oggetti tutte le categorie; inoltre, date due categorie, non è affatto vero che tutti i funtori dalla prima alla seconda categoria formino un insieme, come esplicitamente richiesto nella definizione di categoria. Questi problemi si superano se si restringe l'attenzione alle categorie piccole, nelle quali non solo la classe degli oggetti, ma anche la classe dei morfismi sono insiemi.

DEFINIZIONE 1.7.1. *La categoria* **Cat** *delle categorie piccole ha come oggetti tutte le categorie piccole, come morfismi fra due oggetti tutti i funtori tra di essi, come identità i funtori identici e come composizione l'usuale composizione fra funtori.*

OSSERVAZIONE 1.7.2. 1. Che **Cat** sia una categoria segue immediatamente dalle seguenti osservazioni:

(a) Poiché in ogni categoria piccola $\mathbf{C}$ si ha che $Ob(\mathbf{C})$ e $\mathcal{M}or(\mathbf{C})$ sono insiemi, tutte le categorie piccole formano una classe, in quanto gli elementi che costituiscono una generica categoria piccola si scelgono nella classe degli insiemi.

(b) Per lo stesso motivo, per ogni coppia di categorie piccole tutti i funtori dalla prima nella seconda categoria formano un insieme e l'unione di tutti questi insiemi è evidentemente una classe.

2. **Cat** non è una categoria piccola; infatti poiché ogni insieme è una categoria, come visto in 1.1.3 (o), si costruisce un'immersione piena da **Set** in **Cat**, e **Set** non è piccola.

DEFINIZIONE 1.7.3. *Si chiama* ***quasi categoria*** *una coppia*

$$\mathcal{A} = (\mathcal{O}, \mathcal{M})$$

*tale che*

- *$\mathcal{O}$ sia un conglomerato, i cui elementi sono chiamati oggetti.*
- *Per ogni coppia di oggetti $(A, B)$, $\mathcal{A}(A, B)$ è una classe chiamata la classe di tutti i morfismi da $A$ in $B$ denotati con $f : A \to B$, le classi $\mathcal{M}(A, B)$ sono a due a due disgiunte e la loro unione dà il conglomerato $\mathcal{M}$.*
- *Esiste una legge di composizione parziale*

  $$\circ : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$$

  *che soddisfa le seguenti condizioni: se $f \in \mathbf{C}(A, B)$, $g \in \mathbf{C}(B, C)$, esiste*

  $$\circ(f, g) = g \circ f \in \mathbf{C}(A, C).$$

  *Inoltre "$\circ$" è associativa, ovvero se $f \in \mathbf{C}(A, B)$, $g \in \mathbf{C}(B, C)$, $h \in \mathbf{C}(C, D)$, allora*

  $$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

- *Per ogni $A \in \mathcal{O}$ esiste $1_A \in \mathcal{A}(A, A)$, detto morfismo identico (o identità) di $A$, tale che per ogni $f : A \to B$ e $g : C \to A$ risulta*

  $$f \circ 1_A = f \text{ ed } 1_A \circ g = g.$$

Definizione 1.7.4. *La quasi-categoria* **CAT** *di tutte le categorie ha per oggetti tutte le categorie, per morfismi fra due oggetti tutti i funtori dalla prima nella seconda categoria, come identità i funtori identici e come composizione l'usuale composizione fra funtori che deriva dalla Proposizione 1.6.2.*

Osservazione 1.7.5. 1. Ogni categoria è una quasi-categoria.

2. Poiché $\mathbf{CAT}(\mathbf{Set}, \mathbf{Set})$ non è un insieme, allora **CAT** è una quasi-categoria ma non è una categoria. Peraltro $|\mathbf{CAT}|$ è un conglomerato ma non una classe.

3. Virtualmente ogni concetto espresso per le categorie può essere riformulato per le quasi-categorie così che ad esempio si può parlare di funtori fra quasi-categorie, quasi-categorie piccole, discrete ecc$\cdot\cdots$. Molti di questi concetti sono espressi per le categorie piuttosto che per le quasi-categorie, in quanto oggetti di studio sono soprattutto le categorie; in alcuni casi tuttavia esprimere alcuni concetti in termini di quasi-categorie permette di facilitarne la formulazione, come ad esempio nel caso degli isomorfismi fra categorie che sono tutti e soli gli isomorfismi in **CAT**.

## 1.8. Trasformazioni Naturali

Definizione 1.8.1. *Siano $F$ e $G$ funtori da una categoria $\mathbf{C}$ in una categoria $\mathbf{D}$.*

*Una **trasformazione naturale***

$$\eta : F \to G,$$

*è una funzione*

$$\eta : |\mathbf{C}| \to \mathcal{M}or(\mathbf{D}),$$

*ovvero, se si pone $\eta(A) = \eta_A$, una famiglia di morfismi*

$$\eta = (\eta_A)_{A\in|\mathbf{C}|}$$

*che verifica le seguenti condizioni:*

(1) $\forall A \in |\mathbf{C}|,\ \eta_A \in \mathbf{D}\big(F(A), G(A)\big)$.
(2) $\forall f \in \mathbf{C}(A, B)$ *è commutativo il seguente diagramma:*

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \overset{\eta_A}{\to} & G(A) \\ {\scriptstyle F(f)}\downarrow & /\!/\!/ & \downarrow{\scriptstyle G(f)} \\ F(B) & \overset{\eta_B}{\to} & G(B) \end{array}$$

*Più esplicitamente una trasformazione naturale la indicheremo con*

$$\begin{array}{c} \mathbf{C} \overset{F}{\to} \mathbf{D} \\ \downarrow \eta \\ \mathbf{C} \overset{G}{\to} \mathbf{D} \end{array}$$

*Si chiama* ***trasformazione naturale identica*** *del funtore* $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *in se stesso la trasformazione naturale* $\iota_F = (1_{F(A)})_{A \in |\mathbf{C}|}$.

*Una trasformazione naturale* $\eta = (\eta_A)_{A \in |\mathbf{C}|}$ *è un* ***isomorfismo naturale****, se* $\forall A \in |\mathbf{C}|$,

$$\eta_A : F(A) \to G(A)$$

*è un isomorfismo.*

*I funtori* $F$ *e* $G$ *si dicono* ***naturalmente isomorfi****, e si scrive* $F \cong G$, *se esiste* $\eta : F \to G$ *isomorfismo naturale.*

*In tal caso, i morfismi inversi* $\eta_A^{-1}$ *definiscono l'isomorfismo naturale inverso di* $\eta$, $\eta^{-1} : G \to F$.

DEFINIZIONE 1.8.2. *Un funtore* $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *si dice* ***equivalenza*** *se esiste* $G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ *tale che* $F \circ G \cong 1_{\mathbf{D}}$ *e* $G \circ F \cong 1_{\mathbf{C}}$.

$\mathbf{C}$ *e* $\mathbf{D}$ *si dicono* ***equivalenti*** *se esiste un'equivalenza* $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$.

ESEMPIO 1.8.3. (a) La trasformazione naturale identica di un funtore $F$ in se stesso è un isomorfismo naturale.

(b) Le corrispondenze che associano ad ogni

$$V \in |\mathbf{Vec}| \longmapsto **(V) = V^{**}$$

dove $V^{**}$ è lo spazio vettoriale biduale di $V$, e ad ogni

$$f \in \mathbf{Vec}(V, W) \longmapsto **(f) = f^{**} : V^{**} \to W^{**}$$

dove $\forall\ \alpha \in V^{**}$, $f^{**}(\alpha) : W^* \to K$ è tale che $\forall\ \vartheta^* \in W^*$,

$$f^{**}(\alpha)(\vartheta^*) = (\alpha \circ f^*)(\vartheta^*) = \alpha(f^*(\vartheta^*)) = \alpha(\vartheta^* \circ f) \in K$$

definiscono un funtore

$$** \ : \ \mathbf{Vec} \ \to \ \mathbf{Vec}$$

detto funtore *biduale*.

Si verifica che il funtore biduale è naturalmente isomorfo al funtore identico, $** \cong 1_{\mathbf{Vec}}$ mediante l'isomorfismo naturale

$$\begin{array}{c} \mathbf{Vec} \overset{1_{\mathbf{Vec}}}{\to} \mathbf{Vec} \\ \downarrow \eta \\ \mathbf{Vec} \overset{**}{\to} \mathbf{Vec} \end{array}$$

definito $\forall V \in |\mathbf{Vec}|$ da

$$\eta_V : V = 1_{\mathbf{Vec}}(V) \to V^{**} = **(V)$$

che ad ogni $\vec{x} \in V$ associa $\eta_V(\vec{x}) = x^{**} : V^* \to K$ tale che $x^{**}(\vartheta^*) = \vartheta^*(\vec{x})$, $\forall\ \vartheta^* \in V^*$.

In effetti si verifica che $\eta_V$ è un isomorfismo, $\forall V \in |\mathbf{Vec}|$ ed inoltre $\forall V, W \in |\mathbf{Vec}|$ e $\forall f \in \mathbf{Vec}(V, W)$ è commutativo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} V & \overset{\eta_V}{\to} & V^{**} \\ f \downarrow & /// & \downarrow f^{**} \\ W & \overset{\eta_W}{\to} & W^{**} \end{array}$$

Infatti, $\forall \vec{x} \in V$, $\forall \vartheta^* \in W^*$ si ha

$$\begin{aligned}\big((f^{**} \circ \eta_V)(\vec{x})\big)(\vartheta^*) &= \big(f^{**}(\eta_V(\vec{x}))\big)(\vartheta^*)\\ &= \big(\eta_V(\vec{x}) \circ f^*\big)(\vartheta^*)\\ &= \eta_V(\vec{x})(f^*(\vartheta^*))\\ &= \eta_V(\vec{x})(\vartheta^* \circ f)\\ &= (\vartheta^* \circ f)(\vec{x})\\ &= \vartheta^*(f(\vec{x}))\\ &= \big(\eta_W(f(\vec{x}))\big)(\vartheta^*)\\ &= \big((\eta_W \circ f)(\vec{x})\big)(\vartheta^*).\end{aligned}$$

DEFINIZIONE 1.8.4. *Se $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$, $G : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ e $H : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ sono dei funtori e*

$$\begin{array}{c}\mathbf{C} \xrightarrow{F} \mathbf{D}\\ \downarrow \eta\\ \mathbf{C} \xrightarrow{G} \mathbf{D}\\ \downarrow \varepsilon\\ \mathbf{C} \xrightarrow{H} \mathbf{D}\end{array}$$

*sono trasformazioni naturali, si definisce* ***composizione*** *delle trasformazioni naturali $\eta$ ed $\varepsilon$, la trasformazione naturale $\varepsilon \circ \eta = \big((\varepsilon \circ \eta)_A\big)_{A \in |\mathbf{C}|}$ definita $\forall A \in |\mathbf{C}|$ da*

$$(\varepsilon \circ \eta)_A = \varepsilon_A \circ \eta_A : F(A) \to H(A).$$

Che la famiglia di morfismi $\varepsilon \circ \eta = \big((\varepsilon \circ \eta)_A\big)_{A \in |\mathbf{C}|}$ sia una trasformazione naturale si verifica osservando che $\forall f \in \mathbf{C}(A, A')$, il diagramma esterno

$$\begin{array}{ccc}F(A) & \xrightarrow{F(f)} & F(A')\\ \eta_A \downarrow & /\!/\!/ & \downarrow \eta_{A'}\\ G(A) & \xrightarrow{G(f)} & G(A')\\ \varepsilon_A \downarrow & /\!/\!/ & \downarrow \varepsilon_{A'}\\ H(A) & \xrightarrow{H(f)} & H(A')\end{array}$$

è commutativo poiché lo sono i diagrammi parziali.

OSSERVAZIONE 1.8.5. Si verificano facilmente le seguenti proprietà:
1. La composizione di trasformazioni naturali è associativa.

2. Ogni isomorfismo naturale identico è neutro rispetto alla composizione di trasformazioni naturali.

Da tali proprietà segue che fissate due categorie $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, si definisce una quasi categoria avente per oggetti tutti i funtori da $\mathbf{A}$ in $\mathbf{B}$, che costituiscono una classe, per morfismi fra due oggetti-funtori le trasformazioni naturali fra i funtori considerati, che costituiscono anch'essi una classe per ogni fissata coppia di funtori. La legge di composizione è la composizione di trasformazioni naturali e le identità sono gli isomorfismi naturali identici. Tale quasi categoria è detta, impropriamente, *categoria dei funtori.*

DEFINIZIONE 1.8.6. *Siano* $F, G : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, $H, K : \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ *dei funtori e siano*

$$\eta : F \to G \quad e \quad \delta : H \to K$$

*trasformazioni naturali.*

*Si dice* **prodotto** *o* $*$*-composizione delle trasformazioni naturali* $\delta$ *ed* $\eta$ *la trasformazione naturale*

$$\begin{array}{c} \mathcal{A} \overset{H \circ F}{\to} \mathbf{C} \\ \quad\ \downarrow \delta * \eta \\ \mathcal{A} \overset{K \circ G}{\to} \mathbf{C} \end{array}$$

*definita* $\forall A \in |\mathbf{A}|$ *da*

$$(\delta * \eta)_A = K(\eta_A) \circ \delta_{F(A)} \tag{1}$$

*o equivalentemente*

$$(\delta * \eta)_A = \delta_{G(A)} \circ H(\eta_A). \tag{2}$$

L'equivalenza delle espressioni (1) e (2) discende dal fatto che $\forall A \in |\mathbf{A}|$, $\eta_A : F(A) \to G(A)$ è un morfismo in $\mathbf{B}$ ed essendo $\delta : H \to K$ una trasformazione naturale si ha la commutatività del seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} H(F(A)) & \overset{\delta_{F(A)}}{\to} & K(F(A)) \\ \mathrm{H}(\eta_A) \downarrow & /\!/\!/ & \downarrow \mathrm{K}(\eta_A) \\ H(G(A)) & \overset{\delta_{G(A)}}{\to} & K(G(A)). \end{array}$$

Per provare che $\delta * \eta = \big((\delta * \eta)_A\big)_{A \in |\mathcal{A}|}$ è una trasformazione naturale, consideriamo un generico morfismo $f \in \mathbf{A}(A, A')$ e verifichiamo che il seguente diagramma

$$\begin{array}{ccc} H(F(A)) & \overset{H(F(f))}{\to} & H(F(A')) \\ (\delta * \eta)_A \downarrow & /\!/\!/ & \downarrow (\delta * \eta)_{A'} \\ K(G(A)) & \overset{K(G(f))}{\to} & K(G(A')) \end{array}$$

è commutativo. Infatti:

$$\begin{aligned} K(G(f)) \circ (\delta * \eta)_A &= K(G(f)) \circ K(\eta_A) \circ \delta_{F(A)} \\ &= K(G(f) \circ \eta_A) \circ \delta_{F(A)} = (*) \end{aligned}$$

e per la commutatività del seguente diagramma

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \overset{F(f)}{\to} & F(A') \\ \eta_A \downarrow & /\!/\!/ & \downarrow \eta_{A'} \\ G(A) & \overset{G(f)}{\to} & G(A') \end{array}$$

si ha

$$(*) = K\big(\eta_{A'} \circ F(f)\big) \circ \delta_{F(A)} = K(\eta_{A'}) \circ K\big(F(f)\big) \circ \delta_{F(A)} = (**)$$

per la commutatività del diagramma

$$\begin{array}{ccc} H\big(F(A)\big) & \overset{H\left(F(f)\right)}{\rightarrow} & H\big(F(A')\big) \\ \delta_{F(A)} \downarrow & /// & \downarrow \delta_{F(A')} \\ K\big(F(A)\big) & \overset{K\left(F(f)\right)}{\rightarrow} & K\big(F(A')\big) \end{array}$$

$$(**) = K(\eta_{A'}) \circ \delta_{F(A')} \circ H\big(F(f)\big) = (\delta * \eta)_{A'} \circ H\big(F(f)\big)$$

ovvero la tesi.

PROPOSIZIONE 1.8.7. *Se $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ è un funtore allora sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

(*i*) *$F$ è pieno, fedele e denso.*
(*ii*) *$F$ è un'equivalenza.*
(*iii*) *Esiste un funtore $G : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ ed esistono due isomorfismi naturali $\eta : 1_{\mathbf{A}} \to G \circ F$, $\varepsilon : F \circ G \to 1_{\mathbf{B}}$ tali che*

$$F \overset{1_F * \eta}{\rightarrow} F \circ G \circ F \overset{\varepsilon * 1_F}{\rightarrow} F = F \overset{1_F}{\rightarrow} F,$$

*e*

$$G \overset{\eta * 1_G}{\rightarrow} G \circ F \circ G \overset{1_G * \varepsilon}{\rightarrow} G = G \overset{1_G}{\rightarrow} G.$$

DIMOSTRAZIONE. "(*iii*) $\Rightarrow$ (*ii*)" Ovvio.

"(*ii*) $\Rightarrow$ (*i*)" Per ipotesi esistono un funtore $G : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ ed esistono due isomorfismi naturali $\eta : 1_{\mathbf{A}} \to G \circ F$, $\varepsilon : F \circ G \to 1_{\mathbf{B}}$.

Siano $f, g \in \mathbf{A}(A, A')$ tali che $F(f) = F(g)$, allora, dalla commutatività dei seguenti diagrammi

$$\begin{array}{ccc} A & \overset{\eta_A}{\rightarrow} & G\big(F(A)\big) \\ f \downarrow & /// & \downarrow G(F(f)) \\ A' & \overset{\eta_{A'}}{\rightarrow} & G\big(F(A')\big) \end{array}$$

ed

$$\begin{array}{ccc} A & \overset{\eta_A}{\rightarrow} & G\big(F(A)\big) \\ g \downarrow & /// & \downarrow G(F(g)) \\ A' & \overset{\eta_{A'}}{\rightarrow} & G\big(F(A')\big) \end{array}$$

segue che

$$F(f) = F(g) \;\Rightarrow\; \eta_{A'} \circ f = \eta_{A'} \circ g \;\Rightarrow\; f = g$$

ovvero si ha che $F$ è fedele.

Analogamente si prova che $G$ è fedele.

Sia, ora, $B \in |\mathbf{B}|$ e sia $A = G(B)$. Poiché $\varepsilon$ è un isomorfismo naturale si ha che $\varepsilon_B : F(A) = F\big(G(B)\big) \to B$ è un isomorfismo, da cui segue che $F$ è denso.

Siano, $A, A' \in |\mathbf{A}|$ e $g : F(A) \to F(A')$, allora

$$A \overset{\eta_A}{\to} G\big(F(A)\big) \overset{G(g)}{\to} G\big(F(A')\big) \overset{\eta_{A'}^{-1}}{\to} A'.$$

Posto

$$f = \eta_{A'}^{-1} \circ G(g) \circ \eta_A : A \to A'$$

poiché $\eta$ è un isomorfismo naturale si ha

$$\begin{array}{ccc} A & \overset{\eta_A}{\to} & G\big(F(A)\big) \\ f \downarrow & /// & \downarrow G(F(f)) \\ A' & \overset{\eta_{A'}}{\to} & G\big(F(A')\big) \end{array}$$

da cui poiché $G$ è fedele si ha

$$\begin{aligned} G\big(F(f)\big) \circ \eta_A = \eta_{A'} \circ \eta_{A'}^{-1} \circ G(g) \circ \eta_A \Rightarrow\ & G\big(F(f)\big) = G(g) \\ \Rightarrow\ & F(f) = g \end{aligned}$$

ovvero $F$ è pieno.

"$(i) \Rightarrow (iii)$" Sia $\mathbf{E}$ una classe rappresentativa degli oggetti di $\mathbf{A}$.

Poiché $F$ è denso, $\forall B \in |\mathbf{B}|\ \exists A \in |\mathbf{A}|$ tale che $F(A) \cong B$. Sia $G(B)$ l'unico oggetto di $\mathbf{E}$ per il quale $A \cong G(B)$, allora $B \cong F(A) \cong F\big(G(B)\big)$. Si ottiene così

$$G : |\mathbf{B}| \to |\mathbf{A}|.$$

Scegliamo, inoltre, $\forall B \in |\mathbf{B}|$, un isomorfismo $\epsilon_B : F\big(G(B)\big) \to B$. Sia, ora, $g : B \to B'$ un morfismo in $\mathbf{B}$; considerato

$$\epsilon_{B'}^{-1} \circ g \circ \epsilon_B : F\big(G(B)\big) \to F\big(G(B')\big)$$

in $\mathbf{B}$, poiché $F$ è fedele e pieno, $\exists | f : G(B) \to G(B')$ tale che $F(f) = \epsilon_{B'}^{-1} \circ g \circ \epsilon_B$. Posto $G(g) = f$ otteniamo

$$G : \mathcal{M}or(\mathbf{B}) \to \mathcal{M}or(\mathbf{A}).$$

Osserviamo che $\forall g \in \mathbf{B}(B, B')$ si ha $F\big(G(g)\big) = \epsilon_{B'}^{-1} \circ g \circ \epsilon_B$.

$G$ è un funtore da $\mathbf{B}$ in $\mathbf{A}$, infatti:

- $\forall B, B' \in |\mathbf{B}|$, $\forall g : B \to B'$ risulta $G(g) : G(B) \to G(B')$.
- $\forall B \in |\mathbf{B}|$,

$$F(G(1_B)) = \epsilon_B^{-1} \circ 1_B \circ \epsilon_B = 1_{F(G(B))} = F(1_{G(B)})$$

da cui, essendo $F$ fedele, si ottiene $G(1_B) = 1_{G(B)}$.

- $\forall g \in \mathbf{B}(B, B')$, $\forall g' \in \mathbf{B}(B', B'')$ si ha

$$\begin{aligned} F\big(G(g' \circ g)\big) &= \epsilon_{B''}^{-1} \circ g' \circ g \circ \epsilon_B \\ &= (\epsilon_{B''}^{-1} \circ g' \circ \epsilon_{B'}) \circ (\epsilon_{B'}^{-1} \circ g \circ \epsilon_B) \\ &= F\big(G(g')\big) \circ F\big(G(g)\big) \\ &= F\big(G(g') \circ G(g)\big) \end{aligned}$$

da cui, poiché $F$ è fedele, si ottiene $G(g' \circ g) = G(g') \circ G(g)$.

Inoltre $\epsilon = (\epsilon_B)_{B \in |\mathbf{B}|}$ è una trasformazione naturale da $F \circ G$ in $1_{\mathbf{B}}$, infatti $\forall g \in \mathbf{B}(B, B')$ si ha che il diagramma seguente

$$\begin{tikzcd} F\big(G(B)\big) \arrow[r, "\epsilon_B"] \arrow[d, "F(G(g))"'] \arrow[dr, phantom, "///"] & B \arrow[d, "g"] \\ F\big(G(B')\big) \arrow[r, "\epsilon_{B'}"] & B' \end{tikzcd}$$

è commutativo in quanto, per definizione, $F\big(G(g)\big) = \epsilon_{B'}^{-1} \circ g \circ \epsilon_B$.

Sia, ora, $A \in |\mathbf{A}|$. Poiché $\epsilon_{F(A)} : F\big(G(F(A))\big) \to F(A)$ è un isomorfismo, allora si ha $\epsilon_{F(A)}^{-1} : F(A) \to F\big(G(F(A))\big)$ ed essendo $F$ fedele e pieno, si ha che $\exists | \eta_A : A \to G\big(F(A)\big)$ isomorfismo tale che $F(\eta_A) = \epsilon_{F(A)}^{-1}$.

Proviamo che $\eta = (\eta_A)_{A \in |\mathbf{A}|}$ è un isomorfismo naturale da $1_{\mathbf{A}}$ in $G \circ F$. Sia, quindi, $f \in \mathbf{A}(A, A')$; poiché $\epsilon$ è un isomorfismo naturale risulta

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\epsilon_{F(A)}^{-1}"] \arrow[d, "F(f)"'] \arrow[dr, phantom, "///"] & F\big(G(F(A))\big) \arrow[d, "F(G(F(f)))"] \\ F(A') \arrow[r, "\epsilon_{F(A')}^{-1}"] & F\big(G(F(A'))\big) \end{tikzcd}$$

da cui, essendo $F(\eta_A) = \epsilon_{F(A)}^{-1}$ risulta $F(\eta_{A'} \circ f) = F\big(G(F(f)) \circ \eta_A\big)$ e quindi, essendo $F$ fedele si ha $\eta_{A'} \circ f = G\big(F(f)\big) \circ \eta_A$, ovvero si ha il diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "///"] & G\big(F(A)\big) \arrow[d, "G(F(f))"] \\ A' \arrow[r, "\eta_{A'}"] & G\big(F(A')\big) \end{tikzcd}$$

cioè $\eta$ è un isomorfismo naturale.

Infine si ha

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[r, "1_{\mathbf{A}}"] \arrow[d, "\eta"'] & \mathbf{A} \arrow[r, "F"] & \mathbf{B} \arrow[d, "1_F"] \\ \mathbf{A} \arrow[r, "G \circ F"] & \mathbf{A} \arrow[r, "F"] & \mathbf{B} \end{tikzcd}$$

quindi si può costruire $1_F * \eta : F \to F \circ G \circ F$ e in particolare se $A \in |\mathbf{A}|$, dal diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \stackrel{1_{F(A)}}{\longrightarrow} & F(A) \\ F(\eta_A)\downarrow & /// & \downarrow F(\eta_A) \\ F\big(G(F(A))\big) & \stackrel{1_{F(G(F(A)))}}{\longrightarrow} & F\big(G(F(A))\big) \end{array}$$

si ha $(1_F * \eta)_A = F(\eta_A) \circ 1_{F(A)} : F(A) \to F\big(G(F(A))\big)$.

D'altra parte si ha

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{A} & \stackrel{F}{\to} & \mathbf{B} & \stackrel{F \circ G}{\to} & \mathbf{B} \\ & 1_F\downarrow & & \downarrow \epsilon & \\ \mathbf{A} & \stackrel{F}{\to} & \mathbf{B} & \stackrel{1_\mathbf{B}}{\to} & \mathbf{B} \end{array}$$

quindi si può costruire $\epsilon * 1_F : F \circ G \circ F \to F$ e in particolare, se $A \in |\mathbf{A}|$, dal diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} F\big(G(F(A))\big) & \stackrel{\epsilon_{F(A)}}{\longrightarrow} & F(A) \\ 1_{F(G(F(A)))}\downarrow & /// & \downarrow 1_{F(A)} \\ F\big(G(F(A))\big) & \stackrel{\epsilon_{F(A)}}{\longrightarrow} & F(A) \end{array}$$

si ha $(\epsilon * 1_F)_A = 1_{F(A)} \circ \epsilon_{F(A)} = (\epsilon^{-1}_{F(A)} \circ 1_{F(A)})^{-1} = (F(\eta_A) \circ 1_{F(A)})^{-1}$ da cui $F \stackrel{1_F * \eta}{\longrightarrow} F \circ G \circ F \stackrel{\epsilon * 1_F}{\longrightarrow} F = F \stackrel{1_F}{\to} F$.

Analogamente $G \stackrel{\eta * 1_G}{\longrightarrow} G \circ F \circ G \stackrel{1_G * \epsilon}{\longrightarrow} G = G \stackrel{1_G}{\to} G$.

$\square$

ESEMPIO 1.8.8. Fissato un campo $\mathbb{K}$, la categoria degli spazi vettoriali di dimensione finita su $\mathbb{K}$ è equivalente alla categoria delle matrici $\mathbf{Mat}_\mathbb{K}$ mediante il funtore

$$F : \mathbf{Vecf} \to \mathbf{Mat}_\mathbb{K}$$

definito $\forall V \in |\mathbf{Vecf}|$ e $\forall f \in \mathbf{Vecf}(V, W)$ ponendo, dopo aver fissato una base in ogni spazio vettoriale,

$$F(V) = dim(V) \ \text{ ed } \ F(f) = M(f)$$

dove $M(f)$ è la matrice associata ad $f$ rispetto a due basi fissate rispettivamente in $V$ e $W$.

OSSERVAZIONE 1.8.9. Una equivalenza $F$ tra due categorie $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, essendo un funtore fedele, pieno e denso conserva e riflette le principali proprietà dei morfismi.

Per questo si considerano proprietà categoriali quelle che sono invarianti per equivalenze.

DEFINIZIONE 1.8.10. *Se $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ e $G : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ sono due funtori, si dice che $F$ è* ***aggiunto a sinistra*** *di $G$ o che $G$ è* ***aggiunto a destra*** *di $F$ o che $F$ e $G$ formano un'****aggiunzione****, e si scrive*

$$F \dashv G$$

*se esistono*

$$\eta : 1_{\mathbf{A}} \to G \circ F$$
$$\varepsilon : F \circ G \to 1_{\mathbf{B}}$$

*trasformazioni naturali tali che*

$$F \stackrel{1_F * \eta}{\to} F \circ G \circ F \stackrel{\varepsilon * 1_F}{\to} F = F \stackrel{1_F}{\to} F,$$

*e*

$$G \stackrel{\eta * 1_G}{\to} G \circ F \circ G \stackrel{1_G * \varepsilon}{\to} G = G \stackrel{1_G}{\to} G.$$

*$\eta$ e $\varepsilon$ sono dette, rispettivamente,* ***unità*** *e* ***counità*** *dell'aggiunzione.*

Esempio 1.8.11. Se $(X, \leq)$ e $(Y, \leq)$ sono categorie ordinate allora

$$F : (X, \leq) \to (Y, \leq) \text{ è un funtore} \Leftrightarrow F : X \to Y \text{ è isotona.}$$

"$\Rightarrow$" Siano $(x, x') \in \leq$ cioè $x \leq x'$. Poiché $F$ è un funtore si ha che $(F(x), F(x')) \in \leq$, ovvero $F(x) \leq F(x')$ cioè $F : X \to Y$ è isotona.

"$\Leftarrow$" Ovviamente $F : X \to Y$, essendo isotona, individua univocamente una funzione $F : \leq \to \leq'$ con cui costituisce una coppia di funzioni che rappresenta un funtore $F : (X, \leq) \to (Y, \leq)$.

Se $(X, \leq)$ e $(Y, \leq)$ sono categorie ordinate e $F : X \to Y$ e $G : X \to Y$ sono funtori da $(X, \leq)$ in $(Y, \leq)$, allora affinchè esista una trasformazione naturale da $F$ in $G$ è necessario e sufficiente che $\forall x \in X$ esista un morfismo in $(Y, \leq)$ da $F(x)$ in $G(x)$, cioè risulti

$$F(x) \leq G(x).$$

Le condizioni della proprietà (2) delle trasformazioni naturali, infatti, sono automaticamente verificate poiché pongono dei vincoli sui risultati della composizione, che però in questo caso sono univocamente determinati.

Se $(X, \leq)$ e $(Y, \leq)$ sono categorie ordinate e $F : X \to Y$ e $G : Y \to X$ sono funtori da $(X, \leq)$ in $(Y, \leq)$ e da $(Y, \leq)$ in $(X, \leq)$ rispettivamente, allora la relazione $F \dashv G$ equivale, semplicemente, al verificarsi delle seguenti relazioni:

$$\textbf{(ADI)} \quad x \leq G(F(x)), \ \forall x \in X$$
$$\textbf{(ADII)} \quad F(G(y)) \leq y, \ \forall y \in Y$$

dette **disuguaglianze di aggiunzione**.

Esempio 1.8.12. Siano $A$ e $B$ insiemi ed $f : A \to B$ un'applicazione da $A$ in $B$ e siano

$$f^{\to} : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$$

ed

$$f^{\leftarrow} : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)$$

rispettivamente gli operatori powerset diretto ed inverso associati ad $f$, definiti rispettivamente negli esempi 1.6.3 (g) ed 1.6.5 (a).

$f^{\to} : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ è un'applicazione isotona fra gli insiemi ordinati $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ e $(\mathcal{P}(B), \subseteq)$, così come $f^{\leftarrow} : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)$ è un'applicazione isotona da $(\mathcal{P}(B), \subseteq)$ in $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$.

Inoltre, poiché

$$X \subseteq f^{\leftarrow}(f^{\rightarrow}(X)), \ \forall X \subseteq A$$

ed

$$Y \supseteq f^{\rightarrow}(f^{\leftarrow}(Y)), \ \forall Y \subseteq B$$

ovvero si verificano (**ADI**) ed (**ADII**), allora

$$f^{\rightarrow} \dashv f^{\leftarrow}.$$

Vedremo in seguito ulteriori proprietà di questi operatori che saranno anche considerati in contesti molto più generali.

CAPITOLO 2

# Reticoli e Semireticoli

## 2.1. Insiemi Ordinati

DEFINIZIONE 2.1.1. *Sia $X$ un insieme.*

*Una relazione di* ***pre-ordine*** *(o di* ***quasi ordine****) su $X$ è una relazione binaria $\leq \subseteq X \times X$ che sia riflessiva e transitiva.*

*Un insieme $X$ munito di una relazione di pre-ordine, $\leq$, è detto insieme pre-ordinato, ed è indicato con $(X, \leq)$.*

*Una relazione* ***d'ordine*** *$\leq$ su $X$ è una relazione di pre-ordine che sia anche antisimmetrica.*

*$(X, \leq)$ è detto insieme ordinato quando $\leq$ è una relazione d'ordine.*

*Se $(X, \leq)$ è un insieme ordinato, due elementi $a, b \in X$ si dicono confrontabili se $a \leq b$ o $b \leq a$.*

*Un insieme ordinato $(X, \leq)$ in cui due qualsiasi elementi sono confrontabili, si definisce* ***totalmente ordinato*** *o* ***catena*** *e $\leq$ è detta relazione* ***d'ordine totale****.*

DEFINIZIONE 2.1.2. *Sia $(X, \leq)$ un insieme ordinato.*

*Se $A \subseteq X$, un elemento $m \in X$ si dice un* ***maggiorante*** *di $A$ se*

$$a \in A \ \Rightarrow \ a \leq m.$$

Indichiamo con $M(A)$ l'insieme dei maggioranti di $A$.

DEFINIZIONE 2.1.3. *Sia $(X, \leq)$ un insieme ordinato.*

*Se $A \subseteq X$, un elemento $m' \in X$ si dice un* ***minorante*** *di $A$ se*

$$a \in A \ \Rightarrow \ m' \leq a.$$

Indichiamo con $m(A)$ l'insieme dei minoranti di $A$.

DEFINIZIONE 2.1.4. *Siano $(X, \leq)$ un insieme ordinato ed $A \subseteq X$.*

*Un elemento $a_0 \in A$ si dice* ***massimo*** *di $A$, in simboli $a_0 = \max A$, se*

$$a \in A \ \Rightarrow \ a \leq a_0.$$

*Un elemento $b_0 \in A$ si dice* ***minimo*** *di $A$, in simboli $b_0 = minA$, se*

$$a \in A \ \Rightarrow \ b_0 \leq a.$$

OSSERVAZIONE 2.1.5. Il massimo e il minimo di un insieme, se esistono, sono unici. Infatti, se si suppone che ci siano due massimi $m, m' \in A$, allora per definizione di massimo si ha $m' \leq m$ ed $m \leq m'$ da cui segue che $m' = m$.

La verifica è analoga per l'unicità del minimo.

DEFINIZIONE 2.1.6. *Siano* $(X, \leq)$ *un insieme ordinato ed* $A \subseteq X$.

*Un elemento* $s \in X$ *è detto* ***estremo superiore*** *di* $A$ *ed è indicato con* $s = \bigvee A$ *o* $s = \sup A$, *se:*

(1) $s \in M(A)$.
(2) *Se* $b \in A$ *e* $a \leq b$, $\forall a \in A$, *allora* $s \leq b$.

*Un elemento* $t \in X$ *è detto* ***estremo inferiore*** *di* $A$ *ed è denotato con* $t = \bigwedge A$ *o* $t = \inf A$, *se:*

(1) $t \in m(A)$.
(2) *Se* $b' \in X$ *e* $b' \leq a$, $\forall a \in A$, *allora* $b' \leq t$.

OSSERVAZIONE 2.1.7. Dalla definizione 2.1.6 segue che

$$s = \sup A \Leftrightarrow s = \min(M(A))$$
$$t = \inf A \Leftrightarrow t = \max(m(A)).$$

Da tali proprietà e dall'Osservazione 2.1.5 segue che se un insieme ha sup o inf, allora esso è unico.

DEFINIZIONE 2.1.8. *Sia* $(X, \leq)$ *un insieme ordinato.*

$D \subseteq X$ *si dice* ***insieme diretto*** *se* $\forall F \subseteq D$, $F$ *finito*, $\exists m \in D$ *tale che* $m$ *è un maggiorante per* $F$.

$H \subseteq X$ *si dice* ***insieme filtrante*** *se* $\forall F \subseteq H$, $F$ *finito*, $\exists n \in H$ *tale che* $n$ *è un minorante per* $H$.

ESEMPIO 2.1.9. (a) Siano $X = \mathbb{R}$ con la relazione d'ordine usuale ed $A = \mathbb{N}$. Poiché in $\mathbb{R}$ non esistono maggioranti per $\mathbb{N}$ allora non esiste l'estremo superiore di $\mathbb{N}$.

(b) Sia $X = \mathbb{R} \setminus \{t\}$ con la relazione d'ordine indotta da quella usuale e sia $A = (-\infty, t)$, allora $M(A) = (t, +\infty)$ non ha minimo. Pertanto, anche se $M(A) \neq \emptyset$ non esiste $\sup A$.

(c) Si considerino due rette $r$ ed $s$ verticali, parallele e, successivamente, si prenda $X = r \cup s$ e si consideri su $X$ la seguente relazione d'ordine:

$$\forall a, b \in X,\ a \leq b \Leftrightarrow a \text{ e } b \text{ appartengono alla stessa retta ed } a \text{ sta sotto } b.$$

Pertanto, tale relazione d'ordine non è una relazione d'ordine totale. Se si prende l'insieme formato da due soli punti, uno appartenente ad $r$ e l'altro appartenente ad $s$, sicuramente non esiste il sup di tale insieme, perchè per esso non esistono maggioranti.

(d) Si considerino tre semirette aperte verticali e parallele $r$, $s$ e $t$, $r$ ed $s$

illimitate inferiormente, $t$ illimitata superiormente. Si prenda $X = r \cup s \cup t$ e si definisca la seguente relazione d'ordine:

$$\forall x, y \in X, \quad x \leq y \ \Leftrightarrow \ \begin{array}{l}[x, y \text{ appartengono alla stessa} \\ \text{semiretta e } x \text{ sta sotto } y] \text{ oppure} \\ [x \text{ appartiene ad } r \cup s \\ \text{e } y \text{ appartiene a } t].\end{array}$$

Sia, poi, $A = \{a, b\}$, dove $a$ e $b$ appartengono rispettivamente alla semiretta $r$ e alla semiretta $s$, allora l'insieme dei maggioranti di $A$, $M(A)$, risulta essere l'insieme dei punti della semiretta $t$. Pertanto, non esiste il $\sup A$ poiché $M(A)$ non ha minimo, essendo la semiretta $t$ aperta.

OSSERVAZIONE 2.1.10. Sia $(X, \leq)$ un insieme ordinato. L'insieme dei maggioranti di $\emptyset \subseteq X$ è $M(\emptyset) = X$; pertanto segue che $\sup \emptyset$ esiste se e solo se esiste $minX$ e risulta $\sup \emptyset = minX$.

Analogamente, $m(\emptyset) = X$ e quindi $\inf \emptyset$ esiste se e solo se esiste $\max X$ e in particolare, $\inf \emptyset = \max X$.

## 2.2. $\vee$-semireticoli ed $\wedge$-semireticoli

DEFINIZIONE 2.2.1. *Sia $(X, \leq)$ un insieme ordinato, non vuoto. $(X, \leq)$ si dice **semireticolo superiore** o $\vee$-**semireticolo** se $\forall F \subseteq X$, $F$ finito, esiste il $\sup F$, brevemente denotato anche con $\vee F$.*

In particolare, poiché l'insieme vuoto è un insieme finito, esiste il $\sup \emptyset$ e quindi esiste il $minX$, che indicheremo con $\perp$.

Inoltre, $\forall a, b \in X$, esiste $\sup \{a, b\}$. L'esistenza del sup tra due elementi si trasferisce facilmente all'esistenza del sup di un numero finito di elementi e questo perchè il sup è associativo, ossia dati tre elementi $a, b, c \in X$, risulta:

$$\sup \{ \sup \{a, b\}, c\} = \sup \{a, \sup \{b, c\}\}.$$

Da ciò discende la seguente

CARATTERIZZAZIONE 2.2.2. *Un insieme ordinato $(X, \leq)$ è un semireticolo superiore se e solo se*

(1) *$X$ ha minimo.*
(2) *Per ogni $a, b \in X$, esiste $\sup \{a, b\}$.*

Dalla Caratterizzazione 2.2.2 si capisce come in un semireticolo superiore si ha la possibilità di definire una legge di composizione interna binaria:

$$\vee : X \times X \to X$$

ponendo per ogni $a, b \in X$

$$\vee(a, b) = a \vee b = \sup \{a, b\}$$

detta **unione**.

Inoltre, si vede subito che:

(a) $\vee$ è associativa.
(b) $\vee$ è commutativa.
(c) Esiste l'elemento neutro $\perp$ rispetto a $\vee$.
(e) Ogni elemento è idempotente rispetto a $\vee$, cioè $\forall a \in X$,

$$a \vee a = a.$$

Da tali proprietà discende che se $(X, \leq)$ è un $\vee$-semireticolo, allora la terna $(X, \vee, \perp)$ è un monoide commutativo.

L'implicazione inversa vale solo sotto ulteriori condizioni, come mostra la seguente proprietà.

PROPOSIZIONE 2.2.3. *Se $(X, \vee, \perp)$ è un monoide commutativo in cui ogni elemento è idempotente, allora esiste un'unica relazione d'ordine $\leq$ su $X$ tale che $(X, \leq)$ è un $\vee$-semireticolo, avente $\vee$ per unione.*

DIMOSTRAZIONE. Se per ogni $a, b \in X$ poniamo

$$a \leq b \Leftrightarrow a \vee b = b$$

allora risulta

- dalla proprietà di idempotenza soddisfatta da ogni elemento di $X$ segue che $\leq$ è riflessiva.
- $\leq$ è antisimmetrica: infatti se $a, b \in X$ sono tali che $a \leq b$ e $b \leq a$, allora si ha

$$a \vee b = b \quad \text{e} \quad b \vee a = a$$

e poiché $\vee$ è commutativa risulta

$$b = a \vee b = b \vee a = a.$$

- $\leq$ è transitiva: infatti, se $a, b, c \in X$ sono tali che $a \leq b$ e $b \leq c$, allora

$$a \vee b = b \quad \text{e} \quad b \vee c = c$$

pertanto,

$$a \vee c = a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c = b \vee c = c$$

ovvero $a \leq c$.

L'elemento neutro $\perp$ è un minimo per $X$ rispetto a tale relazione, infatti $\forall a \in X$ si ha che

$$\perp \vee a = a \Rightarrow \perp \leq a.$$

Inoltre, $\forall a, b \in X$ si ha $\sup\{a, b\} = a \vee b$; infatti risulta

$$a \vee (a \vee b) = (a \vee a) \vee b = a \vee b \Rightarrow a \leq a \vee b$$

e analogamente si ha $b \leq a \vee b$, ovvero $a \vee b$ è un maggiorante per $\{a, b\}$.

Se, inoltre, $k \in X$ è un maggiorante di $\{a, b\}$, allora si ha

$$k \vee (a \vee b) = (k \vee a) \vee b = k \vee b = k \Rightarrow (a \vee b) \leq k.$$

Pertanto, $(X, \leq)$ è un semireticolo superiore.

Se infine $\leq'$ è un'altra relazione d'ordine su $X$ che induce l'operazione $\vee$, cioè tale che

$$\sup_{\leq'} \{x, y\} = x \vee y, \ \forall x, y \in X$$

allora $\forall x, y \in X$ risulta

$$x \leq' y \ \Leftrightarrow \ y = \sup_{\leq'} \{x, y\} = x \vee y \ \Leftrightarrow \ x \leq y$$

cioè $\leq' = \leq$.

□

DEFINIZIONE 2.2.4. *Un insieme ordinato $(X, \leq)$ si dice* ***semireticolo inferiore*** *o* ***$\wedge$-semireticolo*** *se $\forall F \subseteq X$, $F$ finito, esiste* $\inf F$, *brevemente denotato con $\wedge F$.*

In particolare, in un semireticolo inferiore $(X, \leq)$, poiché esiste $\inf \emptyset$ allora esiste $\max X$ che indicheremo con $\top$. Inoltre, $\forall a, b \in X$ esiste $\inf \{a, b\}$.

Così come visto per il sup, anche l'esistenza dell'inf fra due elementi si trasferisce facilmente all'esistenza dell'inf di un numero finito di elementi.

Da ciò discende la seguente

CARATTERIZZAZIONE 2.2.5. *Un insieme ordinato $(X, \leq)$ è un semireticolo inferiore se e solo se*

(1) *$X$ ha massimo.*
(2) *Per ogni $a, b \in X$, esiste* $\inf \{a, b\}$.

Anche in questo caso si ha la possibilità di definire una legge di composizione interna binaria

$$\wedge : X \times X \to X$$

tale che per ogni $a, b \in X$ si ha

$$\wedge(a, b) = a \wedge b = \inf \{a, b\}$$

detta **intersezione.**

Anche in questo caso è evidente che:

(a) $\wedge$ è associativa.
(b) $\wedge$ è commutativa.
(c) Esiste l'elemento neutro $\top$ rispetto a $\wedge$.
(e) Ogni elemento è idempotente rispetto a $\wedge$, cioè per ogni $a \in X$,

$$a \wedge a = a.$$

Da tali proprietà discende che se $(X, \leq)$ è un $\wedge$-semireticolo, allora la terna $(X, \wedge, \top)$ è un monoide commutativo.

Vale inoltre la seguente proprietà.

PROPOSIZIONE 2.2.6. *Se $(X, \wedge, \top)$ è un monoide commutativo in cui ogni elemento è idempotente, allora esiste un'unica relazione d'ordine $\leq$ su $X$ tale che $(X, \leq)$ è un $\wedge$-semireticolo, avente $\wedge$ per intersezione.*

DIMOSTRAZIONE. Se per ogni $a, b \in X$ poniamo

$$a \leq b \Leftrightarrow a \wedge b = a$$

allora con una dimostrazione analoga a quella della Proposizione 2.2.3 segue la tesi. □

OSSERVAZIONE 2.2.7. 1. $(X, \leq)$ è un semireticolo inferiore allora $X$ con la relazione d'ordine duale di $\leq$, $\geq$, è un semireticolo superiore $(X, \geq)$.

Analogamente, se $(X, \leq)$ è un semireticolo superiore, allora $(X, \geq)$ è un semireticolo inferiore. Pertanto, possiamo affermare che ogni semireticolo inferiore individua univocamente un semireticolo superiore e viceversa.

2. Inoltre osserviamo che dal punto di vista algebrico non vi è alcuna distinzione fra semireticoli inferiori e superiori: entrambi infatti sono monoidi commutativi in cui ogni elemento è idempotente. Tuttavia un semireticolo superiore non sempre può essere considerato simultaneamente anche come semireticolo inferiore, poiché la relazione d'ordine indotta dalla legge di composizione secondo la Proposizione 2.2.3 e quella indotta secondo la Proposizione 2.2.6 in generale non coincidono, come vedremo più avanti (Esempio 2.3.3).

## 2.3. Reticoli

DEFINIZIONE 2.3.1. *Un insieme ordinato, $(L, \leq)$, con $|L| \geq 2$, è un* ***reticolo*** *se $\forall F \subseteq L$, $F$ finito, esistono $\vee F$ ed $\wedge F$, in $L$.*

Ovviamente, dalla definizione segue che ogni reticolo ha un minimo, $\perp = \vee\emptyset$, e un massimo, $\top = \wedge\emptyset$, e ovviamente $\top \neq \perp$.

In un reticolo $(X, \leq)$ si definiscono entrambe le leggi di composizione binarie: l'unione, $\vee$, e l'intersezione $\wedge$, rispetto alle quali gli elementi neutri sono rispettivamente $\perp$ e $\top$. Pertanto, un reticolo dà una struttura algebrica $(X, \vee, \wedge, \perp, \top)$ con le seguenti proprietà

(a) $\vee$ e $\wedge$ sono commutative e associative.
(b) Esiste l'elemento neutro, $\perp$ rispetto a $\vee$ e $\top$ rispetto a $\wedge$.
(c) Ogni elemento è idempotente per entrambe le leggi di composizione.

Ma si verificano anche ulteriori proprietà, dette **leggi di assorbimento** ovvero $\forall a, b \in X$ si ha

$$(A_1) \quad a \vee (a \wedge b) = a$$
$$(A_2) \quad a \wedge (a \vee b) = a.$$

Infatti, $\forall a, b \in X$ risulta:

$$a \wedge b \leq a \;\Rightarrow\; a \vee (a \wedge b) = a$$

e

$$a \leq a \vee b \;\Rightarrow\; a \wedge (a \vee b) = a.$$

PROPOSIZIONE 2.3.2. *Sia $(X, \vee, \wedge)$ una struttura algebrica.*
*$(X, \vee, \wedge)$ verifica le due leggi di assorbimento se e solo se posto*

$$a \leq b \;\Leftrightarrow\; a \vee b = b \;\forall a, b \in X$$

*e*

$$a \leq' b \;\Leftrightarrow\; a \wedge b = a \;\forall a, b \in X$$

*risulta che $\leq$ e $\leq'$ sono riflessive e*

$$\leq = \leq'.$$

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che $(X, \vee, \wedge)$ soddisfi (**AI**) ed (**AII**).
"$\subseteq$" Siano $a, b \in X$ tali che $a \leq b$; allora $a \vee b = b$ e quindi $a \wedge (a \vee b) = a \wedge b$. Per la (**AII**) segue che $a = a \wedge b$ ovvero $a \leq' b$.

"$\supseteq$" Siano $a, b \in X$ tali che $a \leq' b$, allora $a \wedge b = a$ e quindi $(a \wedge b) \vee b = a \vee b$. Per la (**AI**) segue che $b = a \vee b$ ovvero che $a \leq b$.

Inoltre dalla (**AI**) ed (**AII**) segue che $\forall a \in X$: $a \vee a = a \vee (a \wedge (a \vee a)) = a$ quindi $a \leq a$. Analogamente $a \leq' a$.

Viceversa se supponiamo che $\leq = \leq'$ siano riflessive, allora

$$\begin{aligned} a \wedge (a \wedge b) = a \wedge b &\Rightarrow\; a \wedge b \leq' a \\ &\Rightarrow\; a \wedge b \leq a \\ &\Rightarrow\; a \vee (a \wedge b) = a \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} a \vee (a \vee b) = a \vee b &\Rightarrow\; a \leq a \vee b \\ &\Rightarrow\; a \leq' a \vee b \\ &\Rightarrow\; a \wedge (a \vee b) = a. \end{aligned}$$

□

Da 2.3.2 segue che in una struttura algebrica $(X, \vee, \wedge, \perp, \top)$ in cui valgono (a), (b), (c), (**AI**) ed (**AII**) si può definire una relazione d'ordine usando equivalentemente $\vee$ e $\wedge$, come indicato dalle proposizioni 2.2.3 e 2.2.6, rispettivamente.

In particolare, se $(X, \vee, \wedge, \perp, \top)$ è una struttura algebrica che soddisfa le proprietà (a), (b), (c), (**AI**) ed (**AII**), allora segue che la coppia $(X, \leq)$, con $\leq$ definita come in 2.2.3, o equivalentemente come in 2.2.6, è un reticolo.

ESEMPIO 2.3.3. Sia $X$ =ALFABETO e definiamo su $X$ le seguenti leggi di composizione interne binarie commutative, indicate con $\vee$ e $\wedge$:

$\vee$: (lettera) $\vee$ (stessa lettera) = (stessa lettera)
(vocale) $\vee$ (altra vocale) = II vocale in ordine alfabetico
(vocale) $\vee$ (consonante) = consonante
(consonante) $\vee$ (altra consonante) = $z$.

$\wedge$: (lettera) $\wedge$ (stessa lettera) = stessa lettera
(vocale) $\wedge$ (altra vocale) = $a$
(vocale) $\wedge$ (consonante) = vocale
(consonante) $\wedge$ (altra consonante) = I consonante in ordine alfabetico.

L'elemento neutro rispetto a $\vee$ è la vocale $a$, mentre l'elemento neutro rispetto a $\wedge$ è la consonante $z$.

Si tratta di due leggi di composizione che danno entrambe una struttura di semireticolo su $X$. Però, si vede subito che non valgono le leggi di assorbimento, infatti, ad esempio:

$$e \wedge (e \vee i) = a \quad e \quad c \vee (c \wedge b) = z.$$

In effetti, coerentemente con la Proposizione 2.3.2, le due relazioni d'ordine $\leq$ e $\leq'$, definite in 2.2.3 e 2.2.6 sono diverse, infatti

$$e \leq i \text{ (poiché } e \vee i = i), \text{ ma } e \not\leq' i \text{ (poiché } e \wedge i = a)$$

mentre

$$r \not\leq s \text{ (poiché } r \vee s = z), \text{ ma } r \leq' s \text{ (poiché } r \wedge s = r).$$

ESEMPIO 2.3.4. (a) Un insieme costituito da due soli elementi $\{\perp, \top\}$ con la relazione d'ordine $\perp \leq \top$ è un reticolo, detto reticolo banale, che si indica anche con $2 = (\{\perp, \top\}, \leq)$.

(b) Un insieme totalmente ordinato $(X \leq)$ è un reticolo se e solo se ha massimo $\top$ e minimo $\perp$. Infatti, $\forall x, y \in X$ se $x \leq y$ allora $\exists x \wedge y = x$ ed $\exists x \vee y = y$; inoltre, $\exists \vee \emptyset = \perp \in X$ ed $\exists \wedge \emptyset = \top \in X \Leftrightarrow X$ ha massimo $\top$ e minimo $\perp$. In particolare, l'insieme totalmente ordinato $([0,1], \leq)$ è un reticolo, mentre, evidentemente, $((0,1), \leq)$ non lo è.

(c) Se $X \neq \emptyset$ è un insieme, l'insieme ordinato $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ è un reticolo. Infatti, $\forall \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$, $\mathcal{A}$ finito si ha

$$\vee\mathcal{A} = \cup\mathcal{A} \ \in \mathcal{P}(X)$$

ed

$$\wedge\mathcal{A} = \cap\mathcal{A} \ \in \mathcal{P}(X).$$

DEFINIZIONE 2.3.5. *Sia $L$ un $\vee$-semireticolo ($\wedge$-semireticolo, rispettivamente) e sia $X \subseteq L$.*

*$X$ si dice* ***sottosemireticolo superiore*** *oppure* ***$\vee$-sottosemireticolo*** *(**sottosemireticolo inferiore** o **$\wedge$-sottosemireticolo**, rispettivamente) se $\forall F \subseteq X$, $F$ finito, l'estremo superiore (l'estremo inferiore, rispettivamente) di $F$ in $L$ appartiene ad $X$.*

Ovviamente tale definizione si applica anche al caso in cui $L$ è un reticolo.

DEFINIZIONE 2.3.6. *Sia $L$ un reticolo e sia $X \subseteq L$.*

*$X$ si dice **sottoreticolo** di $L$ se $\forall F \subseteq X$, $F$ finito, l'estremo superiore e l'estremo inferiore di $F$ in $L$ appartengono ad $X$.*

OSSERVAZIONE 2.3.7. Evidentemente, ogni sottosemireticolo superiore deve contenere $\perp$ ed ogni sottosemireticolo inferiore deve contenere $\top$.

Un $\vee$-sottosemireticolo ($\wedge$-sottosemireticolo o sottoreticolo, rispettivamente) $X$ di un reticolo $L$ è esso stesso un $\vee$-semireticolo ($\wedge$-semireticolo o reticolo, rispettivamente) con la relazione d'ordine, quindi con l'unione e l'intersezione indotte in esso da quelle di $L$.

ESEMPIO 2.3.8. Se $L$ è un reticolo, l'insieme $\{\perp, \top\}$ con la relazione d'ordine indotta da quella su $L$ è un sottoreticolo.

Un sottoinsieme di un reticolo $L$ con la relazione indotta da $L$ può essere esso stesso un reticolo senza essere un sottoreticolo di $L$.

ESEMPIO 2.3.9. (a) Se $L$ è un reticolo ed $a, b \in L$ con $a \leq b$ ed $a \neq b$, allora denotiamo con

$$[a, b] = \{x \in L | a \leq x \leq b\}.$$

$[a, b]$ pur essendo con la relazione indotta da $L$ un reticolo, ovviamente non è un $\vee$-sottosemireticolo se $a \neq \perp$ e non è un $\wedge$-sottosemireticolo se $b \neq \top$. E' un sottoreticolo sse $a = \perp$ e $b = \top$, cioè sse $[a, b] = L$.

(b) Sia $G$ un gruppo. Poniamo $\mathcal{S} = \{H | H \leq G\}$; $\mathcal{S}$ con la relazione d'ordine di inclusione fra insiemi è un reticolo $(\mathcal{S}, \subseteq)$, in cui $\forall H, K \in \mathcal{S}$

$$H \wedge K = H \cap K \text{ e } H \vee K = < H \cup K >$$

dove $< H \cup K >$ è il più piccolo sottogruppo in $\mathcal{S}$ contenente $H$ e $K$. Quindi $(\mathcal{S}, \subseteq)$ è un reticolo ma non è un sottoreticolo di $(\mathcal{P}(G), \subseteq)$.

Indichiamo con **POSet** la categoria concreta i cui oggetti sono gli insiemi ordinati ed i cui morfismi sono le funzioni isotone.

$\vee$-**SLat** ($\wedge$-**SLat**, rispettivamente) è la categoria concreta che ha come oggetti i semireticoli superiori (semireticoli inferiori, rispettivamente). I morfismi da un oggetto $(X, \leq)$ in un oggetto $(Y, \leq)$ sono le funzioni

$$f : X \to Y$$

che conservano $\vee$ ($\wedge$, rispettivamente) cioè tali che $\forall F \subseteq X$, $F$ finito si ha

$$f(\vee F) = \vee f^{\to}(F) \quad (f(\wedge F) = \wedge f^{\to}(F), \text{ rispettivamente}).$$

Tali morfismi si caratterizzano evidentemente anche come omomorfismi di monoidi.

**Lat** è la categoria concreta avente per oggetti i reticoli e per morfismi tra due reticoli $(X, \leq)$ ed $(Y, \leq)$, nell'ordine, le funzioni

$$f : X \to Y$$

che conservano $\vee$ e $\wedge$, cioè tali che

$$F \subseteq X,\ F \text{ finito } \Rightarrow\ f(\vee F) = \vee f^{\to}(F) \text{ e } f(\wedge F) = \wedge f^{\to}(F).$$

OSSERVAZIONE 2.3.10. Un isomorfismo fra due reticoli, cioè un isomorfismo di **Lat**, è un morfismo di reticoli bigettivo la cui funzione inversa è ancora un morfismo di reticoli.

LEMMA 2.3.11. *Siano* $X, Y \in |\vee\text{-}\mathbf{SLat}|$ ($X, Y \in |\wedge\text{-}\mathbf{SLat}|$, *rispettivamente*) *e sia* $f \in \vee\text{-}\mathbf{SLat}(X, Y)$ ($f \in \wedge\text{-}\mathbf{SLat}(X, Y)$, *rispettivamente*). *Si ha allora*

(1) $f$ *è isotona.*
(2) $f$ *iniettiva* $\Rightarrow$ $f$ *riflette l'ordine.*
(3) $f$ *bigettiva e* $X \in |\mathbf{Lat}| \Rightarrow f$ *isomorfismo di* **Lat**.

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo solo il caso della categoria $\vee$-**SLat**.
(1) $x \leq x'$ in $X \Rightarrow f(x) \vee f(x') = f(x \vee x') = f(x') \Rightarrow f(x) \leq f(x')$.

(2) Da $f(x) \leq f(x')$ segue $f(x \vee x') = f(x) \vee f(x') = f(x')$ da cui $x \vee x' = x'$ cioè $x \leq x'$.

(3) $f$ conserva $\wedge$ infatti $\forall y \in Y$ da $f^{-1}(y) \leq \top$ segue $y \leq f(\top)$ quindi $f(\top) = \top$.

Siano, poi, $x, x' \in X$. Allora $f(x \wedge x')$ è un minorante di $\{f(x), f(x')\}$ e per ogni altro minorante $a \leq f(x)$, $a \leq f(x')$ si ha $f^{-1}(a) \leq x$, $f^{-1}(a) \leq x'$ da cui $f^{-1}(a) \leq x \wedge x'$ e quindi $a \leq f(x \wedge x')$. Dunque $f(x \wedge x') = f(x) \wedge f(x')$. Dalla suriettività di $f$ segue evidentemente che $Y$ è chiuso per $\wedge$ quindi è un reticolo. Per concludere la dimostrazione basta verificare che la funzione inversa conserva $\vee$. Infatti da $f(\bot) = \bot$ segue $\bot = f^{-1}(\bot)$ e considerati $y, y' \in Y$, con $y = f(x)$ e $y' = f(x')$ si ha $f^{-1}(y \vee y') = f^{-1}(f(x) \vee f(x')) = f^{-1}(f(x \vee x')) = x \vee x' = f^{-1}(y) \vee f^{-1}(y')$. $\square$

E' evidente, tenendo anche conto del Lemma 2.3.11 *(1)*, che per le categorie su definite si hanno le seguenti inclusioni

$$\mathbf{Lat} \subseteq \vee\text{-}\mathbf{SLat} \subseteq \mathbf{POSet}$$

$$\mathbf{Lat} \subseteq \wedge\text{-}\mathbf{SLat} \subseteq \mathbf{POSet}.$$

Nessuna delle suddette inclusioni però è piena, come mostra il seguente esempio.

ESEMPIO 2.3.12. Dato un qualsiasi reticolo $X$ e considerata la funzione costante $k : X \to X$ che ad ogni $x \in X$ associa un fissato $k \in X$, è evidente che:

- $k$ è isotona, $\forall k \in X$.

- $k$ conserva $\vee$ sse $k = \perp$.
- $k$ conserva $\wedge$ sse $k = \top$.

Indicato con $Is(\mathbf{C}(A, B))$ l'insieme degli isomorfismi tra gli oggetti $A$ e $B$ di una generica categoria $\mathbf{C}$, si ha il seguente risultato.

PROPOSIZIONE 2.3.13. $\forall X, Y \in |\mathbf{Lat}|$ *si ha*

$$Is(\vee\text{-}\mathbf{SLat}(X, Y)) = Is(\mathbf{Lat}(X, Y)) = Is(\wedge\text{-}\mathbf{SLat}(X, Y)).$$

DIMOSTRAZIONE. E' conseguenza del Lemma 2.3.11. □

Osserviamo che una bigezione isotona non è necessariamente un isomorfismo in **POSet**. Si pensi ad esempio al morfismo identico

$$i_X : (X, \leq) \to (X, \leq'), \text{ con } \leq \subseteq \leq', \text{ ma } \leq \neq \leq' .$$

DEFINIZIONE 2.3.14. *Una involuzione che inverte l'ordine in un reticolo* $(X, \leq)$ *è una funzione*

$$\kappa : X \to X$$

*tale che*

$$\kappa^2 = i_X \text{ e } \forall x, y \in X : \ x \leq y \ \Rightarrow \ \kappa(y) \leq \kappa(x).$$

PROPOSIZIONE 2.3.15. *Una involuzione che inverte l'ordine in un reticolo* $(X, \leq)$ *è un isomorfismo fra* $(X, \leq)$ *ed il suo opposto (nel senso delle categorie ordinate)* $(X, \geq)$.

DIMOSTRAZIONE. Intanto $\kappa$ è bigettiva, anzi da $\kappa^2 = i_X$ segue che $\kappa$ è autoinversa. Peraltro è chiaro che $\kappa : (X, \leq) \to (X, \geq)$, è un morfismo di reticoli sse $\kappa : (X, \geq) \to (X, \leq)$ lo è.

Infatti, tenuto conto che i sup e gli inf in $(X, \geq)$ coincidono, rispettivamente, con gli inf e i sup in $(X, \leq)$, si tratta in entrambi i casi di provare che $\forall x, y \in X$

$$\kappa(x \vee y) = \kappa(x) \wedge \kappa(y)$$

o equivalentemente

$$\kappa(x \wedge y) = \kappa(x) \vee \kappa(y),$$

ed inoltre che

$$\kappa(\perp) = \top \ \text{ o equivalentemente, } \ \kappa(\top) = \perp.$$

Verifichiamo quindi che $\kappa(x \vee y)$ è l'estremo inferiore di $\{\kappa(x), \kappa(y)\}$.

Da $x \leq x \vee y$, e $y \leq x \vee y$, segue che $\kappa(x \vee y) \leq \kappa(x)$ e $\kappa(x \vee y) \leq \kappa(y)$.

Per ogni altro minorante $a \leq \kappa(x)$, $a \leq \kappa(y)$ si ha $x \leq \kappa(a)$ e $y \leq \kappa(a)$, quindi $x \vee y \leq \kappa(a)$ da cui $a \leq \kappa(x \vee y)$.

Analogamente si può verificare che $\kappa(x \wedge y)$ è l'estremo superiore di $\{\kappa(x), \kappa(y)\}$ il che, peraltro, è equivalente a quanto già provato.

Infine notiamo che da $\perp \leq x$, $\forall x \in X$, segue $y \leq \kappa(\perp)$, $\forall y \in X$, quindi $\kappa(\perp) = \top$ e $\kappa(\top) = \perp$. □

Le relazioni che esprimono esplicitamente l'enunciato precedente, verificate nel corso della dimostrazione, sono le note **Leggi di De Morgan**, che riformuliamo nuovamente e che valgono, ribadiamo, in un qualsiasi reticolo e rispetto ad una qualsiasi involuzione che inverte l'ordine

$$\kappa(x \vee y) = \kappa(x) \wedge \kappa(y) \quad \text{e} \quad \kappa(x \wedge y) = \kappa(x) \vee \kappa(y).$$

Tali relazioni verranno estese al caso di unioni e intersezioni arbitrarie (si veda la Proposizione 3.1.6).

Inoltre, notiamo esplicitamente che per ogni involuzione $\kappa$ che inverte l'ordine in un reticolo $(X, \leq)$ si ha $\kappa(\perp) = \top$ e $\kappa(\top) = \perp$.

## 2.4. Reticoli Distributivi ed Algebre di Boole

PROPOSIZIONE 2.4.1. *Se $(X, \vee, \wedge, \perp, \top)$ è un reticolo allora valgono le seguenti disuguaglianze distributive:*

(1) $(a \wedge x) \vee (a \wedge y) \leq a \wedge (x \vee y), \quad \forall x, y, a \in X.$
(2) $a \vee (x \wedge y) \leq (a \vee x) \wedge (a \vee y), \quad \forall x, y, a \in X.$

DIMOSTRAZIONE. Siano $a, x, y \in X$.
(1) Poiché $x \leq x \vee y$ allora $a \wedge x \leq a \wedge (x \vee y)$. Analogamente risulta $a \wedge y \leq a \wedge (x \vee y)$. Pertanto $a \wedge (x \vee y)$ è un maggiorante per $a \wedge x$ ed $a \wedge y$ e da ciò segue che $(a \wedge x) \vee (a \wedge y) \leq a \wedge (x \vee y)$.

(2) Poiché $x \wedge y \leq x$ e $x \wedge y \leq y$ allora $a \vee (x \wedge y) \leq a \vee x$ e $a \vee (x \wedge y) \leq a \vee y$; quindi $a \vee (x \wedge y)$ è un minorante per $a \vee x$ ed $a \vee y$ e perciò risulta $a \vee (x \wedge y) \leq (a \vee x) \wedge (a \vee y)$. □

DEFINIZIONE 2.4.2. *Un reticolo $(X, \leq)$ si dice* ***distributivo*** *se verifica le seguenti uguaglianze distributive:*

$$\textbf{(DI)} \quad a \wedge (x \vee y) = (a \wedge x) \vee (a \wedge y), \quad \forall x, y, a \in X.$$

$$\textbf{(DII)} \quad a \vee (x \wedge y) = (a \vee x) \wedge (a \vee y), \quad \forall x, y, a \in X.$$

TEOREMA 2.4.3. *In ogni reticolo $(X, \leq)$ le uguaglianze distributive* **(DI)** *e* **(DII)** *sono equivalenti.*

DIMOSTRAZIONE. Siano $a, x, y \in X$.

"**(DI)** $\Rightarrow$ **(DII)**"

$$\begin{aligned}(a \vee x) \wedge (a \vee y) &= [(a \vee x) \wedge a] \vee [(a \vee x) \wedge y] \\ &= a \vee [(a \wedge y) \vee (x \wedge y)] \\ &= [a \vee (a \wedge y)] \vee (x \wedge y) \\ &= a \vee (x \wedge y).\end{aligned}$$

"(**DII**) $\Rightarrow$ (**DI**)" Si dimostra analogamente. □

Si noti che la dimostrazione del Teorema 2.4.3 utilizza le due leggi di assorbimento.

PROPOSIZIONE 2.4.4. *Se $(X, \leq)$ è un reticolo che soddisfa* (**DI**) *o* (**DII**), *allora le leggi di assorbimento sono equivalenti, ovvero $\forall a, b \in X$ si ha*

$$a \wedge (a \vee b) = a \;\Leftrightarrow\; a \vee (a \wedge b) = a.$$

DIMOSTRAZIONE. Se $(X, \leq)$ è un reticolo che soddisfa (**DI**), allora $\forall a, b \in X$ si ha

$$a \wedge (a \vee b) = (a \wedge a) \vee (a \wedge b) = a \vee (a \wedge b)$$

da cui segue la tesi.

La verifica è analoga se $(X, \leq)$ soddisfa (**DII**). □

OSSERVAZIONE 2.4.5. 1. Un sottoreticolo di un reticolo distributivo è ancora distributivo.

2. Alternativamente alla definizione 2.4.2 si può definire reticolo distributivo un reticolo che soddisfa una fra le due leggi di assorbimento ed una fra le proprietà distributive. Questo segue da 2.4.3 e 2.4.4.

ESEMPIO 2.4.6. (a) L'insieme delle parti di un insieme non vuoto $X$, con la relazione di inclusione, $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ è un reticolo distributivo.

(b) L'intervallo unitario $[0, 1]$ con la relazione d'ordine $\leq$ indotta dalla relazione d'ordine naturale su $\mathbb{R}$ è un reticolo distributivo $([0, 1], \leq)$.

(c) Se $V$ è uno spazio vettoriale ed $\mathcal{S}(V)$ è l'insieme dei sottospazi vettoriali di $V$, allora $\mathcal{S}(V)$ con la relazione d'ordine d'inclusione $\subseteq$ è un reticolo, in cui il sottospazio nullo $O$ è il minimo, l'intero spazio vettoriale $V$ è il massimo e comunque presi $X, Y$ sottospazi di $V$ si ha

$$X \wedge Y = X \cap Y \quad e \quad X \vee Y = X + Y.$$

Le uguaglianze distributive non valgono per $dimV \geq 2$.

Verifichiamo, ad esempio, cosa succede per $n = 3$, considerando lo spazio dei vettori geometrici.

Siano $X, Y, Z$ tre rette di un piano $\pi$ passanti per l'origine e a due a due distinte. Allora risulta:

$$X \wedge (Y \vee Z) = X \cap (Y + Z) = X \cap \pi = X$$

mentre

$$(X \wedge Y) \vee (X \wedge Z) = (X \cap Y) + (X \cap Z) = O + O = O$$

quindi il reticolo non è distributivo.

Analogamente si dimostra che il reticolo dei sottogruppi di un dato gruppo non è necessariamente distributivo.

OSSERVAZIONE 2.4.7. Ogni insieme totalmente ordinato $(X, \leq)$ avente massimo e minimo è un reticolo distributivo. Infatti, per ogni $x, y, z \in X$ si ha

$$x \wedge (y \vee z) = \left\{ \begin{array}{ll} y \vee z & \text{se } y \leq x \text{ e } z \leq x \\ x & \text{se } x \leq y \text{ o } x \leq z \end{array} \right\} = (x \wedge y) \vee (x \wedge z).$$

Vedremo, anzi, più avanti (Proposizione 3.4.7) che un tale reticolo verifica una ben più forte condizione di distributività.

Indichiamo con **DLat** la sottocategoria piena di **Lat** avente per oggetti i reticoli distributivi.

PROPOSIZIONE 2.4.8. *Sia $X$ un reticolo distributivo. Fissati $h, k, a \in X$ se il sistema*

$$\left\{ \begin{array}{l} x \wedge a = h \\ x \vee a = k \end{array} \right.$$

*ammette soluzione, essa è unica.*

DIMOSTRAZIONE. Siano $x, y \in X$, soluzioni del sistema, allora per la distributività del reticolo si ha

$$\begin{aligned} y &= y \vee (y \wedge a) \\ &= y \vee (x \wedge a) \\ &= (y \vee x) \wedge (y \vee a) \\ &= (x \vee y) \wedge (x \vee a) \\ &= x \vee (y \wedge a) \\ &= x \vee (x \wedge a) \\ &= x \end{aligned}$$

□

DEFINIZIONE 2.4.9. *Un reticolo distributivo $(X, \vee, \wedge, \perp, \top)$ in cui esiste una funzione*

$$\neg : X \to X$$

*che ad ogni elemento $a \in X$ associa $\neg a$ tale che*

$$\left\{ \begin{array}{l} \neg a \wedge a = \perp \\ \neg a \vee a = \top \end{array} \right.$$

*si dice* ***algebra di Boole*** *e si indica con $(X, \vee, \wedge, \perp, \top, \neg)$.*

*La funzione $\neg$ si chiama* ***complementazione*** *e l'immagine tramite $\neg$ di un elemento $a \in X$, $\neg a$, si chiama il* ***complementare*** *di $a$.*

Dalla Proposizione 2.4.8 segue che in un'algebra di Boole vi è una sola possibile complementazione, la quale è univocamente determinata dalla relazione d'ordine, tramite le operazioni $\vee$ e $\wedge$. Pertanto un'algebra di Boole può anche essere indicata con una notazione del tipo $(X, \leq)$.

Proposizione 2.4.10. *Se $f \in \mathbf{DLat}(X,Y)$ e $X$ ed $Y$ sono algebre di Boole allora $\forall a \in X$ si ha*

$$\neg(f(a)) = f(\neg a)$$

*ovvero $f$ commuta con la complementazione del reticolo.*

Dimostrazione. Sia $a \in X$. Per ottenere la tesi occorre provare che

$$\begin{cases} f(\neg a) \wedge f(a) = \bot \\ f(\neg a) \vee f(a) = \top \end{cases}$$

infatti:

- $f(\neg a) \wedge f(a) = f(\neg a \wedge a) = f(\bot) = \bot$
- $f(\neg a) \vee f(a) = f(\neg a \vee a) = f(\top) = \top$.

□

Questa proposizione giustifica la seguente affermazione.

La sottocategoria piena di **DLat** avente per oggetti le algebre di Boole la indichiamo con **Bool**.

Ricordando la Proposizione 2.3.13 notiamo che se $X$ e $Y$ sono algebre di Boole ed $f : X \to Y$ è una bigezione, allora

$$f \text{ conserva } \vee \Leftrightarrow f \text{ è isomorfismo in } \mathbf{Bool} \Leftrightarrow f \text{ conserva } \wedge.$$

Proposizione 2.4.11. *Se $(X, \vee, \wedge, \bot, \top, \neg)$ è un'algebra di Boole, allora*

(1) *$\neg$ è un'involuzione.*
(2) *$\neg$ inverte l'ordine.*
(3) *$\neg$ verifica le leggi di De Morgan.*

Dimostrazione. (1) Dire che $\neg$ è un'involuzione significa che $\forall a \in X$ risulta

$$\neg\neg a = a,$$

infatti si ha che

$$a \wedge \neg a = \bot,\ a \vee \neg a = \top \Rightarrow \neg\neg a = a.$$

(2) Siano, $a, b \in X$, $a \leq b$. Allora $\neg b \wedge \neg a = \neg b$, infatti

$$(\neg b \wedge \neg a) \wedge b = (\neg b \wedge b) \wedge \neg a = \bot \wedge \neg a = \bot$$

e

$$\top = \top \wedge \top = \top \wedge (\neg a \vee a) \leq (\neg b \vee b) \wedge (\neg a \vee b) = (\neg b \wedge \neg a) \vee b,$$

da cui si ottiene $\neg b \leq \neg a$.

(3) Segue da (2) e dalla Proposizione 2.3.15. □

Un'involuzione che inverte l'ordine in un reticolo distributivo non è necessariamente una complementazione, come mostra l'esempio seguente.

ESEMPIO 2.4.12. Sia $([0,1], \leq)$ il reticolo distributivo dell'Esempio 2.4.6 (b). L'applicazione

$$\kappa : [0,1] \to [0,1]$$

che ad ogni $x \in [0,1]$ associa

$$\kappa(x) = 1 - x$$

è un'involuzione che inverte l'ordine ma non è una complementazione. In effetti $([0,1], \leq)$ non è un'algebra di Boole.

ESEMPIO 2.4.13. Il reticolo delle parti di un insieme non vuoto $X$, $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ dell'Esempio 2.4.6 (a) è un'algebra di Boole, in cui la complementazione è data $\forall A \in \mathcal{P}(X)$ da $\neg A = X \setminus A$, ovvero $\neg A$ è il complementare insiemistico di $A$.

## 2.5. Algebre di Heyting

DEFINIZIONE 2.5.1. *Un reticolo $(X, \leq)$ si dice un'**algebra di Heyting** se per ogni $a, b \in X$ esiste*

$$\max\{x \in X | x \wedge a \leq b\}.$$

OSSERVAZIONE 2.5.2. L'insieme $\{x \in X | x \wedge a \leq b\}$ non è vuoto, infatti $\perp \in \{x \in X | x \wedge a \leq b\}$. Ovviamente, $\perp$ è il minimo dell'insieme, il quale, in genere, non è affatto detto che abbia massimo.

Dalla definizione si evince che nelle algebre di Heyting si può considerare una nuova legge di composizione binaria

$$\to: X \times X \to X, \ (a,b) \mapsto a \to b = max\{x \in X | x \wedge a \leq b\}$$

detta **implicazione**.

Per tale motivo indicheremo in generale un'algebra di Heyting con la notazione $(X, \vee, \wedge, \perp, \top, \to)$.

Considereremo ora alcune proprietà di tipo algebrico che, come poi vedremo, caratterizzano l'operazione "$\to$".

PROPOSIZIONE 2.5.3. *Se $(X, \leq)$ è un reticolo, $\forall a, b, \gamma \in X$ si ha l'equivalenza*

$$\gamma = max\{x \in X | x \wedge a \leq b\}$$

$$\Updownarrow$$

$$\gamma \ verifica \ la \ condizione, \quad \forall x \in X \ : \ x \leq \gamma \ \Leftrightarrow \ x \wedge a \leq b.$$

DIMOSTRAZIONE. Poniamo, per praticità,

$$A = \{x \in X | x \wedge a \leq b\}.$$

"$\Downarrow$" Poiché per ipotesi $\gamma = maxA$, se $x \in X$ allora

$$x \leq \gamma \;\Rightarrow\; x \wedge a \leq \gamma \wedge a \leq b$$

e viceversa

$$x \wedge a \leq b \;\Rightarrow\; x \in A \;\Rightarrow\; x \leq \gamma.$$

"$\Uparrow$" Verifichiamo che $\gamma = maxA$.
$\gamma \leq \gamma \Rightarrow \gamma \wedge a \leq b \Rightarrow \gamma \in A$.
$x \in A \Rightarrow x \wedge a \leq b \Rightarrow x \leq \gamma$.

□

OSSERVAZIONE 2.5.4. In generale si preferisce dare la definizione di algebra di Heyting usando la condizione assunta nella Proposizione 2.5.3.

Infatti usando la notazione su introdotta per l'operazione di implicazione si ha una nuova formulazione della Definizione 2.5.1.

Con tale notazione si dice che

*$(X, \vee, \wedge, \perp, \top, \rightarrow)$ è un'algebra di Heyting se $(X, \vee, \wedge, \perp, \top)$ è un reticolo e l'operazione binaria "$\rightarrow$" verifica la condizione*

$$x \leq a \rightarrow b \;\Leftrightarrow\; x \wedge a \leq b,\; \forall x, a, b \in X.$$

C'è da notare che l'operazione di implicazione in un'algebra di Heyting è univocamente determinata dalla relazione d'ordine, in virtù della Proposizione 2.5.3. Pertanto un'algebra di Heyting può anche essere indicata con la semplice notazione $(X, \leq)$, almeno fin quando non si considerano morfismi fra tali strutture.

Verifichiamo, ora, quattro proprietà che, come vedremo dopo, sono necessarie e sufficienti per caratterizzare l'operazione "$\rightarrow$" di un'algebra di Heyting.

PROPOSIZIONE 2.5.5. *Se $(X, \leq)$ (equivalentemente $(X, \vee, \wedge, \perp, \top, \rightarrow)$) è un'algebra di Heyting allora l'implicazione "$\rightarrow$" verifica le seguenti proprietà:*

(1) $a \rightarrow a = \top$.
(2) $a \wedge (a \rightarrow b) = a \wedge b$.
(3) $b \wedge (a \rightarrow b) = b$.
(4) $a \rightarrow (b \wedge c) = (a \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow c)$.

DIMOSTRAZIONE. (1) $a \rightarrow a = max\{x \in X | x \wedge a \leq a\} = maxX = \top$.

(2) "$\leq$" Ovviamente $a \wedge (a \rightarrow b) \leq a$. Inoltre,

$$a \wedge (a \rightarrow b) \leq a \rightarrow b \;\Rightarrow\; (a \wedge (a \rightarrow b)) \wedge a \leq b \;\Rightarrow\; a \wedge (a \rightarrow b) \leq b.$$

"$\geq$" Ovviamente $a \wedge b \leq a$. Inoltre,

$$(a \wedge b) \wedge a = a \wedge b \leq b \;\Rightarrow\; a \wedge b \leq a \rightarrow b.$$

(3) Da $b \wedge a \leq b$ segue che $b \leq a \to b$. Quindi $b \wedge (a \to b) = b$.

(4) Proviamo che $a \to (b \wedge c)$ è l'inf di $(a \to b)$ e di $(a \to c)$.
$a \to (b \wedge c)$ è un minorante di $\{a \to b, a \to c\}$.
Infatti dalla proprietà (2) e dalla Proposizione 2.5.3 segue che

$$a \wedge (a \to (b \wedge c)) = a \wedge (b \wedge c) \leq b \Rightarrow \; a \to (b \wedge c) \leq (a \to b).$$

Analogamente

$$a \to (b \wedge c) \leq (a \to c).$$

Se, infine, $y \in X$ è un minorante di $a \to b$ e $a \to c$ allora

$$\begin{aligned} y \leq a \to b \text{ e } y \leq a \to c \Rightarrow \; & y \wedge a \leq b \;\text{ e }\; y \wedge a \leq c \\ \Rightarrow \; & y \wedge a \leq b \wedge c \\ \Rightarrow \; & y \leq a \to (b \wedge c). \end{aligned}$$

$\square$

PROPOSIZIONE 2.5.6. *Se* $(X, \vee, \wedge, \perp, \top)$ *è un reticolo con un'operazione*

$$\to : X \times X \to X$$

*che verifica le proprietà* (1), (2), (3), (4) *di* 2.5.5 *allora valgono*
(1) $b \leq b' \Rightarrow a \to b \leq a \to b'$, $\forall a \in X$
(2) $b \leq a \to b$.

DIMOSTRAZIONE. (1) Per la proprietà (4) di 2.5.5 si ha che

$$\begin{aligned} b \leq b' \; \Rightarrow \; & (a \to b) \wedge (a \to b') = a \to (b \wedge b') = a \to b \\ \Rightarrow \; & a \to b \leq a \to b'. \end{aligned}$$

(2) Per la proprietà (3) di 2.5.5 si ha

$$b \wedge (a \to b) = b \Rightarrow b \leq a \to b.$$

$\square$

La seguente Proposizione caratterizza le algebre di Heyting.

PROPOSIZIONE 2.5.7. *Un reticolo* $(X, \vee, \wedge, \perp, \top)$ *con un'operazione binaria "$\to$" è un'algebra di Heyting se e solo se l'operazione "$\to$" verifica le condizioni* (1), (2), (3), (4) *di* 2.5.5.

DIMOSTRAZIONE. "$\Rightarrow$" Se $(X, \vee, \wedge, \perp, \top, \to)$ è un'algebra di Heyting, allora la tesi segue da 2.5.5.

"$\Leftarrow$" Siano $a, b \in X$ e sia $x \in X$.
Se $x \leq a \to b$ allora per (2) si ha

$$(x \wedge a) \wedge b = x \wedge (a \wedge b) = x \wedge a \wedge (a \to b) = x \wedge a$$

ovvero $x \wedge a \leq b$.

Viceversa, sia $x \in X$, tale che $x \wedge a \leq b$. Per 2.5.6 (1), 2.5.5 (4), (1) e (3) risulta

$$\begin{aligned} x &= x \wedge (a \to x) \\ &= x \wedge ((a \to x) \wedge (a \to a)) \\ &= x \wedge (a \to (x \wedge a)) \\ &\leq x \wedge (a \to b) \\ &\leq a \to b. \end{aligned}$$

□

PROPOSIZIONE 2.5.8. *Ogni algebra di Heyting è un reticolo distributivo.*

DIMOSTRAZIONE. Poiché in ogni reticolo $(X, \leq)$ vale

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq a \wedge (b \vee c), \ \forall a, b, c \in X$$

per ottenere la tesi, per il Teorema 2.4.3, basta verificare che $\forall a, b, c \in X$ vale

$$a \wedge (b \vee c) \leq (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

In effetti per 2.5.6 (1) e (2) e 2.5.5 (1) e (4) si ha

$$\begin{aligned} b \vee c &\leq (a \to b) \vee (a \to c) \\ &= (a \to (a \wedge b)) \vee (a \to (a \wedge c)) \\ &\leq a \to (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \end{aligned}$$

da cui segue che

$$(b \vee c) \wedge a \leq (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

□

COROLLARIO 2.5.9. *Se $(X, \vee, \wedge, \perp, \top, \to)$ è un'algebra di Heyting allora valgono le seguenti proprietà*

(1) $(a \vee a') \to b = (a \to b) \wedge (a' \to b)$.
(2) $a \leq a' \Rightarrow a' \to b \leq a \to b$.

DIMOSTRAZIONE. (1) Siano $a, a', b \in X$. Per 2.5.6 (2) e 2.5.5 (2) si ha

$$((a \vee a') \to b) \wedge a \leq ((a \vee a') \to b) \wedge (a \vee a') = (a \vee a') \wedge b \leq b$$

pertanto

$$(a \vee a') \to b \leq (a \to b).$$

Analogamente si verifica che

$$(a \vee a') \to b \leq (a' \to b).$$

Inoltre, per la Proposizione 2.5.8 si ha che $\forall y \in X$

$$\begin{aligned} y \leq a \to b,\ y \leq a' \to b \Rightarrow\ & y \wedge a \leq b,\ y \wedge a' \leq b \\ \Rightarrow\ & (y \wedge a) \vee (y \wedge a') \leq b \\ \Rightarrow\ & y \wedge (a \vee a') \leq b \\ \Rightarrow\ & y \leq (a \vee a') \to b. \end{aligned}$$

(2) Siano $a, a', b \in X$. Se $a \leq a'$ allora

$$\begin{aligned} a \vee a' = a' \ \Rightarrow\ & a' \to b = (a \vee a') \to b = (a' \to b) \wedge (a \to b) \\ \Rightarrow\ & a' \to b \leq a \to b. \end{aligned}$$

□

PROPOSIZIONE 2.5.10. *Ogni algebra di Boole è un'algebra di Heyting.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $(X, \vee, \wedge, \perp, \top, \neg)$ un'algebra di Boole e $\forall a, b \in X$ sia

$$a \to b = \neg a \vee b.$$

Allora $\forall x \in X$ si ha

$$x \leq (a \to b) = \neg a \vee b \ \Rightarrow\ x \wedge a \leq (\neg a \vee b) \wedge a = b \wedge a \leq b$$

e viceversa se $x \wedge a \leq b$ allora

$$x \leq x \vee \neg a = (x \wedge a) \vee \neg a \leq \neg a \vee b = a \to b.$$

□

OSSERVAZIONE 2.5.11. In un'algebra di Boole, posto $a \to b = \neg a \vee b$ si ha ovviamente $\neg a = a \to \perp$.

In un'algebra di Heyting si può generalizzare l'operazione unaria di complementazione che caratterizza le algebre di Boole.

L'operazione unaria definita in un'algebra di Heyting $(X, \vee, \wedge, \perp, \top, \to)$

$$\neg : X \to X,\ a \longmapsto \neg a = a \to \perp$$

si dice *pseudo-complementazione* o *negazione*.

PROPOSIZIONE 2.5.12. *In un'algebra di Heyting la negazione verifica le seguenti proprietà:*

(1) $a \wedge \neg a = \perp$.
(2) $\neg$ *inverte l'ordine.*
(3) $\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$.
(4) $\neg\perp = \top$ *e* $\neg\top = \perp$.

DIMOSTRAZIONE. (1) $\forall a \in X$ risulta

$$a \wedge \neg a = a \wedge (a \to \bot) = a \wedge \bot = \bot.$$

(2) $\forall a, b \in X$, se $a \leq b$ allora per 2.5.9 *2.* $\neg b = b \to \bot \leq a \to \bot = \neg a$.

(3) $\forall a, b \in X$ si ha per 2.5.9 (1)

$$\neg(a \vee b) = (a \vee b) \to \bot = (a \to \bot) \wedge (b \to \bot) = \neg a \wedge \neg b.$$

(4) Per 2.5.5 *1.*, $\neg\bot = \bot \to \bot = \top$; $\neg\top = \bot$ infatti

$$\begin{aligned} \neg\top \leq \neg\top &\Rightarrow \neg\top \leq \top \to \bot \\ &\Rightarrow (\neg\top) \wedge \top \leq \bot \\ &\to (\neg\top) = \bot. \end{aligned}$$

□

PROPOSIZIONE 2.5.13. *Sia* $(X, \vee, \wedge, \bot, \top, \to)$ *un'algebra di Heyting e sia* $\neg$ *la negazione in essa definita. Allora*

$$(X, \vee, \wedge, \bot, \top, \neg) \text{ è un'algebra di Boole} \Leftrightarrow \neg \text{ è idempotente.}$$

DIMOSTRAZIONE. "$\Rightarrow$" Segue dalla Proposizione 2.4.11.

"$\Leftarrow$" Poiché $X$ è un'algebra di Heyting, da 2.5.8 segue che $X$ è un reticolo distributivo.

Inoltre, per 2.5.12 (1) e (3), poiché $\neg$ è idempotente si ha

$$\top = \neg\bot = \neg(a \wedge \neg a) = \neg(\neg\neg a \wedge \neg a) = \neg\neg(\neg a \vee a) = \neg a \vee a.$$

Da ciò e dalla 2.5.12 (1) segue la tesi. □

Indichiamo con **Heyt** la sottocategoria di **DLat** avente per oggetti le algebre di Heyting e per morfismi le applicazioni che sono compatibili con l'operazione "$\to$".

PROPOSIZIONE 2.5.14. **Bool** *è isomorfa ad una sottocategoria piena di* **Heyt**.

DIMOSTRAZIONE. Le funzioni definite da

$$(X, \vee, \wedge, \bot, \top, \neg) \in |\mathbf{Bool}| \longmapsto (X, \vee, \wedge, \bot, \top, \to) \in |\mathbf{Heyt}|$$

dove $a \to b = \neg a \vee b$, $\forall a, b \in X$ ed

$$f : X \to Y \longmapsto f : X \to Y$$

determinano una immersione piena di **Bool** in **Heyt**.

Tenendo infatti conto della Proposizione 2.5.10 ed osservando che considerate due algebre di Boole $X$ ed $Y$, se una funzione $f : X \to Y$ è un morfismo di **Heyt** e quindi di **Lat**, allora dalla 2.4.10 segue che $f$ è anche un morfismo di **Bool**; viceversa se $f$ è un morfismo di **Bool**, allora $\forall a, b \in X$ risulta $f(a \to b) = f(\neg a \vee b) = \neg f(a) \vee f(b) = f(a) \to f(b)$, cioè $f$ è un morfismo in **Heyt**. □

Notiamo, che, a differenza di **Bool**, **Heyt** non è una sottocategoria piena di **DLat**. Ciò risulterà chiaro nell'Esempio 3.3.12.

CAPITOLO 2

# Reticoli e Semireticoli

## 2.1. Insiemi Ordinati

DEFINIZIONE 2.1.1. *Sia $X$ un insieme.*

*Una relazione di* ***pre-ordine*** *(o di* ***quasi ordine****) su $X$ è una relazione binaria $\leq \subseteq X \times X$ che sia riflessiva e transitiva.*

*Un insieme $X$ munito di una relazione di pre-ordine, $\leq$, è detto insieme pre-ordinato, ed è indicato con $(X, \leq)$.*

*Una relazione* ***d'ordine*** *$\leq$ su $X$ è una relazione di pre-ordine che sia anche antisimmetrica.*

*$(X, \leq)$ è detto insieme ordinato quando $\leq$ è una relazione d'ordine.*

*Se $(X, \leq)$ è un insieme ordinato, due elementi $a, b \in X$ si dicono confrontabili se $a \leq b$ o $b \leq a$.*

*Un insieme ordinato $(X, \leq)$ in cui due qualsiasi elementi sono confrontabili, si definisce* ***totalmente ordinato*** *o* ***catena*** *e $\leq$ è detta relazione* ***d'ordine totale****.*

DEFINIZIONE 2.1.2. *Sia $(X, \leq)$ un insieme ordinato.*

*Se $A \subseteq X$, un elemento $m \in X$ si dice un* ***maggiorante*** *di $A$ se*

$$a \in A \ \Rightarrow \ a \leq m.$$

Indichiamo con $M(A)$ l'insieme dei maggioranti di $A$.

DEFINIZIONE 2.1.3. *Sia $(X, \leq)$ un insieme ordinato.*

*Se $A \subseteq X$, un elemento $m' \in X$ si dice un* ***minorante*** *di $A$ se*

$$a \in A \ \Rightarrow \ m' \leq a.$$

Indichiamo con $m(A)$ l'insieme dei minoranti di $A$.

DEFINIZIONE 2.1.4. *Siano $(X, \leq)$ un insieme ordinato ed $A \subseteq X$.*

*Un elemento $a_0 \in A$ si dice* ***massimo*** *di $A$, in simboli $a_0 = \max A$, se*

$$a \in A \ \Rightarrow \ a \leq a_0.$$

*Un elemento $b_0 \in A$ si dice* ***minimo*** *di $A$, in simboli $b_0 = minA$, se*

$$a \in A \ \Rightarrow \ b_0 \leq a.$$

OSSERVAZIONE 2.1.5. Il massimo e il minimo di un insieme, se esistono, sono unici. Infatti, se si suppone che ci siano due massimi $m, m' \in A$, allora per definizione di massimo si ha $m' \leq m$ ed $m \leq m'$ da cui segue che $m' = m$.

La verifica è analoga per l'unicità del minimo.

DEFINIZIONE 2.1.6. *Siano* $(X, \leq)$ *un insieme ordinato ed* $A \subseteq X$.

*Un elemento* $s \in X$ *è detto* ***estremo superiore*** *di* $A$ *ed è indicato con* $s = \bigvee A$ *o* $s = \sup A$, *se:*

(1) $s \in M(A)$.
(2) *Se* $b \in A$ *e* $a \leq b$, $\forall a \in A$, *allora* $s \leq b$.

*Un elemento* $t \in X$ *è detto* ***estremo inferiore*** *di* $A$ *ed è denotato con* $t = \bigwedge A$ *o* $t = \inf A$, *se:*

(1) $t \in m(A)$.
(2) *Se* $b' \in X$ *e* $b' \leq a$, $\forall a \in A$, *allora* $b' \leq t$.

OSSERVAZIONE 2.1.7. Dalla definizione 2.1.6 segue che

$$s = \sup A \Leftrightarrow s = \min(M(A))$$
$$t = \inf A \Leftrightarrow t = \max(m(A)).$$

Da tali proprietà e dall'Osservazione 2.1.5 segue che se un insieme ha sup o inf, allora esso è unico.

DEFINIZIONE 2.1.8. *Sia* $(X, \leq)$ *un insieme ordinato.*

$D \subseteq X$ *si dice* ***insieme diretto*** *se* $\forall F \subseteq D$, $F$ *finito,* $\exists m \in D$ *tale che* $m$ *è un maggiorante per* $F$.

$H \subseteq X$ *si dice* ***insieme filtrante*** *se* $\forall F \subseteq H$, $F$ *finito,* $\exists n \in H$ *tale che* $n$ *è un minorante per* $H$.

ESEMPIO 2.1.9. (a) Siano $X = \mathbb{R}$ con la relazione d'ordine usuale ed $A = \mathbb{N}$. Poiché in $\mathbb{R}$ non esistono maggioranti per $\mathbb{N}$ allora non esiste l'estremo superiore di $\mathbb{N}$.

(b) Sia $X = \mathbb{R} \setminus \{t\}$ con la relazione d'ordine indotta da quella usuale e sia $A = (-\infty, t)$, allora $M(A) = (t, +\infty)$ non ha minimo. Pertanto, anche se $M(A) \neq \emptyset$ non esiste $\sup A$.

(c) Si considerino due rette $r$ ed $s$ verticali, parallele e, successivamente, si prenda $X = r \cup s$ e si consideri su $X$ la seguente relazione d'ordine:

$$\forall a, b \in X,\ a \leq b \Leftrightarrow a \text{ e } b \text{ appartengono alla stessa retta ed } a \text{ sta sotto } b.$$

Pertanto, tale relazione d'ordine non è una relazione d'ordine totale. Se si prende l'insieme formato da due soli punti, uno appartenente ad $r$ e l'altro appartenente ad $s$, sicuramente non esiste il sup di tale insieme, perchè per esso non esistono maggioranti.

(d) Si considerino tre semirette aperte verticali e parallele $r$, $s$ e $t$, $r$ ed $s$

illimitate inferiormente, $t$ illimitata superiormente. Si prenda $X = r \cup s \cup t$ e si definisca la seguente relazione d'ordine:

$$\forall x, y \in X, \;\; x \leq y \;\Leftrightarrow\; \begin{array}{l}[x, y \text{ appartengono alla stessa} \\ \text{semiretta e } x \text{ sta sotto } y] \text{ oppure} \\ [x \text{ appartiene ad } r \cup s \\ \text{e } y \text{ appartiene a } t].\end{array}$$

Sia, poi, $A = \{a, b\}$, dove $a$ e $b$ appartengono rispettivamente alla semiretta $r$ e alla semiretta $s$, allora l'insieme dei maggioranti di $A$, $M(A)$, risulta essere l'insieme dei punti della semiretta $t$. Pertanto, non esiste il $\sup A$ poiché $M(A)$ non ha minimo, essendo la semiretta $t$ aperta.

OSSERVAZIONE 2.1.10. Sia $(X, \leq)$ un insieme ordinato. L'insieme dei maggioranti di $\emptyset \subseteq X$ è $M(\emptyset) = X$; pertanto segue che $\sup \emptyset$ esiste se e solo se esiste $minX$ e risulta $\sup \emptyset = minX$.

Analogamente, $m(\emptyset) = X$ e quindi $\inf \emptyset$ esiste se e solo se esiste $\max X$ e in particolare, $\inf \emptyset = \max X$.

## 2.2. $\vee$-semireticoli ed $\wedge$-semireticoli

DEFINIZIONE 2.2.1. *Sia $(X, \leq)$ un insieme ordinato, non vuoto. $(X, \leq)$ si dice **semireticolo superiore** o $\vee$-**semireticolo** se $\forall F \subseteq X$, $F$ finito, esiste il* $\sup F$, *brevemente denotato anche con $\vee F$.*

In particolare, poiché l'insieme vuoto è un insieme finito, esiste il $\sup \emptyset$ e quindi esiste il $minX$, che indicheremo con $\perp$.

Inoltre, $\forall a, b \in X$, esiste $\sup \{a, b\}$. L'esistenza del sup tra due elementi si trasferisce facilmente all'esistenza del sup di un numero finito di elementi e questo perchè il sup è associativo, ossia dati tre elementi $a, b, c \in X$, risulta:

$$\sup \{ \sup \{a, b\}, c\} = \sup \{a, \sup \{b, c\}\}.$$

Da ciò discende la seguente

CARATTERIZZAZIONE 2.2.2. *Un insieme ordinato $(X, \leq)$ è un semireticolo superiore se e solo se*

(1) *$X$ ha minimo.*
(2) *Per ogni $a, b \in X$, esiste* $\sup \{a, b\}$.

Dalla Caratterizzazione 2.2.2 si capisce come in un semireticolo superiore si ha la possibilità di definire una legge di composizione interna binaria:

$$\vee : X \times X \to X$$

ponendo per ogni $a, b \in X$

$$\vee(a, b) = a \vee b = \sup \{a, b\}$$

detta **unione**.

Inoltre, si vede subito che:

(a) $\vee$ è associativa.
(b) $\vee$ è commutativa.
(c) Esiste l'elemento neutro $\perp$ rispetto a $\vee$.
(e) Ogni elemento è idempotente rispetto a $\vee$, cioè $\forall a \in X$,

$$a \vee a = a.$$

Da tali proprietà discende che se $(X, \leq)$ è un $\vee$-semireticolo, allora la terna $(X, \vee, \perp)$ è un monoide commutativo.

L'implicazione inversa vale solo sotto ulteriori condizioni, come mostra la seguente proprietà.

PROPOSIZIONE 2.2.3. *Se $(X, \vee, \perp)$ è un monoide commutativo in cui ogni elemento è idempotente, allora esiste un'unica relazione d'ordine $\leq$ su $X$ tale che $(X, \leq)$ è un $\vee$-semireticolo, avente $\vee$ per unione.*

DIMOSTRAZIONE. Se per ogni $a, b \in X$ poniamo

$$a \leq b \;\Leftrightarrow\; a \vee b = b$$

allora risulta

- dalla proprietà di idempotenza soddisfatta da ogni elemento di $X$ segue che $\leq$ è riflessiva.
- $\leq$ è antisimmetrica: infatti se $a, b \in X$ sono tali che $a \leq b$ e $b \leq a$, allora si ha
$$a \vee b = b \quad \text{e} \quad b \vee a = a$$
e poiché $\vee$ è commutativa risulta
$$b = a \vee b = b \vee a = a.$$
- $\leq$ è transitiva: infatti, se $a, b, c \in X$ sono tali che $a \leq b$ e $b \leq c$, allora
$$a \vee b = b \quad \text{e} \quad b \vee c = c$$
pertanto,
$$a \vee c = a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c = b \vee c = c$$
ovvero $a \leq c$.

L'elemento neutro $\perp$ è un minimo per $X$ rispetto a tale relazione, infatti $\forall a \in X$ si ha che

$$\perp \vee a = a \;\Rightarrow\; \perp \leq a.$$

Inoltre, $\forall a, b \in X$ si ha $\sup \{a, b\} = a \vee b$; infatti risulta

$$a \vee (a \vee b) = (a \vee a) \vee b = a \vee b \;\Rightarrow\; a \leq a \vee b$$

e analogamente si ha $b \leq a \vee b$, ovvero $a \vee b$ è un maggiorante per $\{a, b\}$.

Se, inoltre, $k \in X$ è un maggiorante di $\{a, b\}$, allora si ha

$$k \vee (a \vee b) = (k \vee a) \vee b = k \vee b = k \;\Rightarrow\; (a \vee b) \leq k.$$

Pertanto, $(X, \leq)$ è un semireticolo superiore.

Se infine $\leq'$ è un'altra relazione d'ordine su $X$ che induce l'operazione $\vee$, cioè tale che

$$\sup_{\leq'} \{x, y\} = x \vee y, \ \forall x, y \in X$$

allora $\forall x, y \in X$ risulta

$$x \leq' y \ \Leftrightarrow \ y = \sup_{\leq'} \{x, y\} = x \vee y \ \Leftrightarrow \ x \leq y$$

cioè $\leq' = \leq$.

□

DEFINIZIONE 2.2.4. *Un insieme ordinato $(X, \leq)$ si dice **semireticolo inferiore** o **$\wedge$-semireticolo** se $\forall F \subseteq X$, $F$ finito, esiste* $\inf F$, *brevemente denotato con $\wedge F$.*

In particolare, in un semireticolo inferiore $(X, \leq)$, poiché esiste $\inf \emptyset$ allora esiste $\max X$ che indicheremo con $\top$. Inoltre, $\forall a, b \in X$ esiste $\inf \{a, b\}$.

Così come visto per il sup, anche l'esistenza dell'inf fra due elementi si trasferisce facilmente all'esistenza dell'inf di un numero finito di elementi.

Da ciò discende la seguente

CARATTERIZZAZIONE 2.2.5. *Un insieme ordinato $(X, \leq)$ è un semireticolo inferiore se e solo se*

(1) *$X$ ha massimo.*
(2) *Per ogni $a, b \in X$, esiste* $\inf \{a, b\}$.

Anche in questo caso si ha la possibilità di definire una legge di composizione interna binaria

$$\wedge : X \times X \to X$$

tale che per ogni $a, b \in X$ si ha

$$\wedge(a, b) = a \wedge b = \inf \{a, b\}$$

detta **intersezione**.

Anche in questo caso è evidente che:

(a) $\wedge$ è associativa.
(b) $\wedge$ è commutativa.
(c) Esiste l'elemento neutro $\top$ rispetto a $\wedge$.
(e) Ogni elemento è idempotente rispetto a $\wedge$, cioè per ogni $a \in X$,

$$a \wedge a = a.$$

Da tali proprietà discende che se $(X, \leq)$ è un $\wedge$-semireticolo, allora la terna $(X, \wedge, \top)$ è un monoide commutativo.

Vale inoltre la seguente proprietà.

PROPOSIZIONE 2.2.6. *Se $(X, \wedge, \top)$ è un monoide commutativo in cui ogni elemento è idempotente, allora esiste un'unica relazione d'ordine $\leq$ su $X$ tale che $(X, \leq)$ è un $\wedge$-semireticolo, avente $\wedge$ per intersezione.*

DIMOSTRAZIONE. Se per ogni $a, b \in X$ poniamo

$$a \leq b \Leftrightarrow a \wedge b = a$$

allora con una dimostrazione analoga a quella della Proposizione 2.2.3 segue la tesi. □

OSSERVAZIONE 2.2.7. 1. $(X, \leq)$ è un semireticolo inferiore allora $X$ con la relazione d'ordine duale di $\leq$, $\geq$, è un semireticolo superiore $(X, \geq)$.

Analogamente, se $(X, \leq)$ è un semireticolo superiore, allora $(X, \geq)$ è un semireticolo inferiore. Pertanto, possiamo affermare che ogni semireticolo inferiore individua univocamente un semireticolo superiore e viceversa.

2. Inoltre osserviamo che dal punto di vista algebrico non vi è alcuna distinzione fra semireticoli inferiori e superiori: entrambi infatti sono monoidi commutativi in cui ogni elemento è idempotente. Tuttavia un semireticolo superiore non sempre può essere considerato simultaneamente anche come semireticolo inferiore, poiché la relazione d'ordine indotta dalla legge di composizione secondo la Proposizione 2.2.3 e quella indotta secondo la Proposizione 2.2.6 in generale non coincidono, come vedremo più avanti (Esempio 2.3.3).

## 2.3. Reticoli

DEFINIZIONE 2.3.1. *Un insieme ordinato, $(L, \leq)$, con $|L| \geq 2$, è un* ***reticolo*** *se $\forall F \subseteq L$, $F$ finito, esistono $\vee F$ ed $\wedge F$, in $L$.*

Ovviamente, dalla definizione segue che ogni reticolo ha un minimo, $\perp = \vee\emptyset$, e un massimo, $\top = \wedge\emptyset$, e ovviamente $\top \neq \perp$.

In un reticolo $(X, \leq)$ si definiscono entrambe le leggi di composizione binarie: l'unione, $\vee$, e l'intersezione $\wedge$, rispetto alle quali gli elementi neutri sono rispettivamente $\perp$ e $\top$. Pertanto, un reticolo dà una struttura algebrica $(X, \vee, \wedge, \perp, \top)$ con le seguenti proprietà

(a) $\vee$ e $\wedge$ sono commutative e associative.
(b) Esiste l'elemento neutro, $\perp$ rispetto a $\vee$ e $\top$ rispetto a $\wedge$.
(c) Ogni elemento è idempotente per entrambe le leggi di composizione.

Ma si verificano anche ulteriori proprietà, dette **leggi di assorbimento** ovvero $\forall a, b \in X$ si ha

$$(A_1) \quad a \vee (a \wedge b) = a$$
$$(A_2) \quad a \wedge (a \vee b) = a.$$

Infatti, $\forall a, b \in X$ risulta:

$$a \wedge b \leq a \;\Rightarrow\; a \vee (a \wedge b) = a$$

e

$$a \leq a \vee b \;\Rightarrow\; a \wedge (a \vee b) = a.$$

PROPOSIZIONE 2.3.2. *Sia* $(X, \vee, \wedge)$ *una struttura algebrica.*
$(X, \vee, \wedge)$ *verifica le due leggi di assorbimento se e solo se posto*

$$a \leq b \;\Leftrightarrow\; a \vee b = b \;\forall a, b \in X$$

*e*

$$a \leq' b \;\Leftrightarrow\; a \wedge b = a \;\forall a, b \in X$$

*risulta che* $\leq$ *e* $\leq'$ *sono riflessive e*

$$\leq = \leq'.$$

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che $(X, \vee, \wedge)$ soddisfi (**AI**) ed (**AII**).
"$\subseteq$" Siano $a, b \in X$ tali che $a \leq b$; allora $a \vee b = b$ e quindi $a \wedge (a \vee b) = a \wedge b$. Per la (**AII**) segue che $a = a \wedge b$ ovvero $a \leq' b$.

"$\supseteq$" Siano $a, b \in X$ tali che $a \leq' b$, allora $a \wedge b = a$ e quindi $(a \wedge b) \vee b = a \vee b$. Per la (**AI**) segue che $b = a \vee b$ ovvero che $a \leq b$.

Inoltre dalla (**AI**) ed (**AII**) segue che $\forall a \in X$: $a \vee a = a \vee (a \wedge (a \vee a)) = a$ quindi $a \leq a$. Analogamente $a \leq' a$.

Viceversa se supponiamo che $\leq = \leq'$ siano riflessive, allora

$$\begin{aligned} a \wedge (a \wedge b) = a \wedge b \Rightarrow\; & a \wedge b \leq' a \\ \Rightarrow\; & a \wedge b \leq a \\ \Rightarrow\; & a \vee (a \wedge b) = a \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} a \vee (a \vee b) = a \vee b \Rightarrow\; & a \leq a \vee b \\ \Rightarrow\; & a \leq' a \vee b \\ \Rightarrow\; & a \wedge (a \vee b) = a. \end{aligned}$$

□

Da 2.3.2 segue che in una struttura algebrica $(X, \vee, \wedge, \perp, \top)$ in cui valgono (a), (b), (c), (**AI**) ed (**AII**) si può definire una relazione d'ordine usando equivalentemente $\vee$ e $\wedge$, come indicato dalle proposizioni 2.2.3 e 2.2.6, rispettivamente.

In particolare, se $(X, \vee, \wedge, \perp, \top)$ è una struttura algebrica che soddisfa le proprietà (a), (b), (c), (**AI**) ed (**AII**), allora segue che la coppia $(X, \leq)$, con $\leq$ definita come in 2.2.3, o equivalentemente come in 2.2.6, è un reticolo.

ESEMPIO 2.3.3. Sia $X$ =ALFABETO e definiamo su $X$ le seguenti leggi di composizione interne binarie commutative, indicate con $\vee$ e $\wedge$:

$\vee$: (lettera) $\vee$ (stessa lettera) = (stessa lettera)
(vocale) $\vee$ (altra vocale) = II vocale in ordine alfabetico
(vocale) $\vee$ (consonante) = consonante
(consonante) $\vee$ (altra consonante) = $z$.

$\wedge$: (lettera) $\wedge$ (stessa lettera) = stessa lettera
(vocale) $\wedge$ (altra vocale) = $a$
(vocale) $\wedge$ (consonante) = vocale
(consonante) $\wedge$ (altra consonante) = I consonante in ordine alfabetico.

L'elemento neutro rispetto a $\vee$ è la vocale $a$, mentre l'elemento neutro rispetto a $\wedge$ è la consonante $z$.

Si tratta di due leggi di composizione che danno entrambe una struttura di semireticolo su $X$. Però, si vede subito che non valgono le leggi di assorbimento, infatti, ad esempio:

$$e \wedge (e \vee i) = a \quad e \quad c \vee (c \wedge b) = z.$$

In effetti, coerentemente con la Proposizione 2.3.2, le due relazioni d'ordine $\leq$ e $\leq'$, definite in 2.2.3 e 2.2.6 sono diverse, infatti

$$e \leq i \text{ (poiché } e \vee i = i), \quad \text{ma} \quad e \not\leq' i \text{ (poiché } e \wedge i = a)$$

mentre

$$r \not\leq s \text{ (poiché } r \vee s = z), \quad \text{ma} \quad r \leq' s \text{ (poiché } r \wedge s = r).$$

Esempio 2.3.4. (a) Un insieme costituito da due soli elementi $\{\perp, \top\}$ con la relazione d'ordine $\perp \leq \top$ è un reticolo, detto reticolo banale, che si indica anche con $2 = (\{\perp, \top\}, \leq)$.

(b) Un insieme totalmente ordinato $(X \leq)$ è un reticolo se e solo se ha massimo $\top$ e minimo $\perp$. Infatti, $\forall x, y \in X$ se $x \leq y$ allora $\exists x \wedge y = x$ ed $\exists x \vee y = y$; inoltre, $\exists \vee \emptyset = \perp \in X$ ed $\exists \wedge \emptyset = \top \in X \Leftrightarrow X$ ha massimo $\top$ e minimo $\perp$. In particolare, l'insieme totalmente ordinato $([0,1], \leq)$ è un reticolo, mentre, evidentemente, $((0,1), \leq)$ non lo è.

(c) Se $X \neq \emptyset$ è un insieme, l'insieme ordinato $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ è un reticolo. Infatti, $\forall \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$, $\mathcal{A}$ finito si ha

$$\vee\mathcal{A} = \cup\mathcal{A} \in \mathcal{P}(X)$$

ed

$$\wedge\mathcal{A} = \cap\mathcal{A} \in \mathcal{P}(X).$$

Definizione 2.3.5. *Sia $L$ un $\vee$-semireticolo ($\wedge$-semireticolo, rispettivamente) e sia $X \subseteq L$.*

*$X$ si dice* ***sottosemireticolo superiore*** *oppure* $\vee$-***sottosemireticolo*** *(****sottosemireticolo inferiore*** *o* $\wedge$-***sottosemireticolo****, rispettivamente) se $\forall F \subseteq X$, $F$ finito, l'estremo superiore (l'estremo inferiore, rispettivamente) di $F$ in $L$ appartiene ad $X$.*

Ovviamente tale definizione si applica anche al caso in cui $L$ è un reticolo.

DEFINIZIONE 2.3.6. *Sia $L$ un reticolo e sia $X \subseteq L$.*

*$X$ si dice **sottoreticolo** di $L$ se $\forall F \subseteq X$, $F$ finito, l'estremo superiore e l'estremo inferiore di $F$ in $L$ appartengono ad $X$.*

OSSERVAZIONE 2.3.7. Evidentemente, ogni sottosemireticolo superiore deve contenere $\perp$ ed ogni sottosemireticolo inferiore deve contenere $\top$.

Un $\vee$-sottosemireticolo ($\wedge$-sottosemireticolo o sottoreticolo, rispettivamente) $X$ di un reticolo $L$ è esso stesso un $\vee$-semireticolo ($\wedge$-semireticolo o reticolo, rispettivamente) con la relazione d'ordine, quindi con l'unione e l'intersezione indotte in esso da quelle di $L$.

ESEMPIO 2.3.8. Se $L$ è un reticolo, l'insieme $\{\perp, \top\}$ con la relazione d'ordine indotta da quella su $L$ è un sottoreticolo.

Un sottoinsieme di un reticolo $L$ con la relazione indotta da $L$ può essere esso stesso un reticolo senza essere un sottoreticolo di $L$.

ESEMPIO 2.3.9. (a) Se $L$ è un reticolo ed $a, b \in L$ con $a \leq b$ ed $a \neq b$, allora denotiamo con

$$[a, b] = \{x \in L | a \leq x \leq b\}.$$

$[a, b]$ pur essendo con la relazione indotta da $L$ un reticolo, ovviamente non è un $\vee$-sottosemireticolo se $a \neq \perp$ e non è un $\wedge$-sottosemireticolo se $b \neq \top$. E' un sottoreticolo sse $a = \perp$ e $b = \top$, cioè sse $[a, b] = L$.

(b) Sia $G$ un gruppo. Poniamo $\mathcal{S} = \{H | H \leq G\}$; $\mathcal{S}$ con la relazione d'ordine di inclusione fra insiemi è un reticolo $(\mathcal{S}, \subseteq)$, in cui $\forall H, K \in \mathcal{S}$

$$H \wedge K = H \cap K \text{ e } H \vee K = < H \cup K >$$

dove $< H \cup K >$ è il più piccolo sottogruppo in $\mathcal{S}$ contenente $H$ e $K$. Quindi $(\mathcal{S}, \subseteq)$ è un reticolo ma non è un sottoreticolo di $(\mathcal{P}(G), \subseteq)$.

Indichiamo con **POSet** la categoria concreta i cui oggetti sono gli insiemi ordinati ed i cui morfismi sono le funzioni isotone.

$\vee$-**SLat** ($\wedge$-**SLat**, rispettivamente) è la categoria concreta che ha come oggetti i semireticoli superiori (semireticoli inferiori, rispettivamente). I morfismi da un oggetto $(X, \leq)$ in un oggetto $(Y, \leq)$ sono le funzioni

$$f : X \to Y$$

che conservano $\vee$ ($\wedge$, rispettivamente) cioè tali che $\forall F \subseteq X$, $F$ finito si ha

$$f(\vee F) = \vee f^{\rightarrow}(F) \quad (f(\wedge F) = \wedge f^{\rightarrow}(F), \text{ rispettivamente}).$$

Tali morfismi si caratterizzano evidentemente anche come omomorfismi di monoidi.

**Lat** è la categoria concreta avente per oggetti i reticoli e per morfismi tra due reticoli $(X, \leq)$ ed $(Y, \leq)$, nell'ordine, le funzioni

$$f : X \to Y$$

che conservano $\vee$ e $\wedge$, cioè tali che

$$F \subseteq X,\ F \text{ finito } \Rightarrow\ f(\vee F) = \vee f^{\rightarrow}(F) \text{ e } f(\wedge F) = \wedge f^{\rightarrow}(F).$$

OSSERVAZIONE 2.3.10. Un isomorfismo fra due reticoli, cioè un isomorfismo di **Lat**, è un morfismo di reticoli bigettivo la cui funzione inversa è ancora un morfismo di reticoli.

LEMMA 2.3.11. *Siano* $X, Y \in |\vee\text{-}\mathbf{SLat}|$ ($X, Y \in |\wedge\text{-}\mathbf{SLat}|$, *rispettivamente*) *e sia* $f \in \vee\text{-}\mathbf{SLat}(X, Y)$ ($f \in \wedge\text{-}\mathbf{SLat}(X, Y)$, *rispettivamente*). *Si ha allora*

(1) $f$ *è isotona.*
(2) $f$ *iniettiva* $\Rightarrow f$ *riflette l'ordine.*
(3) $f$ *bigettiva e* $X \in |\mathbf{Lat}| \Rightarrow f$ *isomorfismo di* **Lat**.

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo solo il caso della categoria $\vee$-**SLat**.
(1) $x \leq x'$ in $X \Rightarrow f(x) \vee f(x') = f(x \vee x') = f(x') \Rightarrow f(x) \leq f(x')$.

(2) Da $f(x) \leq f(x')$ segue $f(x \vee x') = f(x) \vee f(x') = f(x')$ da cui $x \vee x' = x'$ cioè $x \leq x'$.

(3) $f$ conserva $\wedge$ infatti $\forall y \in Y$ da $f^{-1}(y) \leq \top$ segue $y \leq f(\top)$ quindi $f(\top) = \top$.

Siano, poi, $x, x' \in X$. Allora $f(x \wedge x')$ è un minorante di $\{f(x), f(x')\}$ e per ogni altro minorante $a \leq f(x)$, $a \leq f(x')$ si ha $f^{-1}(a) \leq x$, $f^{-1}(a) \leq x'$ da cui $f^{-1}(a) \leq x \wedge x'$ e quindi $a \leq f(x \wedge x')$. Dunque $f(x \wedge x') = f(x) \wedge f(x')$. Dalla suriettività di $f$ segue evidentemente che $Y$ è chiuso per $\wedge$ quindi è un reticolo. Per concludere la dimostrazione basta verificare che la funzione inversa conserva $\vee$. Infatti da $f(\bot) = \bot$ segue $\bot = f^{-1}(\bot)$ e considerati $y, y' \in Y$, con $y = f(x)$ e $y' = f(x')$ si ha $f^{-1}(y \vee y') = f^{-1}(f(x) \vee f(x')) = f^{-1}(f(x \vee x')) = x \vee x' = f^{-1}(y) \vee f^{-1}(y')$. □

E' evidente, tenendo anche conto del Lemma 2.3.11 *(1)*, che per le categorie su definite si hanno le seguenti inclusioni

$$\mathbf{Lat} \subseteq \vee\text{-}\mathbf{SLat} \subseteq \mathbf{POSet}$$

$$\mathbf{Lat} \subseteq \wedge\text{-}\mathbf{SLat} \subseteq \mathbf{POSet}.$$

Nessuna delle suddette inclusioni però è piena, come mostra il seguente esempio.

ESEMPIO 2.3.12. Dato un qualsiasi reticolo $X$ e considerata la funzione costante $k : X \to X$ che ad ogni $x \in X$ associa un fissato $k \in X$, è evidente che:

- $k$ è isotona, $\forall k \in X$.

- $k$ conserva $\vee$ sse $k = \bot$.
- $k$ conserva $\wedge$ sse $k = \top$.

Indicato con $Is(\mathbf{C}(A, B))$ l'insieme degli isomorfismi tra gli oggetti $A$ e $B$ di una generica categoria $\mathbf{C}$, si ha il seguente risultato.

PROPOSIZIONE 2.3.13. *$\forall X, Y \in |\mathbf{Lat}|$ si ha*

$$Is(\vee\text{-}\mathbf{SLat}(X, Y)) = Is(\mathbf{Lat}(X, Y)) = Is(\wedge\text{-}\mathbf{SLat}(X, Y)).$$

DIMOSTRAZIONE. E' conseguenza del Lemma 2.3.11. □

Osserviamo che una bigezione isotona non è necessariamente un isomorfismo in **POSet**. Si pensi ad esempio al morfismo identico

$$i_X : (X, \leq) \to (X, \leq'), \text{ con } \leq \subseteq \leq', \text{ ma } \leq \neq \leq' .$$

DEFINIZIONE 2.3.14. *Una involuzione che inverte l'ordine in un reticolo $(X, \leq)$ è una funzione*

$$\kappa : X \to X$$

*tale che*

$$\kappa^2 = i_X \text{ e } \forall x, y \in X : \; x \leq y \;\Rightarrow\; \kappa(y) \leq \kappa(x).$$

PROPOSIZIONE 2.3.15. *Una involuzione che inverte l'ordine in un reticolo $(X, \leq)$ è un isomorfismo fra $(X, \leq)$ ed il suo opposto (nel senso delle categorie ordinate) $(X, \geq)$.*

DIMOSTRAZIONE. Intanto $\kappa$ è bigettiva, anzi da $\kappa^2 = i_X$ segue che $\kappa$ è autoinversa. Peraltro è chiaro che $\kappa : (X, \leq) \to (X, \geq)$, è un morfismo di reticoli sse $\kappa : (X, \geq) \to (X, \leq)$ lo è.

Infatti, tenuto conto che i sup e gli inf in $(X, \geq)$ coincidono, rispettivamente, con gli inf e i sup in $(X, \leq)$, si tratta in entrambi i casi di provare che $\forall x, y \in X$

$$\kappa(x \vee y) = \kappa(x) \wedge \kappa(y)$$

o equivalentemente

$$\kappa(x \wedge y) = \kappa(x) \vee \kappa(y),$$

ed inoltre che

$$\kappa(\bot) = \top \;\text{ o equivalentemente, }\; \kappa(\top) = \bot.$$

Verifichiamo quindi che $\kappa(x \vee y)$ è l'estremo inferiore di $\{\kappa(x), \kappa(y)\}$.

Da $x \leq x \vee y$, e $y \leq x \vee y$, segue che $\kappa(x \vee y) \leq \kappa(x)$ e $\kappa(x \vee y) \leq \kappa(y)$.

Per ogni altro minorante $a \leq \kappa(x)$, $a \leq \kappa(y)$ si ha $x \leq \kappa(a)$ e $y \leq \kappa(a)$, quindi $x \vee y \leq \kappa(a)$ da cui $a \leq \kappa(x \vee y)$.

Analogamente si può verificare che $\kappa(x \wedge y)$ è l'estremo superiore di $\{\kappa(x), \kappa(y)\}$ il che, peraltro, è equivalente a quanto già provato.

Infine notiamo che da $\bot \leq x$, $\forall x \in X$, segue $y \leq \kappa(\bot)$, $\forall y \in X$, quindi $\kappa(\bot) = \top$ e $\kappa(\top) = \bot$. □

Le relazioni che esprimono esplicitamente l'enunciato precedente, verificate nel corso della dimostrazione, sono le note **Leggi di De Morgan**, che riformuliamo nuovamente e che valgono, ribadiamo, in un qualsiasi reticolo e rispetto ad una qualsiasi involuzione che inverte l'ordine

$$\kappa(x \vee y) = \kappa(x) \wedge \kappa(y) \quad \text{e} \quad \kappa(x \wedge y) = \kappa(x) \vee \kappa(y).$$

Tali relazioni verranno estese al caso di unioni e intersezioni arbitrarie (si veda la Proposizione 3.1.6).

Inoltre, notiamo esplicitamente che per ogni involuzione $\kappa$ che inverte l'ordine in un reticolo $(X, \leq)$ si ha $\kappa(\perp) = \top$ e $\kappa(\top) = \perp$.

## 2.4. Reticoli Distributivi ed Algebre di Boole

PROPOSIZIONE 2.4.1. *Se $(X, \vee, \wedge, \perp, \top)$ è un reticolo allora valgono le seguenti disuguaglianze distributive:*

(1) $(a \wedge x) \vee (a \wedge y) \leq a \wedge (x \vee y), \quad \forall x, y, a \in X.$
(2) $a \vee (x \wedge y) \leq (a \vee x) \wedge (a \vee y), \quad \forall x, y, a \in X.$

DIMOSTRAZIONE. Siano $a, x, y \in X$.
(1) Poiché $x \leq x \vee y$ allora $a \wedge x \leq a \wedge (x \vee y)$. Analogamente risulta $a \wedge y \leq a \wedge (x \vee y)$. Pertanto $a \wedge (x \vee y)$ è un maggiorante per $a \wedge x$ ed $a \wedge y$ e da ciò segue che $(a \wedge x) \vee (a \wedge y) \leq a \wedge (x \vee y)$.

(2) Poiché $x \wedge y \leq x$ e $x \wedge y \leq y$ allora $a \vee (x \wedge y) \leq a \vee x$ e $a \vee (x \wedge y) \leq a \vee y$; quindi $a \vee (x \wedge y)$ è un minorante per $a \vee x$ ed $a \vee y$ e perciò risulta $a \vee (x \wedge y) \leq (a \vee x) \wedge (a \vee y)$. □

DEFINIZIONE 2.4.2. *Un reticolo $(X, \leq)$ si dice **distributivo** se verifica le seguenti uguaglianze distributive:*

$$\textbf{(DI)} \quad a \wedge (x \vee y) = (a \wedge x) \vee (a \wedge y), \quad \forall x, y, a \in X.$$

$$\textbf{(DII)} \quad a \vee (x \wedge y) = (a \vee x) \wedge (a \vee y), \quad \forall x, y, a \in X.$$

TEOREMA 2.4.3. *In ogni reticolo $(X, \leq)$ le uguaglianze distributive* **(DI)** *e* **(DII)** *sono equivalenti.*

DIMOSTRAZIONE. Siano $a, x, y \in X$.

"**(DI)** $\Rightarrow$ **(DII)**"

$$\begin{aligned}(a \vee x) \wedge (a \vee y) &= [(a \vee x) \wedge a] \vee [(a \vee x) \wedge y] \\ &= a \vee [(a \wedge y) \vee (x \wedge y)] \\ &= [a \vee (a \wedge y)] \vee (x \wedge y) \\ &= a \vee (x \wedge y).\end{aligned}$$

"(**DII**) $\Rightarrow$ (**DI**)" Si dimostra analogamente. $\square$

Si noti che la dimostrazione del Teorema 2.4.3 utilizza le due leggi di assorbimento.

PROPOSIZIONE 2.4.4. *Se* $(X, \leq)$ *è un reticolo che soddisfa* (**DI**) *o* (**DII**), *allora le leggi di assorbimento sono equivalenti, ovvero* $\forall a, b \in X$ *si ha*

$$a \wedge (a \vee b) = a \;\Leftrightarrow\; a \vee (a \wedge b) = a.$$

DIMOSTRAZIONE. Se $(X, \leq)$ è un reticolo che soddisfa (**DI**), allora $\forall a, b \in X$ si ha

$$a \wedge (a \vee b) = (a \wedge a) \vee (a \wedge b) = a \vee (a \wedge b)$$

da cui segue la tesi.

La verifica è analoga se $(X, \leq)$ soddisfa (**DII**). $\square$

OSSERVAZIONE 2.4.5. 1. Un sottoreticolo di un reticolo distributivo è ancora distributivo.

2. Alternativamente alla definizione 2.4.2 si può definire reticolo distributivo un reticolo che soddisfa una fra le due leggi di assorbimento ed una fra le proprietà distributive. Questo segue da 2.4.3 e 2.4.4.

ESEMPIO 2.4.6. (a) L'insieme delle parti di un insieme non vuoto $X$, con la relazione di inclusione, $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ è un reticolo distributivo.

(b) L'intervallo unitario $[0, 1]$ con la relazione d'ordine $\leq$ indotta dalla relazione d'ordine naturale su $\mathbb{R}$ è un reticolo distributivo $([0, 1], \leq)$.

(c) Se $V$ è uno spazio vettoriale ed $\mathcal{S}(V)$ è l'insieme dei sottospazi vettoriali di $V$, allora $\mathcal{S}(V)$ con la relazione d'ordine d'inclusione $\subseteq$ è un reticolo, in cui il sottospazio nullo $O$ è il minimo, l'intero spazio vettoriale $V$ è il massimo e comunque presi $X, Y$ sottospazi di $V$ si ha

$$X \wedge Y = X \cap Y \quad e \quad X \vee Y = X + Y.$$

Le uguaglianze distributive non valgono per $dimV \geq 2$.

Verifichiamo, ad esempio, cosa succede per $n = 3$, considerando lo spazio dei vettori geometrici.

Siano $X, Y, Z$ tre rette di un piano $\pi$ passanti per l'origine e a due a due distinte. Allora risulta:

$$X \wedge (Y \vee Z) = X \cap (Y + Z) = X \cap \pi = X$$

mentre

$$(X \wedge Y) \vee (X \wedge Z) = (X \cap Y) + (X \cap Z) = O + O = O$$

quindi il reticolo non è distributivo.

Analogamente si dimostra che il reticolo dei sottogruppi di un dato gruppo non è necessariamente distributivo.

OSSERVAZIONE 2.4.7. Ogni insieme totalmente ordinato $(X, \leq)$ avente massimo e minimo è un reticolo distributivo. Infatti, per ogni $x, y, z \in X$ si ha

$$x \wedge (y \vee z) = \left\{ \begin{array}{ll} y \vee z & \text{se } y \leq x \ \text{ e } \ z \leq x \\ x & \text{se } x \leq y \ \text{ o } \ x \leq z \end{array} \right\} = (x \wedge y) \vee (x \wedge z).$$

Vedremo, anzi, più avanti (Proposizione 3.4.7) che un tale reticolo verifica una ben più forte condizione di distributività.

Indichiamo con **DLat** la sottocategoria piena di **Lat** avente per oggetti i reticoli distributivi.

PROPOSIZIONE 2.4.8. *Sia $X$ un reticolo distributivo. Fissati $h, k, a \in X$ se il sistema*

$$\begin{cases} x \wedge a = h \\ x \vee a = k \end{cases}$$

*ammette soluzione, essa è unica.*

DIMOSTRAZIONE. Siano $x, y \in X$, soluzioni del sistema, allora per la distributività del reticolo si ha

$$\begin{aligned} y &= y \vee (y \wedge a) \\ &= y \vee (x \wedge a) \\ &= (y \vee x) \wedge (y \vee a) \\ &= (x \vee y) \wedge (x \vee a) \\ &= x \vee (y \wedge a) \\ &= x \vee (x \wedge a) \\ &= x \end{aligned}$$

□

DEFINIZIONE 2.4.9. *Un reticolo distributivo $(X, \vee, \wedge, \perp, \top)$ in cui esiste una funzione*

$$\neg : X \to X$$

*che ad ogni elemento $a \in X$ associa $\neg a$ tale che*

$$\begin{cases} \neg a \wedge a = \perp \\ \neg a \vee a = \top \end{cases}$$

*si dice **algebra di Boole** e si indica con $(X, \vee, \wedge, \perp, \top, \neg)$.*

*La funzione $\neg$ si chiama **complementazione** e l'immagine tramite $\neg$ di un elemento $a \in X$, $\neg a$, si chiama il **complementare** di $a$.*

Dalla Proposizione 2.4.8 segue che in un'algebra di Boole vi è una sola possibile complementazione, la quale è univocamente determinata dalla relazione d'ordine, tramite le operazioni $\vee$ e $\wedge$. Pertanto un'algebra di Boole può anche essere indicata con una notazione del tipo $(X, \leq)$.

PROPOSIZIONE 2.4.10. *Se $f \in \mathbf{DLat}(X,Y)$ e $X$ ed $Y$ sono algebre di Boole allora $\forall a \in X$ si ha*

$$\neg(f(a)) = f(\neg a)$$

*ovvero $f$ commuta con la complementazione del reticolo.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $a \in X$. Per ottenere la tesi occorre provare che

$$\begin{cases} f(\neg a) \wedge f(a) = \bot \\ f(\neg a) \vee f(a) = \top \end{cases}$$

infatti:

- $f(\neg a) \wedge f(a) = f(\neg a \wedge a) = f(\bot) = \bot$
- $f(\neg a) \vee f(a) = f(\neg a \vee a) = f(\top) = \top$.

□

Questa proposizione giustifica la seguente affermazione.

La sottocategoria piena di **DLat** avente per oggetti le algebre di Boole la indichiamo con **Bool**.

Ricordando la Proposizione 2.3.13 notiamo che se $X$ e $Y$ sono algebre di Boole ed $f : X \to Y$ è una bigezione, allora

$$f \text{ conserva } \vee \Leftrightarrow f \text{ è isomorfismo in } \mathbf{Bool} \Leftrightarrow f \text{ conserva } \wedge.$$

PROPOSIZIONE 2.4.11. *Se $(X, \vee, \wedge, \bot, \top, \neg)$ è un'algebra di Boole, allora*

(1) *$\neg$ è un'involuzione.*
(2) *$\neg$ inverte l'ordine.*
(3) *$\neg$ verifica le leggi di De Morgan.*

DIMOSTRAZIONE. (1) Dire che $\neg$ è un'involuzione significa che $\forall a \in X$ risulta

$$\neg\neg a = a,$$

infatti si ha che

$$a \wedge \neg a = \bot,\ a \vee \neg a = \top \Rightarrow \neg\neg a = a.$$

(2) Siano, $a, b \in X$, $a \leq b$. Allora $\neg b \wedge \neg a = \neg b$, infatti

$$(\neg b \wedge \neg a) \wedge b = (\neg b \wedge b) \wedge \neg a = \bot \wedge \neg a = \bot$$

e

$$\top = \top \wedge \top = \top \wedge (\neg a \vee a) \leq (\neg b \vee b) \wedge (\neg a \vee b) = (\neg b \wedge \neg a) \vee b,$$

da cui si ottiene $\neg b \leq \neg a$.

(3) Segue da (2) e dalla Proposizione 2.3.15. □

Un'involuzione che inverte l'ordine in un reticolo distributivo non è necessariamente una complementazione, come mostra l'esempio seguente.

ESEMPIO 2.4.12. Sia $([0,1],\leq)$ il reticolo distributivo dell'Esempio 2.4.6 (b). L'applicazione

$$\kappa:[0,1]\to[0,1]$$

che ad ogni $x\in[0,1]$ associa

$$\kappa(x)=1-x$$

è un'involuzione che inverte l'ordine ma non è una complementazione. In effetti $([0,1],\leq)$ non è un'algebra di Boole.

ESEMPIO 2.4.13. Il reticolo delle parti di un insieme non vuoto $X$, $(\mathcal{P}(X),\subseteq)$ dell'Esempio 2.4.6 (a) è un'algebra di Boole, in cui la complementazione è data $\forall A\in\mathcal{P}(X)$ da $\neg A=X\backslash A$, ovvero $\neg A$ è il complementare insiemistico di $A$.

## 2.5. Algebre di Heyting

DEFINIZIONE 2.5.1. *Un reticolo $(X,\leq)$ si dice un'**algebra di Heyting** se per ogni $a,b\in X$ esiste*

$$\max\{x\in X|x\wedge a\leq b\}.$$

OSSERVAZIONE 2.5.2. L'insieme $\{x\in X|x\wedge a\leq b\}$ non è vuoto, infatti $\perp\in\{x\in X|x\wedge a\leq b\}$. Ovviamente, $\perp$ è il minimo dell'insieme, il quale, in genere, non è affatto detto che abbia massimo.

Dalla definizione si evince che nelle algebre di Heyting si può considerare una nuova legge di composizione binaria

$$\to: X\times X\to X,\ (a,b)\mapsto a\to b=max\{x\in X|x\wedge a\leq b\}$$

detta **implicazione**.

Per tale motivo indicheremo in generale un'algebra di Heyting con la notazione $(X,\vee,\wedge,\perp,\top,\to)$.

Considereremo ora alcune proprietà di tipo algebrico che, come poi vedremo, caratterizzano l'operazione "$\to$".

PROPOSIZIONE 2.5.3. *Se $(X,\leq)$ è un reticolo, $\forall a,b,\gamma\in X$ si ha l'equivalenza*

$$\gamma=max\{x\in X|x\wedge a\leq b\}$$
$$\Updownarrow$$
$$\gamma\ verifica\ la\ condizione,\quad \forall x\in X\ :\ x\leq\gamma\ \Leftrightarrow\ x\wedge a\leq b.$$

DIMOSTRAZIONE. Poniamo, per praticità,

$$A=\{x\in X|x\wedge a\leq b\}.$$

"$\Downarrow$" Poiché per ipotesi $\gamma = maxA$, se $x \in X$ allora

$$x \leq \gamma \;\Rightarrow\; x \wedge a \leq \gamma \wedge a \leq b$$

e viceversa

$$x \wedge a \leq b \;\Rightarrow\; x \in A \;\Rightarrow\; x \leq \gamma.$$

"$\Uparrow$" Verifichiamo che $\gamma = maxA$.
$\gamma \leq \gamma \Rightarrow \gamma \wedge a \leq b \Rightarrow \gamma \in A$.
$x \in A \Rightarrow x \wedge a \leq b \Rightarrow x \leq \gamma$.

□

OSSERVAZIONE 2.5.4. In generale si preferisce dare la definizione di algebra di Heyting usando la condizione assunta nella Proposizione 2.5.3.

Infatti usando la notazione su introdotta per l'operazione di implicazione si ha una nuova formulazione della Definizione 2.5.1.

Con tale notazione si dice che

*$(X, \vee, \wedge, \perp, \top, \rightarrow)$ è un'algebra di Heyting se $(X, \vee, \wedge, \perp, \top)$ è un reticolo e l'operazione binaria "$\rightarrow$" verifica la condizione*

$$x \leq a \rightarrow b \;\Leftrightarrow\; x \wedge a \leq b,\ \forall x, a, b \in X.$$

C'è da notare che l'operazione di implicazione in un'algebra di Heyting è univocamente determinata dalla relazione d'ordine, in virtù della Proposizione 2.5.3. Pertanto un'algebra di Heyting può anche essere indicata con la semplice notazione $(X, \leq)$, almeno fin quando non si considerano morfismi fra tali strutture.

Verifichiamo, ora, quattro proprietà che, come vedremo dopo, sono necessarie e sufficienti per caratterizzare l'operazione "$\rightarrow$" di un'algebra di Heyting.

PROPOSIZIONE 2.5.5. *Se $(X, \leq)$ (equivalentemente $(X, \vee, \wedge, \perp, \top, \rightarrow)$) è un'algebra di Heyting allora l'implicazione "$\rightarrow$" verifica le seguenti proprietà:*

(1) $a \rightarrow a = \top$.
(2) $a \wedge (a \rightarrow b) = a \wedge b$.
(3) $b \wedge (a \rightarrow b) = b$.
(4) $a \rightarrow (b \wedge c) = (a \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow c)$.

DIMOSTRAZIONE. (1) $a \rightarrow a = max\{x \in X | x \wedge a \leq a\} = maxX = \top$.

(2) "$\leq$" Ovviamente $a \wedge (a \rightarrow b) \leq a$. Inoltre,

$$a \wedge (a \rightarrow b) \leq a \rightarrow b \;\Rightarrow\; (a \wedge (a \rightarrow b)) \wedge a \leq b \;\Rightarrow\; a \wedge (a \rightarrow b) \leq b.$$

"$\geq$" Ovviamente $a \wedge b \leq a$. Inoltre,

$$(a \wedge b) \wedge a = a \wedge b \leq b \;\Rightarrow\; a \wedge b \leq a \rightarrow b.$$

(3) Da $b \wedge a \leq b$ segue che $b \leq a \rightarrow b$. Quindi $b \wedge (a \rightarrow b) = b$.

(4) Proviamo che $a \rightarrow (b \wedge c)$ è l'inf di $(a \rightarrow b)$ e di $(a \rightarrow c)$.
$a \rightarrow (b \wedge c)$ è un minorante di $\{a \rightarrow b, a \rightarrow c\}$.
Infatti dalla proprietà (2) e dalla Proposizione 2.5.3 segue che

$$a \wedge (a \rightarrow (b \wedge c)) = a \wedge (b \wedge c) \leq b \Rightarrow \ a \rightarrow (b \wedge c) \leq (a \rightarrow b).$$

Analogamente

$$a \rightarrow (b \wedge c) \leq (a \rightarrow c).$$

Se, infine, $y \in X$ è un minorante di $a \rightarrow b$ e $a \rightarrow c$ allora

$$\begin{aligned} y \leq a \rightarrow b \text{ e } y \leq a \rightarrow c \Rightarrow \ & y \wedge a \leq b \ \text{ e } \ y \wedge a \leq c \\ \Rightarrow \ & y \wedge a \leq b \wedge c \\ \Rightarrow \ & y \leq a \rightarrow (b \wedge c). \end{aligned}$$

□

PROPOSIZIONE 2.5.6. *Se* $(X, \vee, \wedge, \perp, \top)$ *è un reticolo con un'operazione*

$$\rightarrow : X \times X \rightarrow X$$

*che verifica le proprietà* (1), (2), (3), (4) *di* 2.5.5 *allora valgono*
(1) $b \leq b' \Rightarrow a \rightarrow b \leq a \rightarrow b'$, $\forall a \in X$
(2) $b \leq a \rightarrow b$.

DIMOSTRAZIONE. (1) Per la proprietà (4) di 2.5.5 si ha che

$$\begin{aligned} b \leq b' \ \Rightarrow \ & (a \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow b') = a \rightarrow (b \wedge b') = a \rightarrow b \\ \Rightarrow \ & a \rightarrow b \leq a \rightarrow b'. \end{aligned}$$

(2) Per la proprietà (3) di 2.5.5 si ha

$$b \wedge (a \rightarrow b) = b \Rightarrow b \leq a \rightarrow b.$$

□

La seguente Proposizione caratterizza le algebre di Heyting.

PROPOSIZIONE 2.5.7. *Un reticolo* $(X, \vee, \wedge, \perp, \top)$ *con un'operazione binaria "$\rightarrow$" è un'algebra di Heyting se e solo se l'operazione "$\rightarrow$" verifica le condizioni* (1), (2), (3), (4) *di* 2.5.5.

DIMOSTRAZIONE. "$\Rightarrow$" Se $(X, \vee, \wedge, \perp, \top, \rightarrow)$ è un'algebra di Heyting, allora la tesi segue da 2.5.5.

"$\Leftarrow$" Siano $a, b \in X$ e sia $x \in X$.
Se $x \leq a \rightarrow b$ allora per (2) si ha

$$(x \wedge a) \wedge b = x \wedge (a \wedge b) = x \wedge a \wedge (a \rightarrow b) = x \wedge a$$

ovvero $x \wedge a \leq b$.

Viceversa, sia $x \in X$, tale che $x \wedge a \leq b$. Per 2.5.6 (1), 2.5.5 (4), (1) e (3) risulta

$$\begin{aligned} x &= x \wedge (a \to x) \\ &= x \wedge ((a \to x) \wedge (a \to a)) \\ &= x \wedge (a \to (x \wedge a)) \\ &\leq x \wedge (a \to b) \\ &\leq a \to b. \end{aligned}$$

□

PROPOSIZIONE 2.5.8. *Ogni algebra di Heyting è un reticolo distributivo.*

DIMOSTRAZIONE. Poiché in ogni reticolo $(X, \leq)$ vale

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq a \wedge (b \vee c), \ \forall a, b, c \in X$$

per ottenere la tesi, per il Teorema 2.4.3, basta verificare che $\forall a, b, c \in X$ vale

$$a \wedge (b \vee c) \leq (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

In effetti per 2.5.6 (1) e (2) e 2.5.5 (1) e (4) si ha

$$\begin{aligned} b \vee c &\leq (a \to b) \vee (a \to c) \\ &= (a \to (a \wedge b)) \vee (a \to (a \wedge c)) \\ &\leq a \to (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \end{aligned}$$

da cui segue che

$$(b \vee c) \wedge a \leq (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

□

COROLLARIO 2.5.9. *Se $(X, \vee, \wedge, \perp, \top, \to)$ è un'algebra di Heyting allora valgono le seguenti proprietà*

(1) $(a \vee a') \to b = (a \to b) \wedge (a' \to b)$.
(2) $a \leq a' \Rightarrow a' \to b \leq a \to b$.

DIMOSTRAZIONE. (1) Siano $a, a', b \in X$. Per 2.5.6 (2) e 2.5.5 (2) si ha

$$((a \vee a') \to b) \wedge a \leq ((a \vee a') \to b) \wedge (a \vee a') = (a \vee a') \wedge b \leq b$$

pertanto

$$(a \vee a') \to b \leq (a \to b).$$

Analogamente si verifica che

$$(a \vee a') \to b \leq (a' \to b).$$

Inoltre, per la Proposizione 2.5.8 si ha che $\forall y \in X$

$$\begin{aligned} y \leq a \to b,\ y \leq a' \to b \Rightarrow\ & y \wedge a \leq b,\ y \wedge a' \leq b \\ \Rightarrow\ & (y \wedge a) \vee (y \wedge a') \leq b \\ \Rightarrow\ & y \wedge (a \vee a') \leq b \\ \Rightarrow\ & y \leq (a \vee a') \to b. \end{aligned}$$

(2) Siano $a, a', b \in X$. Se $a \leq a'$ allora

$$\begin{aligned} a \vee a' = a' \ \Rightarrow\ & a' \to b = (a \vee a') \to b = (a' \to b) \wedge (a \to b) \\ \Rightarrow\ & a' \to b \leq a \to b. \end{aligned}$$

□

PROPOSIZIONE 2.5.10. *Ogni algebra di Boole è un'algebra di Heyting.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $(X, \vee, \wedge, \perp, \top, \neg)$ un'algebra di Boole e $\forall a, b \in X$ sia

$$a \to b = \neg a \vee b.$$

Allora $\forall x \in X$ si ha

$$x \leq (a \to b) = \neg a \vee b \ \Rightarrow\ x \wedge a \leq (\neg a \vee b) \wedge a = b \wedge a \leq b$$

e viceversa se $x \wedge a \leq b$ allora

$$x \leq x \vee \neg a = (x \wedge a) \vee \neg a \leq \neg a \vee b = a \to b.$$

□

OSSERVAZIONE 2.5.11. In un'algebra di Boole, posto $a \to b = \neg a \vee b$ si ha ovviamente $\neg a = a \to \perp$.

In un'algebra di Heyting si può generalizzare l'operazione unaria di complementazione che caratterizza le algebre di Boole.
L'operazione unaria definita in un'algebra di Heyting $(X, \vee, \wedge, \perp, \top, \to)$

$$\neg : X \to X,\ a \longmapsto \neg a = a \to \perp$$

si dice *pseudo-complementazione* o *negazione*.

PROPOSIZIONE 2.5.12. *In un'algebra di Heyting la negazione verifica le seguenti proprietà:*

(1) $a \wedge \neg a = \perp$.
(2) $\neg$ *inverte l'ordine.*
(3) $\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$.
(4) $\neg\perp = \top$ *e* $\neg\top = \perp$.

DIMOSTRAZIONE. (1) $\forall a \in X$ risulta

$$a \wedge \neg a = a \wedge (a \to \bot) = a \wedge \bot = \bot.$$

(2) $\forall a, b \in X$, se $a \leq b$ allora per 2.5.9 *2.* $\neg b = b \to \bot \leq a \to \bot = \neg a$.

(3) $\forall a, b \in X$ si ha per 2.5.9 (1)

$$\neg(a \vee b) = (a \vee b) \to \bot = (a \to \bot) \wedge (b \to \bot) = \neg a \wedge \neg b.$$

(4) Per 2.5.5 *1.*, $\neg\bot = \bot \to \bot = \top$; $\neg\top = \bot$ infatti

$$\begin{aligned} \neg\top \leq \neg\top &\Rightarrow \neg\top \leq \top \to \bot \\ &\Rightarrow (\neg\top) \wedge \top \leq \bot \\ &\to (\neg\top) = \bot. \end{aligned}$$

□

PROPOSIZIONE 2.5.13. *Sia* $(X, \vee, \wedge, \bot, \top, \to)$ *un'algebra di Heyting e sia* $\neg$ *la negazione in essa definita. Allora*

$$(X, \vee, \wedge, \bot, \top, \neg) \text{ è un'algebra di Boole} \Leftrightarrow \neg \text{ è idempotente.}$$

DIMOSTRAZIONE. "$\Rightarrow$" Segue dalla Proposizione 2.4.11.

"$\Leftarrow$" Poiché $X$ è un'algebra di Heyting, da 2.5.8 segue che $X$ è un reticolo distributivo.

Inoltre, per 2.5.12 (1) e (3), poiché $\neg$ è idempotente si ha

$$\top = \neg\bot = \neg(a \wedge \neg a) = \neg(\neg\neg a \wedge \neg a) = \neg\neg(\neg a \vee a) = \neg a \vee a.$$

Da ciò e dalla 2.5.12 (1) segue la tesi. □

Indichiamo con **Heyt** la sottocategoria di **DLat** avente per oggetti le algebre di Heyting e per morfismi le applicazioni che sono compatibili con l'operazione "$\to$".

PROPOSIZIONE 2.5.14. **Bool** *è isomorfa ad una sottocategoria piena di* **Heyt**.

DIMOSTRAZIONE. Le funzioni definite da

$$(X, \vee, \wedge, \bot, \top, \neg) \in |\mathbf{Bool}| \longmapsto (X, \vee, \wedge, \bot, \top, \to) \in |\mathbf{Heyt}|$$

dove $a \to b = \neg a \vee b$, $\forall a, b \in X$ ed

$$f : X \to Y \longmapsto f : X \to Y$$

determinano una immersione piena di **Bool** in **Heyt**.

Tenendo infatti conto della Proposizione 2.5.10 ed osservando che considerate due algebre di Boole $X$ ed $Y$, se una funzione $f : X \to Y$ è un morfismo di **Heyt** e quindi di **Lat**, allora dalla 2.4.10 segue che $f$ è anche un morfismo di **Bool**; viceversa se $f$ è un morfismo di **Bool**, allora $\forall a, b \in X$ risulta $f(a \to b) = f(\neg a \vee b) = \neg f(a) \vee f(b) = f(a) \to f(b)$, cioè $f$ è un morfismo in **Heyt**. □

Notiamo, che, a differenza di **Bool**, **Heyt** non è una sottocategoria piena di **DLat**. Ciò risulterà chiaro nell'Esempio 3.3.12.

CAPITOLO 3

# Completezza e Distributività nei Reticoli

## 3.1. Reticoli Completi

DEFINIZIONE 3.1.1. *Un insieme ordinato* $(X, \leq)$ *con almeno due elementi è un* **reticolo completo** *se* $\forall F \subseteq X$ *esistono* $\bigwedge F \in X$ *e* $\bigvee F \in X$.

ESEMPIO 3.1.2. (a) Il reticolo banale $\mathit{2}$ è un reticolo completo. Più in generale ogni reticolo finito è completo.

(b) $([0,1], \leq)$ è un reticolo completo.

(c) Se $X \neq \emptyset$, $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ è un reticolo completo, infatti per ogni $\mathcal{F}$ famiglia di sottoinsiemi di $X$ esistono

$$\bigvee \mathcal{F} = \bigcup \mathcal{F} \quad e \quad \bigwedge \mathcal{F} = \bigcap \mathcal{F}.$$

(d) Il reticolo dei sottospazi di uno spazio vettoriale è un reticolo completo, infatti comunque presa una famiglia di sottospazi esiste il sup della famiglia dato dal sottospazio somma ovvero dal più piccolo sottospazio che contiene tutti questi sottospazi. L'intersezione insiemistica dei sottospazi è il loro inf.

PROPOSIZIONE 3.1.3. *Se* $(X, \leq)$ *è un insieme ordinato allora sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

($i$) *Ogni* $F \subseteq X$ *ha* sup.
($ii$) *Ogni* $F \subseteq X$ *ha* inf.

DIMOSTRAZIONE. "$(i) \Rightarrow (ii)$" Osserviamo che l'esistenza del $\sup \emptyset$ comporta l'esistenza del minimo $\perp \in X$, così come l'esistenza del $\sup X$ comporta l'esistenza del massimo $\top \in X$.

Sia $H \subseteq X$ e proviamo che esiste $\inf H$. Indichiamo con

$$F = \{x \in X | x \leq h, \text{ per ogni } h \in H\}$$

l'insieme dei minoranti di $H$. Poiché $\perp \in F$, allora $F \neq \emptyset$. Per ipotesi, inoltre, essendo $F \subseteq X$, esiste $\overline{h} = \sup F$. Proviamo che $\overline{h} \in F$. Sia $h \in H$, allora $x \leq h$, $\forall x \in F$, ovvero $h$ è un maggiorante per $F$, quindi $\overline{h} = \sup F \leq h$, da cui segue, per l'arbitrarietà di $h$, che $\overline{h} \in F$. Pertanto,

$\overline{h} = maxF$, ovvero $\overline{h} = \inf H$.

"$(ii) \Rightarrow (i)$" Si ottiene per dualità dalla precedente. $\square$

Dalla proposizione precedente discende che non esistono semireticoli completi che non siano anche reticoli completi.

DEFINIZIONE 3.1.4. *Sia $(X, \leq)$ un reticolo completo e $H \subseteq X$.*
*$H$ si dice* ***sottoreticolo completo*** *di $X$ se per ogni $A \subseteq H$ si ha*

$$\inf_X A \in H, \ \sup_X A \in H.$$

*$H$ si dice* ***sottosemireticolo completo superiormente*** *o anche* $\bigvee$-***completo*** *(rispettivamente* ***completo inferiormente*** *o* $\bigwedge$-***completo****) se per ogni $A \subseteq H$ si ha*

$$\sup_X A \in H \ (\textit{rispettivamente}, \ \inf_X A \in H).$$

E' evidente che ogni sottosemireticolo $\vee$-completo ($\wedge$-completo, rispettivamente) contiene $\perp$ ($\top$, rispettivamente).

ESEMPIO 3.1.5. Sia $X$ un insieme e $\tau$ una topologia su $X$. $(\tau, \subseteq)$ è un reticolo completo, infatti per ogni famiglia di aperti il sup è l'unione usuale fra insiemi e l'inf è l'interno dell'intersezione usuale fra insiemi.

$(\tau, \subseteq)$ è, inoltre, un sottosemireticolo $\bigvee$-completo di $\big(\mathcal{P}(X), \subseteq\big)$ ed è un sottoreticolo; possiamo, sinteticamente, dire che è un sottoreticolo $\bigvee$-completo di $\big(\mathcal{P}(X), \subseteq\big)$. In generale, però, $(\tau, \subseteq)$ non è un sottoreticolo completo.

PROPOSIZIONE 3.1.6. *Sia $(X, \leq)$ un reticolo completo e $\kappa$ una involuzione che inverte l'ordine in $X$.*

*Allora valgono le* ***leggi di De Morgan*** *(infinite), cioè $\forall A \subseteq X$*

$$\kappa\left(\bigvee A\right) = \bigwedge \kappa^{\rightarrow}(A) = \bigwedge \{\kappa(a) | a \in A\}$$

*e*

$$\kappa\left(\bigwedge A\right) = \bigvee \kappa^{\rightarrow}(A) = \bigvee \{\kappa(a) | a \in A\}.$$

DIMOSTRAZIONE. $a \leq \bigvee A$, $\forall a \in A \Rightarrow \kappa\left(\bigvee A\right) \leq \kappa(a)$, $\forall a \in A$.

$m \leq \kappa(a)$, $\forall a \in A \Rightarrow a \leq \kappa(m)$, $\forall a \in A \Rightarrow \bigvee A \leq \kappa(m) \Rightarrow m \leq \kappa\left(\bigvee A\right)$.

Quindi $\kappa\left(\bigvee A\right)$ è il più grande dei minoranti di $\kappa^{\rightarrow}(A)$, ovvero $\kappa\left(\bigvee A\right) = \bigwedge \{\kappa(a) | a \in A\}$.

Analogamente si dimostra l'altra legge di De Morgan.

$\square$

Considerazioni analoghe a quelle fatte per dimostrare la Proposizione 2.3.15, portano ad affermare che la precedente proposizione, considerando anche il caso $A = \emptyset$, esprime il fatto che $\kappa$ è un isomorfismo tra il reticolo completo $(X, \leq)$ e il suo opposto.

Indichiamo con **CLat** la categoria dei reticoli completi (considerati come oggetti) i cui morfismi sono le funzioni che conservano $\bigvee$ e $\bigwedge$ cioè, se $(X,\leq)$ e $(Y,\leq)$ sono reticoli completi, i morfismi di $\mathbf{CLat}\big((X,\leq),(Y,\leq)\big)$ sono le funzioni

$$f : X \to Y$$

tali che, $\forall A \subseteq X$:

$$f\left(\bigvee A\right) = \bigvee f^{\to}(A) \quad \text{e} \quad f\left(\bigwedge A\right) = \bigwedge f^{\to}(A).$$

Indichiamo con **CBool** la categoria i cui oggetti sono le algebre di Boole complete ed i cui morfismi sono le funzioni che conservano $\bigvee$, $\bigwedge$ e commutano con $\neg$.

Indichiamo con **DMrg** la categoria i cui oggetti, detti *algebre di De Morgan*, sono reticoli completi muniti di una involuzione che inverte l'ordine ed i cui morfismi da $(X,\vee,\wedge,\perp,\top,\kappa)$ a $(Y,\vee,\wedge,\perp,\top,\kappa)$ sono funzioni

$$f : X \to Y$$

che conservano $\bigvee$, $\bigwedge$ e tali che

$$f(\kappa(x)) = \kappa(f(x)), \ \forall x \in X.$$

Evidentemente **CBool** è una sottocategoria piena di **CLat** ed è anche una sottocategoria piena di **DMrg**, in virtù della Proposizione 2.4.10. Inoltre, è ovvio che **DMrg** è (isomorfa a) una sottocategoria di **CLat** (tramite il funtore che "dimentica" l'involuzione $\kappa$) che però non è una sottocategoria piena. In effetti un morfismo di reticoli completi fra due algebre di De Morgan non commuta necessariamente con l'involuzione che inverte l'ordine, come mostra il seguente esempio.

ESEMPIO 3.1.7. Posto $I = [0,1]$ e considerata $\kappa : I \to I$ tale che $\kappa(x) = 1 - x$, $\forall x \in I$, si ha evidentemente che $(I,\leq,\kappa)$ è un'algebra di De Morgan.

La funzione $f : I \to I$ definita da

$$f(x)\begin{cases} 2x & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ \frac{1+x}{2} & \text{se } \frac{1}{3} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

è un morfismo (anzi un isomorfismo) di **CLat** ma non commuta con l'involuzione $\kappa$.

OSSERVAZIONE 3.1.8. Se $(X,\leq)$ e $(Y,\leq)$ sono reticoli completi, le condizioni

$$f\left(\bigvee A\right) = \bigvee f^{\to}(A), \ \forall A \subseteq X \ \text{ ed } \ f\left(\bigwedge A\right) = \bigwedge f^{\to}(A), \ \forall A \subseteq X$$

non sono equivalenti.

Si consideri ad esempio l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali ed i reticoli (completi) $(\mathcal{P},\subseteq)$, $(\mathcal{F},\subseteq)$ ed $(\mathcal{I},\subseteq)$ dove

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathbb{N}), \ \mathcal{F} = \big\{\mathbb{N}\big\} \cup \big\{F \subseteq \mathbb{N} \mid |F| < \omega\big\}, \ \mathcal{I} = \big\{A \subseteq \mathbb{N} \mid \mathbb{N} \setminus A \in \mathcal{F}\big\}.$$

L'inclusione $j : \mathcal{F} \to \mathcal{P}$ conserva $\bigwedge$ ma non conserva $\bigvee$, mentre l'inclusione $l : \mathcal{I} \to \mathcal{P}$ conserva $\bigvee$ ma non conserva $\bigwedge$.

Infatti se $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$ allora $\bigwedge_{\mathcal{F}} \mathcal{A} = \bigcap \mathcal{A}$ e se $|\bigcup \mathcal{A}| = \omega$ allora $\bigvee_{\mathcal{F}} \mathcal{A} = \mathbb{N}$.

Si ha allora $\forall \mathcal{A} \subseteq \mathcal{F} : j\,(\bigwedge_{\mathcal{F}} \mathcal{A}) = j\,(\bigcap \mathcal{A}) = \bigcap \mathcal{A} = \bigwedge_{\mathcal{P}} \mathcal{A} = \bigwedge_{\mathcal{P}} j^{\to}(\mathcal{A})$ mentre se $|\bigcup \mathcal{A}| = \omega$ e $\bigcup \mathcal{A} \neq \mathbb{N} : j\,(\bigvee_{\mathcal{F}} \mathcal{A}) = j(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \neq \bigcup \mathcal{A} = \bigvee_{\mathcal{P}} \mathcal{A} = \bigvee_{\mathcal{P}} j^{\to}(\mathcal{A})$.

Analogamente, osserviamo che se $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{I}$ allora $\bigvee_{\mathcal{I}} \mathcal{B} = \bigcup \mathcal{B}$ e se $|X \setminus \bigcap \mathcal{B}| = \omega$ allora $\bigwedge_{\mathcal{I}} \mathcal{B} = \emptyset$.

Di conseguenza $\forall \mathcal{B} \subseteq \mathcal{I} : l\,(\bigvee_{\mathcal{I}} \mathcal{B}) = l\,(\bigcup \mathcal{B}) = \bigcup \mathcal{B} = \bigvee_{\mathcal{P}} \mathcal{B} = \bigvee_{\mathcal{P}} l^{\to}(\mathcal{B})$ mentre se $\bigcap \mathcal{B} \neq \emptyset$ e $|X \setminus \bigcap \mathcal{B}| = \omega$ allora $l\,(\bigwedge_{\mathcal{I}} \mathcal{B}) = l(\emptyset) = \emptyset \neq \bigcap \mathcal{B} = \bigwedge_{\mathcal{P}} \mathcal{B} = \bigwedge_{\mathcal{P}} l^{\to}(\mathcal{B})$.

Per la precedente osservazione e per la Proposizione 3.1.3, risulta opportuno considerare le seguenti categorie.

$\bigvee$-**CSLat** ha come oggetti i reticoli completi e come morfismi le funzioni che conservano $\bigvee$.

$\bigwedge$-**CSLat** ha come oggetti i reticoli completi e come morfismi le funzioni che conservano $\bigwedge$.

## 3.2. Teorema del Funtore Aggiunto

Riprendiamo il concetto di aggiunzione fra funtori considerando in particolare funtori fra categorie ordinate, cioè funzioni isotone fra classi ordinate, già introdotto nell'Esempio 1.8.11.

TEOREMA 3.2.1 (Teorema del Funtore Aggiunto). *Siano* $(X, \leq)$ *e* $(Y, \leq)$ *insiemi ordinati o equivalentemente categorie ordinate piccole.*

(1) *Se* $F : X \to Y$ *e* $G : Y \to X$ *sono funzioni isotone o equivalentemente funtori da* $(X, \leq)$ *in* $(Y, \leq)$ *ed*

$$F \dashv G$$

*allora* $F$ *conserva i* sup *esistenti in* $X$ *e* $G$ *conserva gli* inf *esistenti in* $Y$.

(2) *Se* $(X, \leq)$ *è un reticolo completo ed* $F : X \to Y$ *conserva* sup *arbitrari, quindi in particolare è un funtore, allora la funzione*

$$G : Y \to X$$

*definita* $\forall y \in Y$ *da*

$$G(y) = \bigvee \{x \in X | F(x) \leq y\}$$

*è l'unico funtore aggiunto a destra di* $F$.

(3) *Se* $(Y, \leq)$ *è un reticolo completo e* $G : Y \to X$ *conserva* inf *arbitrari, quindi in particolare è un funtore, allora la funzione*

$$F : X \to Y$$

*definita* $\forall x \in X$ *da*

$$F(x) = \bigwedge \{y \in Y | x \leq G(y)\}$$

*è l'unico funtore aggiunto a sinistra di F.*

Dimostrazione. (1) Sia $S \subseteq X$, per il quale esista $s = \bigvee S$.

Si deve dimostrare che $F(s) = F(\bigvee S) = \bigvee F^{\to}(S) = \bigvee \{F(x)|x \in S\}$, ovvero che $F(s)$ è il più piccolo dei maggioranti per $\{F(x)|x \in S\}$. Infatti: se $x \in S$, allora $x \leq s$; poiché F è isotona, allora $F(x) \leq F(s)$, pertanto $F(s)$ è un maggiorante per $\{F(x)|x \in S\}$. Inoltre, se $\overline{y} \in Y$ è un maggiorante per $\{F(x)|x \in S\}$, allora $F(x) \leq \overline{y}$, $\forall x \in S$ e poiché G è isotona $G(F(x)) \leq G(\overline{y})$, quindi per per (**ADI**) si ha $x \leq G(F(x)) \leq G(\overline{y})$, $\forall x \in S$. Pertanto $G(\overline{y})$ è un maggiorante di S, allora $s = \bigvee S \leq G(\overline{y})$ e dal fatto che $F$ è isotona e da (**ADII**) segue che $F(s) \leq F(G(\overline{y})) \leq \overline{y}$.

Sia ora $T \subseteq Y$, per il quale esista $t = \bigwedge T$. Si deve avere che $G(t) = G(\bigwedge T) = \bigwedge G^{\to}(T) = \bigwedge \{G(y)|y \in T\}$, ovvero che $G(t)$ è il più grande dei minoranti di $\{G(y)|y \in T\}$; infatti: se $y \in T$, allora $t \leq y$ ed essendo $G$ isotona, si ha che $G(t) \leq G(y)$, cioè $G(t)$ è un minorante di $\{G(y)|y \in T\}$. Inoltre, se $\overline{x} \in X$ è un minorante per $\{G(y)|y \in T\}$, allora $\overline{x} \leq G(y), \forall y \in T$ e poiché $F$ è isotona, per (**ADII**) si ha che $F(\overline{x}) \leq F(G(y)) \leq y$, $\forall y \in T$, ovvero $F(\overline{x})$ è un minorante per $T$. Infine essendo $G$ isotona, per la (**ADI**), si ha $\overline{x} \leq G(F(\overline{x})) \leq G(t)$.

(2) La funzione $G$ dell'enunciato è ben definita poiché $(X, \leq)$ è un reticolo completo e quinsi esiste $\bigvee \{x \in X|F(x) \leq y\}$, $\forall y \in Y$. Inoltre è chiaro che $G$ conserva l'ordine, quindi è un funtore. Per verificare che $F \dashv G$, si deve dimostrare che valgono le disuguaglianze di aggiunzione (**ADI**) e (**ADII**). Se $a \in X$, $a \in \{x \in X|F(x) \leq F(a)\}$, pertanto $a \leq \bigvee\{x \in X|F(x) \leq F(a)\} = G(F(a))$. Sia ora $b \in Y$; poiché $F$ conserva sup arbitrari, allora $F(G(b)) = F(\bigvee \{x \in X|F(x) \leq b\} = \bigvee \{F(x)|x \in X : F(x) \leq b\} \leq b$.

Per l'unicità, supposto che esista $G' : Y \to X$ isotona tale che $F \dashv G'$, allora $\forall x \in X$ e $\forall y \in Y$ risultano verificate per $F$ e $G'$ (**ADI**) e (**ADII**), cioè $x \leq G'(F(x))$ ed $F(G'(y)) \leq y$. Ma, poiché $F \dashv G$, allora valgono (**ADI**) e (**ADII**) per $F$ e $G$, pertanto, essendo $G$ e $G'$ funzioni isotone, si ha che, $\forall y \in Y$, $G(y)) \leq G'(F(G(y)) \leq G'(y)$ e $G'(y) \leq G(F(G'(y))) \leq G(y)$. Per doppia disuguaglianza segue che $G = G'$.

(3) La funzione $F$ dell'enunciato è ben definita poiché $(Y, \leq)$ è un reticolo completo, allora esiste $\bigwedge \{y \in Y|x \leq G(y)\}$, $\forall x \in X$; è chiaro che $F$ conserva l'ordine, quindi è un funtore. Per dimostrare che $F \dashv G$, si devono verificare (**ADI**) ed (**ADII**). Sia $a \in X$; poiché $G$ conserva intersezioni arbitrarie, allora $a \leq \bigwedge \{G(y)|y \in Y : a \leq G(y)\} = G(\bigwedge \{y \in Y|a \leq G(y)\}) =$

$G(F(a))$. Se $b \in Y$, allora $b \in \{y \in Y/G(b) \le G(y)\}$, quindi $F(G(b)) = \bigwedge\{y \in Y/G(b) \le G(y)\} \le b$.

L'unicità della $F$ si dimostra analogamente a quella di $G$ in (2). $\square$

OSSERVAZIONE 3.2.2. Dall'unicità nel Teorema del Funtore Aggiunto e dall'Esempio 1.8.12 segue che gli operatori powerset classici associati ad un'applicazione $f : A \to B$ sono esprimibili l'uno in funzione dell'altro nel modo seguente

$$f^{\rightarrow}(X) = \bigwedge\{Y \subseteq B | f^{\leftarrow}(Y) \supseteq X\},\ \forall X \subseteq A$$

ed

$$f^{\leftarrow}(Y) = \bigvee\{X \subseteq A | f^{\rightarrow}(X) \subseteq Y\},\ \forall Y \subseteq B.$$

PROPOSIZIONE 3.2.3. *La categoria opposta della categoria delle algebre di De Morgan,* $\mathbf{DMrg}^{op}$*, è (isomorfa ad) una categoria concreta.*

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo con **DMOp** la categoria avente come oggetti algebre di De Morgan e come morfismi fra gli oggetti $L$ ed $L'$ i morfismi di semireticoli superiori completi aventi aggiunta a destra che commuta con l'involuzione che inverte l'ordine in $L$ ed $L'$. Evidentemente, **DMOp** è una categoria concreta, in quanto ogni oggetto $L$ individua univocamente l'insieme $L$, ogni morfismo $f \in \mathbf{DMOp}(L, L')$ individua univocamente la funzione $f : L \to L'$. Osserviamo, innanzitutto, che se $f \in \mathbf{DMrg}^{op}(L, L')$, ciò equivale a dire che $f^{op} : L' \to L$ è un morfismo di algebre di De Morgan, avente, per il Teorema del Funtore Aggiunto, aggiunta a sinistra $h : L \to L'$ che è un morfismo di semireticoli superiori completi e pertanto, $h \in \mathbf{DMOp}(L, L')$. Inoltre, sempre per il Teorema del Funtore Aggiunto, ogni morfismo $f \in \mathbf{DMOp}(L, L')$ ha aggiunta a destra $f'' : L' \to L$ che è un morfismo di semireticoli inferiori completi, che, commutando per ipotesi con l'involuzione che inverte l'ordine in $L$ ed $L'$ è anche un morfismo di semireticoli superiori completi, ovvero un morfismo di reticoli completi; inoltre, $f''$ poiché commuta con l'involuzione che inverte l'ordine è un morfismo di algebre di De Morgan, quindi determina un morfismo $k \in \mathbf{DMrg}^{op}(L, L')$, tale che $k^{op} = f''$. Pertanto, le corrispondenze che associano ad ogni

$$L \in |\mathbf{DMrg}^{op}| \quad \longmapsto \quad F(L) = L$$

e ad ogni

$$f \in \mathbf{DMrg}^{op}(L, L') \quad \longmapsto \quad F(f) = h$$

con $h$ aggiunto a sinistra di $f^{op}$, definiscono un funtore

$$F : \mathbf{DMrg}^{op} \to \mathbf{DMOp}.$$

Analogamente, le corrispondenze che associano ad ogni

$$L \in |\mathbf{DMOp}| \quad \longmapsto \quad G(L) = L$$

e ad ogni

$$f \in \mathbf{DMOp}(L, L') \quad \longmapsto \quad G(f) = k$$

con $f'' = k^{op}$ aggiunto a destra di $f$, definiscono un funtore

$$G : \mathbf{DMOp} \to \mathbf{DMrg}^{op}.$$

Inoltre, dall'unicità del funtore aggiunto (a sinistra e a destra) segue che

$$F \circ G = 1_{\mathbf{DMOp}} \;\text{ e }\; G \circ F = 1_{\mathbf{DMrg}^{op}}.$$

Allora

$$F : \mathbf{DMrg}^{op} \to \mathbf{DMOp}$$

è un isomorfismo, ovvero $\mathbf{DMrg}^{op}$ e $\mathbf{DMOp}$ sono categorie isomorfe. □

LEMMA 3.2.4. *Siano $Y$, $Z$ due reticoli completi ed $f : Y \to Z$ una funzione.*

*Se $f$ è suriettiva e conserva $\bigvee$ ($\bigwedge$, rispettivamente), allora per l'aggiunta a destra (a sinistra, rispettivamente) di $f$, $g : Z \to Y$, si ha che $\forall b, b' \in Z$*

$$g(b) \leq g(b') \Leftrightarrow b \leq b'.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $g(b) \leq g(b')$ e sia $b = f(a)$. Allora

$$b = f(a) \leq f\big(g(f(a))\big) \leq f\big(g(b)\big) \leq f\big(g(b')\big) \leq b'.$$

Il viceversa vale banalmente essendo $g$ un'applicazione isotona.

La dimostrazione è analoga nella versione alternativa indicata in parentesi. □

PROPOSIZIONE 3.2.5. *Siano $Y$ e $Z$ due reticoli completi e sia $f : Y \to Z$ una funzione che conserva $\bigvee$. Allora, indicata con $g : Z \to Y$ l'aggiunta a destra di $f$, si ha*

(1) *$f$ è iniettiva $\Leftrightarrow g \circ f = i_Y$.*
(2) *$f$ é suriettiva $\Leftrightarrow f \circ g = i_Z$.*
(3) *$f$ è bigettiva $\Leftrightarrow g = f^{-1}$.*

DIMOSTRAZIONE. "$\Leftarrow$" Tale implicazione è evidente in (1), (2) e (3).

"$\Rightarrow$" Per il Teorema del Funtore Aggiunto, $\forall b \in Z$, $\forall a \in Y$, risulta:

$$g(b) = \bigvee \big\{a' \in Y | f(a') \leq b\big\}$$

ed

$$f(a) = \bigwedge \big\{b' \in Z | a \leq g(b')\big\}.$$

(1) Dal Lemma 3.2.4 segue che $\forall a \in Y$, si ha

$$\begin{aligned} g \circ f(a) &= g(f(a)) \\ &= \bigvee \{a' \in Y | f(a') \leq f(a)\} \\ &= \bigvee \{a' \in Y | a' \leq a\} \\ &= a. \end{aligned}$$

Quindi

$$g \circ f(a) = a = i_Y(a), \ \forall a \in Y.$$

(2) Dal Lemma 3.2.4 segue che, $\forall b \in Z$, risulta

$$\begin{aligned} f \circ g(b) &= f(g(b)) \\ &= \bigwedge \{b' \in Z | g(b) \leq g(b')\} \\ &= \bigwedge \{b' \in Z | b \leq b'\} \\ &= b. \end{aligned}$$

Pertanto

$$f \circ g(b) = b = i_Z(b), \ \forall b \in Z.$$

(3) Poiché $f$ è un'applicazione bigettiva, esiste ed è unica l'inversa di $f$, $f^{-1}$ e da (1) e (2) segue che $f^{-1} = g$. □

PROPOSIZIONE 3.2.6. *Siano $Y$ e $Z$ due reticoli completi e sia $g : Z \to Y$ una funzione che conserva $\bigwedge$. Allora, indicata con $f : Y \to Z$ l'aggiunta a sinistra di $g$, si ha*

(1) *$g$ è iniettiva $\Leftrightarrow f \circ g = i_Z$.*
(2) *$g$ è suriettiva $\Leftrightarrow g \circ f = i_Y$.*
(3) *$g$ è bigettiva $\Leftrightarrow f = g^{-1}$.*

DIMOSTRAZIONE. "$\Leftarrow$" Tale implicazione è evidente in (1), (2) e (3).

"$\Rightarrow$" (1) Dal Lemma 3.2.4 segue che $\forall b \in Z$ si ha

$$\begin{aligned} f \circ g(b) &= f(g(b)) \\ &= \bigwedge \{b' \in Z | g(b) \leq g(b')\} \\ &= \bigwedge \{b' \in Z | b \leq b'\} \\ &= b. \end{aligned}$$

Quindi,

$$f \circ g(b) = b = i_Z(b), \ \forall b \in Z.$$

(2) Dal Lemma 3.2.4 segue che $\forall a \in Y$, risulta

$$\begin{aligned} g \circ f(a) &= g(f(a)) \\ &= \bigvee \{a' \in Y | f(a') \leq f(a)\} \\ &= \bigvee \{a' \in Y | a' \leq a\} \\ &= a. \end{aligned}$$

Pertanto

$$g \circ f(a) = a = i_Y(a), \ \forall a \in Y.$$

(3) Poiché $f$ è un'applicazione bigettiva, dall'unicità dell'inversa di $f$ e da (1) e (2) segue la tesi. □

PROPOSIZIONE 3.2.7. *Se $Y$ e $Z$ sono reticoli completi ed $f : Y \to Z$ è un morfismo di reticoli completi bigettivo, allora $f^{-1}$ è un morfismo di reticoli completi, quindi $f$ è un isomorfismo di reticoli completi.*

DIMOSTRAZIONE. Essendo $f$ un morfismo di reticoli completi, $f$ conserva $\bigvee$ e $\bigwedge$. Inoltre, poiché $f$ è bigettiva, per 3.2.5 (3), $f^{-1}$ è l'aggiunta a destra di $f$, quindi conserva $\bigwedge$, e per 3.2.6 (3) $f^{-1}$ è l'aggiunta a sinistra di $f$ e pertanto conserva $\bigvee$, ovvero è un morfismo di reticoli completi. □

PROPOSIZIONE 3.2.8. *Se $(Y, \vee, \wedge, \perp, \top, \kappa)$ e $(Z, \vee, \wedge, \perp, \top, \kappa)$ sono algebre di De Morgan ed*

$$f : Y \to Z$$

*è un morfismo di algebre di De Morgan bigettivo, allora $f^{-1}$ è un morfismo di algebre di De Morgan, quindi $f$ è un isomorfismo di algebre di De Morgan.*

DIMOSTRAZIONE. Poiché per la Proposizione 3.2.7 $f^{-1}$ è un morfismo di reticoli completi, per ottenere la tesi basta verificare che $f^{-1}$ commuta con le involuzioni che invertono l'ordine in $Y$ e $Z$.

Se $a \in Z$, si ha

$$\kappa(a) = f \circ f^{-1}(\kappa(a))$$

e posto $b = f^{-1}(a)$, essendo $f$ un morfismo di algebre di De Morgan, risulta

$$f(b) = f \circ f^{-1}(a) = a = \kappa(f \circ f^{-1}(\kappa(a))) = f(\kappa(f^{-1}(\kappa(a))))$$

quindi, per l'iniettività di $f$

$$b = \kappa(f^{-1}(\kappa(a)))$$

e componendo a destra per $\kappa$

$$\kappa(b) = \kappa(f^{-1}(a)) = f^{-1}(\kappa(a)).$$

□

PROPOSIZIONE 3.2.9.

(1) *Una funzione isotona $f : Y \to Y$ è auto-aggiunta se e solo se è autoinversa.*

(2) *Se* $f : Y \to Z$ *e* $g : Z \to Y$ *sono funzioni isotone e se* $f \dashv g$, *allora* $f \circ g$ *e* $g \circ f$ *sono idempotenti.*

DIMOSTRAZIONE. (1)

$$\begin{aligned} f \dashv f &\Leftrightarrow \forall y \in Y : f(f(y)) \leq y \leq f(f(y)) \\ &\Leftrightarrow f^2 = i_Y. \end{aligned}$$

(2) $\forall y \in Y$

$$\begin{aligned} g \circ f \circ g \circ f(y) &= g(f \circ g(f(y))) \\ &\leq g(f(y)) \\ &= g \circ f(y) \\ &\leq g \circ f(g \circ f(y)) \\ &= g \circ f \circ g \circ f(y). \end{aligned}$$

Analogamente, $\forall z \in Z$

$$\begin{aligned} f \circ g \circ f \circ g(z) &= f \circ g(f \circ g(z)) \\ &\leq f \circ g(z) \\ &= f(g(z)) \\ &\leq f(g \circ f(g(z))) \\ &= f \circ g \circ f \circ g(z). \end{aligned}$$

□

## 3.3. Algebre di Heyting Complete, Frames e Locales

DEFINIZIONE 3.3.1. *Sia* $(X, \leq)$ *un reticolo completo.*

$(X, \leq)$ *verifica la* ***prima legge di distributività infinita****, se soddisfa la condizione*

$$(\mathbf{ILD}\infty) \quad a \wedge \bigvee S = \bigvee \{a \wedge s | s \in S\}, \ \forall a \in X, \ \forall S \subseteq X.$$

$(X, \leq)$ *verifica la* ***seconda legge di distributività infinita****, se soddisfa la condizione*

$$(\mathbf{IILD}\infty) \quad a \vee \bigwedge S = \bigwedge \{a \vee s | s \in S\}, \ \forall a \in X, \ \forall S \subseteq X.$$

*Un reticolo completo che verifica la* ($\mathbf{ILD}\infty$) *(la* ($\mathbf{IILD}\infty$)*, rispettivamente) si dice* ***frame*** *(**coframe**, rispettivamente).*

ESEMPIO 3.3.2. (a) $\forall X \in |\mathbf{Set}|$, $\mathcal{P}(X)$ verifica entrambe le leggi di distributività infinita. Infatti $\forall A \subseteq X$, $\forall \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$:

$$A \cup \left(\bigcap \mathcal{F}\right) = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} (A \cup F)$$

e

$$A \cap \left(\bigcup \mathcal{F}\right) = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} (A \cap F).$$

(b) Se $(X, \tau)$ è uno spazio topologico, come osservato in 3.1.5, $\tau$ è un reticolo completo. Si verifica inoltre che $\tau$ soddisfa (**ILD**$\infty$); infatti, $\forall \mathcal{F} \subseteq \tau$ risulta

$$\bigvee \mathcal{F} = \bigcup \mathcal{F} \quad e \quad \bigwedge \mathcal{F} = Int\left(\bigcap \mathcal{F}\right)$$

quindi in particolare, $\forall P, Q \in \tau$:

$$P \wedge Q = P \cap Q.$$

Allora tenendo conto anche dell'Esempio 3.3.2 (a), si ha, evidentemente, $\forall A \in \tau$

$$A \wedge \left(\bigvee \mathcal{F}\right) = A \cap \left(\bigcup \mathcal{F}\right) = \bigcup \{A \cap F | F \in \mathcal{F}\} = \bigvee \{A \wedge F | F \in \mathcal{F}\}.$$

(c) Analogamente si può vedere che la famiglia dei chiusi di uno spazio topologico verifica la (**IILD**$\infty$).

In generale un frame non è detto che sia un coframe e viceversa, come mostra il seguente esempio.

ESEMPIO 3.3.3. Sia $(\mathbb{N}, \tau)$ lo spazio topologico dato da $\mathbb{N}$ con la topologia cofinita $\tau$. Posto

$$P_t = \mathbb{N} \setminus \{2t\}, \ t \in \mathbb{N}_0 \ \text{ ed } \ A = \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

allora risulta $P_t \in \tau$, $\forall t \in \mathbb{N}_0$ ed $A \in \tau$, ma

$$\left(\bigwedge_{t \in \mathbb{N}_0} P_t\right) \vee A = A$$

mentre

$$\bigwedge_{t \in \mathbb{N}_0} (P_t \vee A) = \mathbb{N}$$

ovvero $\tau$ non verifica (**IILD**$\infty$), quindi non è un coframe, mentre da 3.3.2 (b) segue che $\tau$ è un frame.

Analogamente, prendendo la famiglia dei chiusi di tale topologia si ha un esempio di coframe che non è un frame.

PROPOSIZIONE 3.3.4. *Ogni algebra di Heyting completa verifica la prima legge di distributività infinita* (**ILD**$\infty$).

DIMOSTRAZIONE. Sia $(X, \vee, \wedge, \perp, \top, \rightarrow)$ un'algebra di Heyting completa e sia $a \in X$.

Consideriamo le funzioni

$$f : X \to X, \ x \longmapsto f(x) = a \wedge x$$
$$g : X \to X, \ x \longmapsto g(x) = a \to x.$$

Allora $f$ e $g$ sono funtori e risulta

$$f \dashv g.$$

Infatti: $\forall x \in X$

$$f(g(x)) = f(a \to x) = a \wedge (a \to x) = a \wedge x \leq x$$

e

$$\begin{aligned} x \leq (a \to x) &= (a \to a) \wedge (a \to x) \\ &= a \to (a \wedge x) \\ &= g(a \wedge x) = g(f(x)). \end{aligned}$$

Pertanto, $g$ conserva $\bigwedge$ e $f$ conserva $\bigvee$ e quindi

$$a \wedge \bigvee S = f(\bigvee S) = \bigvee \{f(s)|s \in S\} = \bigvee \{a \wedge s|s \in S\}.$$

$\square$

PROPOSIZIONE 3.3.5. *Un reticolo completo $(X, \leq)$ che verifica la prima legge di distributività infinita* (**ILD**$\infty$) *è un'algebra di Heyting.*

DIMOSTRAZIONE. Sia, $\forall a \in X$,

$$f_a : X \to X$$

definita da

$$x \longmapsto f_a(x) = a \wedge x.$$

Allora $f_a$ conserva $\bigwedge$, quindi per il Teorema del Funtore Aggiunto ha aggiunta a destra $g_a : X \to X$ e risulta

$$f_a\big(g_a(x)\big) \leq x, \quad y \leq g_a\big(f_a(y)\big), \ \forall x, y \in X.$$

Posto

$$a \to b = g_a(b), \ \forall b \in X$$

segue che

$$\begin{aligned} x \leq a \to b \Rightarrow \ & x \leq g_a(b) \\ \Rightarrow \ & f_a(x) \leq f_a(g_a(b)) \leq b \\ \Rightarrow \ & a \wedge x \leq b \end{aligned}$$

e viceversa

$$\begin{aligned} a \wedge x \leq b \Rightarrow \ & f_a(x) \leq b \\ \Rightarrow \ & x \leq g_a(f_a(x)) \leq g_a(b) \\ \Rightarrow \ & x \leq a \to b \end{aligned}$$

ovvero $X$ è un'algebra di Heyting. $\square$

PROPOSIZIONE 3.3.6.

(1) *Se $(X, \leq)$ è un'algebra di De Morgan, allora $(X, \leq)$ è un frame se e solo se $(X, \leq)$ è un coframe.*

(2) *Se* $(X, \leq)$ *è un'algebra di Boole completa, allora* $(X, \leq)$ *è un frame ed un coframe.*

DIMOSTRAZIONE. (1) "$\Rightarrow$" Siano $b \in X$ e $T \subseteq X$, allora dalle ipotesi segue che

$$\begin{aligned} b \vee \left(\bigwedge T\right) &= \kappa\Big(\kappa\Big(b \vee \Big(\bigwedge T\Big)\Big)\Big) \\ &= \kappa\Big(\kappa(b) \wedge \Big(\kappa\Big(\bigwedge T\Big)\Big)\Big) \\ &= \kappa\Big(\kappa(b) \wedge \Big(\bigvee \left(\kappa^{\rightarrow}(T)\right)\Big)\Big) \\ &= \kappa\left(\bigvee \left\{\kappa(b) \wedge \kappa(t) | t \in T\right\}\right) \\ &= \bigwedge \left\{\kappa\big(\kappa(b) \wedge \kappa(t)\big) | t \in T\right\} \\ &= \bigwedge \left\{b \vee t | t \in T\right\} \end{aligned}$$

ovvero che $X$ soddisfa (**IILD**$\infty$), quindi $X$ è un coframe.

"$\Leftarrow$" La tesi si dimostra analogamente.

(2) La tesi segue dalla parte (1) e dalla Proposizione 2.5.10, poiché ogni algebra di Boole completa è un'algebra di De Morgan. □

Indichiamo con **Frm** la categoria concreta avente per oggetti i frames e per morfismi le funzioni che conservano $\wedge$ e $\bigvee$.

Indichiamo con **CoFrm** la categoria concreta avente per oggetti i coframes e per morfismi le funzioni che conservano $\bigwedge$ e $\vee$.

OSSERVAZIONE 3.3.7. Secondo le definizioni date in precedenza è chiaro che se $X$, $Y$ sono due oggetti di $\bigvee$-**CLat** o $\bigwedge$-**CLat** o **Frm** o **CoFrm**, o **CLat** e se $f : X \to Y$ è un morfismo nella corrispondente categoria, $f$ è un isomorfismo in tale categoria se e solo se $f$ è bigettiva ed $f^{-1} : Y \to X$ è un morfismo della stessa categoria.

Evidentemente, con le notazioni del paragrafo 2.3 $\forall X, Y \in |\mathbf{CoFrm}|$ si ha

$$Is\big(\mathbf{CLat}(X, Y)\big) \subseteq Is\big(\mathbf{CoFrm}(X, Y)\big) \subseteq Is\big(\bigwedge\text{-}\mathbf{CLat}(X, Y)\big)$$

e $\forall X, Y \in |\mathbf{Frm}|$

$$Is\big(\mathbf{CLat}(X, Y)\big) \subseteq Is\big(\mathbf{Frm}(X, Y)\big) \subseteq Is\big(\bigvee\text{-}\mathbf{CLat}(X, Y)\big).$$

Possiamo verificare che tali inclusioni sono, in realtà, delle uguaglianze. Infatti, vale il seguente risultato.

PROPOSIZIONE 3.3.8. *Se* $(X, \leq)$ *ed* $(Y, \leq)$ *sono reticoli completi ed* $f : X \to Y$ *è bigettiva, allora sono equivalenti le seguenti condizioni:*

($i$) $f \in \bigvee\text{-}\mathbf{SLat}(X, Y)$.

(*ii*) $f \in \mathbf{CLat}(X, Y)$.
(*iii*) $f \in \bigwedge\text{-}\mathbf{SLat}(X, Y)$.

DIMOSTRAZIONE. "$(i) \Rightarrow (ii)$" Per il Lemma 2.3.11 $f$ conserva e riflette l'ordine. Se allora $S \subseteq X$, verifichiamo che $f\left(\bigvee S\right) = \bigvee f^{\rightarrow}(S)$.

Infatti $f(s) \leq f\left(\bigvee S\right)$, $\forall s \in S$. Se $f(s) \leq a$, $\forall s \in S$, allora $s \leq f^{-1}(a)$, $\forall s \in S$, quindi $\bigvee S \leq f^{-1}(a)$ e pertanto $f\left(\bigvee S\right) \leq a$. Analogamente si verifica che $f$ conserva $\bigwedge$.

L'implicazione "$(iii) \Rightarrow (ii)$" è analoga.

"$(ii) \Rightarrow (i)$" e "$(ii) \Rightarrow (iii)$" sono ovvie. □

COROLLARIO 3.3.9. *Se $X, Y$ sono oggetti delle categorie considerate come richiesto nei vari casi, allora*

$$Is\big(\mathbf{CoFrm}(X, Y)\big) = Is\big(\mathbf{CLat}(X, Y)\big) = Is\big(\mathbf{Frm}(X, Y)\big)$$

$$Is\big(\bigwedge\text{-}\mathbf{CLat}(X, Y)\big) = Is\big(\mathbf{CLat}(X, Y)\big) = Is\big(\bigvee\text{-}\mathbf{CLat}(X, Y)\big).$$

DIMOSTRAZIONE. La precedente proposizione permette chiaramente di verificare che $Is\big(\mathbf{CLat}(X, Y)\big)$ contiene ciascuno degli altri insiemi elencati. □

ESEMPIO 3.3.10. Sia $f \in \mathbf{Top}((X, \tau), (X', \tau'))$. Dall'Esempio 3.3.2 (b) segue che $\tau, \tau' \in |\mathbf{Frm}|$ e risulta che l'operatore powerset inverso classico associato ad $f$ ristretto a $\tau'$ e ridotto a $\tau$, ovvero $f^{\leftarrow} : \tau' \to \tau$ è un morfismo da $\tau'$ in $\tau$ in $\mathbf{Frm}$; infatti se $\mathcal{A} \subseteq \tau'$ e $B, C \in \tau'$ allora risulta

$$f^{\leftarrow}\left(\bigvee \mathcal{A}\right) = f^{\leftarrow}\left(\bigcup \mathcal{A}\right) = \bigcup \{f^{\leftarrow}(A) | A \in \mathcal{A}\} = \bigvee (f^{\leftarrow})^{\rightarrow}(\mathcal{A})$$

e

$$f^{\leftarrow}(B \wedge C) = f^{\leftarrow}(B \cap C) = f^{\leftarrow}(B) \cap f^{\leftarrow}(C) = f^{\leftarrow}(B) \wedge f^{\leftarrow}(C).$$

OSSERVAZIONE 3.3.11. Dall'Esempio 3.3.10 segue che le corrispondenze

$$(X, \tau) \in |\mathbf{Top}| \quad \longmapsto \quad \leftarrow (X, \tau) = \tau$$

ed

$$f \in \mathbf{Top}\big((X, \tau), (T, \delta)\big) \quad \longmapsto \quad \leftarrow (f) = f^{\leftarrow} : \delta \to \tau$$

definiscono un funtore controvariante

$$\leftarrow : \mathbf{Top} \to \mathbf{Frm}.$$

Osserviamo che ogni frame è un'algebra di Heyting ed è un reticolo completo; tuttavia $\mathbf{Frm}$ non è sottocategoria né di $\mathbf{Heyt}$ né di $\mathbf{CLat}$, come mostrano i seguenti esempi.

ESEMPIO 3.3.12. Siano $(\mathbb{R}, \delta)$ ed $(\mathbb{R}, \tau)$ spazi topologici su $\mathbb{R}$, con $\delta$ la topologia discreta e $\tau$ la topologia naturale. Allora $\mathcal{A} = \big\{(-\epsilon, \epsilon) | \epsilon \in \mathbb{R}_{+}\big\} \subseteq$

$\tau$ e $i_{\mathbb{R}} \in \mathbf{Top}\big((\mathbb{R},\delta),(\mathbb{R},\tau)\big)$. Per l'Esempio 3.3.10 allora $i^{\leftarrow} \in \mathbf{Frm}(\tau,\delta)$. Ora

$$i^{\leftarrow}\left(\bigwedge_{\tau}\mathcal{A}\right) = \emptyset \neq \{0\} = \bigwedge_{\delta}\{i^{\leftarrow}(A)|A \in \mathcal{A}\}$$

ovvero $i^{\leftarrow}$ non è un morfismo di reticoli completi da $\tau$ in $\delta$.

Dalla Proposizione 2.5.3 si deduce che per una arbitraria topologia $\sigma$ su $S$ pensata come frame, si ha

$$A \to_{\sigma} B = \bigcup\{X \in \sigma | A \cap X \subseteq B\},$$

quindi, in particolare,

$$A \to_{\delta} B = (S \setminus A)\bigcup B.$$

Ora presi $A = (-\infty, 0)$ e $B = (0, +\infty)$ risulta

$$A \to_{\tau} B = B \quad e \quad A \to_{\delta} B = [0, +\infty)$$

e risulta

$$i^{\leftarrow}(A \to_{\tau} B) = B \neq [0, +\infty) = i^{\leftarrow}(A) \to_{\delta} i^{\leftarrow}(B)$$

ovvero $i^{\leftarrow}$ non è un morfismo di algebre di Heyting da $\tau$ in $\delta$.

OSSERVAZIONE 3.3.13. Se $f \in \mathbf{Top}\big((X,\tau),(X',\tau')\big)$ è un omeomorfismo, allora $f^{\leftarrow}$ è un morfismo di reticoli completi e di algebre di Heyting, oltre che di frame.

Indichiamo con **Loc** la categoria opposta di **Frm**. Quando un'algebra di Heyting completa si pensa come oggetto della categoria **Loc** essa si dice anche **locale**. Da ciò segue che i termini locale, frame o algebra di Heyting completa denotano lo stesso tipo di struttura.

OSSERVAZIONE 3.3.14. Le corrispondenze

$$(X,\tau) \in |\mathbf{Top}| \quad \longmapsto \quad \tau(X,\tau) = \tau$$

ed

$$f \in \mathbf{Top}\big((X,\tau),(T,\delta)\big) \quad \longmapsto \quad \tau(f)$$

tale che

$$\big(\tau(f)\big)^{op} = f^{\leftarrow} : \delta \to \tau$$

definiscono un funtore

$$\tau : \mathbf{Top} \ \to \ \mathbf{Loc}.$$

### 3.4. Reticoli Completamente Distributivi

DEFINIZIONE 3.4.1. *Un reticolo $(L, \leq)$ completo si dice* ***completamente distributivo*** *se sono verificate le seguenti condizioni* $\forall (J_i)_{i\in I}$*, con* $I, J_i \in |\mathbf{Set}|$*,* $\forall i \in I$*,*

$$(\mathbf{CDI}) \quad \bigwedge_{i\in I} \bigvee_{j\in J_i} a_{ij} = \bigvee_{f\in \prod J_i} \bigwedge_{i\in I} a_{if(i)}$$

$$(\mathbf{CDII}) \quad \bigvee_{i\in I} \bigwedge_{j\in J_i} a_{ij} = \bigwedge_{f\in \prod J_i} \bigvee_{i\in I} a_{if(i)}$$

*dove per ogni* $i \in I$ *e per ogni* $j \in J_i$, $a_{ij} \in L$ *ed* $f \in \prod J_i$ *significa che* $f : I \to \bigcup_{i\in I} J_i$ *tale che per ogni* $i \in I$, $f(i) \in J_i$.

LEMMA 3.4.2. *Se $(L, \leq)$ è un reticolo completo, allora sono equivalenti le seguenti proprietà*

(*i*) $(L, \leq)$ *verifica* $(\mathbf{CDI})$.
(*ii*) $(L, \leq)$ *verifica la seguente condizione,* $\forall I, J \in |\mathbf{Set}|$,

$$(\mathbf{CDI'}) \quad \bigwedge_{i\in I} \bigvee_{j\in J} x_{ij} = \bigvee_{f\in J^I} \bigwedge_{i\in I} x_{if(i)}$$

*dove* $x_{ij} \in L$, $\forall i \in I$ *e* $j \in J$.

DIMOSTRAZIONE. "(*ii*) $\Rightarrow$ (*i*)" $\forall (J_i)_{i\in I}$ e $\forall (x_{ij})_{i\in I, j\in J_i}$, con $x_{ij} \in L$, $\forall i \in I$ e $\forall j \in J_i$, poniamo $J = \bigcup_{i\in I} J_i$ e $x_{ij} = \perp$ se $j \in J \setminus J_i$.
Allora risulta

$$\bigwedge_{i\in I} \bigvee_{j\in J_i} x_{ij} = \bigwedge_{i\in I} \bigvee_{j\in J} x_{ij}.$$

Inoltre, se $f \in J^I \setminus \prod_{i\in I} J_i$ allora esiste $\bar{i} \in I$ per cui $f(\bar{i}) \notin J_i$ e quindi $x_{\bar{i}f(\bar{i})} = \perp$ allora si ha $\bigwedge_{i\in I} x_{if(i)} = \perp$. Petanto, facendo il sup al variare di $f \in J^I$, gli unici contributi non nulli sono forniti dalle funzioni $f \in \prod_{i\in I} J_i$, quindi

$$\bigvee_{f\in J^I} \bigwedge_{i\in I} x_{if(i)} = \bigvee_{f\in \prod_{i\in I} J_i} \bigwedge_{i\in I} x_{if(i)}.$$

Quindi per la $(\mathbf{CDI'})$ risulta

$$\begin{aligned}\bigwedge_{i\in I} \bigvee_{j\in J_i} x_{ij} &= \bigwedge_{i\in I} \bigvee_{j\in J} x_{ij} \\ &= \bigvee_{f\in J^I} \bigwedge_{i\in I} x_{if(i)} \\ &= \bigvee_{f\in \prod_{i\in I} J_i} \bigwedge_{i\in I} x_{if(i)}.\end{aligned}$$

"(*i*) $\Rightarrow$ (*ii*)" E' ovvio perchè la condizione $(\mathbf{CDI'})$ si ottiene dalla $(\mathbf{CDI})$ come caso particolare, quando $J_i = J$, $\forall i \in I$. □

LEMMA 3.4.3. *Se $(L, \leq)$ è un reticolo completo, allora sono equivalenti le seguenti proprietà*

(*i*) *$(L, \leq)$ verifica* (**CDII**).

(*ii*) *$(L, \leq)$ verifica la seguente condizione, $\forall I, J \in |\mathbf{Set}|$,*

$$(\mathbf{CDII'}) \qquad \bigvee_{i \in I} \bigwedge_{j \in J} x_{ij} = \bigwedge_{f \in J^I} \bigvee_{i \in I} x_{if(i)}$$

*dove $x_{ij} \in L$, $\forall i \in I$ e $j \in J$.*

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione si ottiene dualizzando quella del Lemma 3.4.2. □

PROPOSIZIONE 3.4.4. *Se $(L, \leq)$ è un reticolo completo, allora sono equivalenti le seguenti proprietà*

(*i*) *$(L, \leq)$ verifica* (**CDI**).

(*ii*) *$(L, \leq)$ verifica* (**CDII**).

DIMOSTRAZIONE. "$(i) \Rightarrow (ii)$" Per i lemmi 3.4.2 e 3.4.3 è sufficiente dimostrare che "$(\mathbf{CDI'}) \Rightarrow (\mathbf{CDII'})$.

Sia quindi $(x_{ij})_{i \in I, j \in J}$ una qualsiasi famiglia di elementi di $L$. Osserviamo intanto che $\bigvee_{i \in I} \bigwedge_{j \in J} x_{ij} \leq \bigwedge_{f \in J^I} \bigvee_{i \in I} x_{if(i)}$. Infatti, $\bigwedge_{j \in J} x_{ij} \leq x_{if(i)}$, $\forall i \in I$, $\forall f \in J^I$, quindi $\bigvee_{i \in I} \bigwedge_{j \in J} x_{ij} \leq \bigvee_{i \in I} x_{if(i)}$, $\forall f \in J^I$.

Viceversa, $\forall i \in I$ ed $f \in J^I$ poniamo $y_{fi} = x_{if(i)}$, allora poiché per ipotesi $L$ verifica $(\mathbf{CDI'})$ si ha

$$\bigwedge_{f \in J^I} \bigvee_{i \in I} x_{if(i)} = \bigwedge_{f \in J^I} \bigvee_{i \in I} y_{fi} = \bigvee_{\psi \in I^{J^I}} \bigwedge_{f \in J^I} y_{f\psi(f)}.$$

Inoltre per ogni $\psi \in I^{J^I}$ esite $i \in I$ tale che $(x_{ij})_{j \in J}$ sia una sottofamiglia della famiglia $(y_{f\psi(f)})_{f \in J^I}$: infatti, $\forall i_0 \in I$, $j_0 \in J$, considerata una funzione $f_0 : I \to J$ tale che $f_0(i_0) = j_0$ e una funzione $\psi_0 : J^I \to I$ tale che $\psi_0(f_0) = i_0$ si ha

$$x_{i_0 j_0} = x_{i_0 f_0(i_0)} = y_{f_0 i_0} = y_{f_0 \psi_0(f_0)}.$$

Pertanto si ha che per ogni $\psi \in I^{J^I}$ esiste $i \in I$ tale che si abbia $\bigwedge_{f \in J^I} y_{f\psi(f)} \leq \bigwedge_{j \in J} x_{ij}$. In definitiva si ottiene la disugualgianza

$$\bigvee_{\psi \in I^{J^I}} \bigwedge_{f \in J^I} y_{f\psi(f)} \leq \bigvee_{i \in I} \bigwedge_{j \in J} x_{ij}$$

che prova la tesi.

"$(ii) \Rightarrow (i)$" Si dimostra per dualità. □

ESEMPIO 3.4.5. (a) $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ è un reticolo completo e completamente distributivo.

(b) $([0, 1], \leq)$ è un reticolo completo completamente distributivo.

(c) Su una circonferenza considerati due punti $o$ ed $m$, si orientino da $o$ ad $m$ le semicirconferenze che insistono sul diametro $om$, indicate rispettivamente con $K$ ed $H$; sia inoltre $mp$ un segmento orientato da $m$ verso $p$ giacente sul prolungamento del diametro $om$ dalla parte di $m$, denotato con $N$. Sia $L = H \cup K \cup N$. Su $L$ si definisca la relazione d'ordine:

$$a \leq b \;\Leftrightarrow\; a \textit{ precede } b \textit{ in } K, H \textit{ o } N, \textit{ oppure } a \in K \cup H \textit{ e } b \in N.$$

Se $a$, $b$ sono due elementi non confrontabili allora si ha

$$a \vee b = m \;\; e \;\; a \wedge b = o.$$

La coppia $(L, \leq)$ è un reticolo, con minimo $o$ e massimo $p$. Si vede facilmente che $L$ è un reticolo completo, in quanto ogni sottoinsieme di $L$ ha sup e inf, ma $L$ non è un reticolo distributivo, in quanto, se prendiamo $a, b \in K$, con $a \leq b$, $a \neq b$, non confrontabili con $c \in H$, si ha

$$a \vee (b \wedge c) = a \vee o = a$$

mentre

$$(a \vee b) \wedge (a \vee c) = b \wedge m = b$$

e quindi $(L, \leq)$ non è un reticolo completamente distributivo.

(d) Dall'Esempio 3.3.3 segue che se $\tau$ è la topologia cofinita su $\mathbb{N}$, poiché essa non verifica la (**IILD**$\infty$), allora essa non può soddisfare neanche la completa distributività.

DEFINIZIONE 3.4.6. *Se* $(L, \leq)$ *è un reticolo ed* $x, y \in L$ *allora si dice che* $y$ ***copre*** $x$ *se* $x \leq y$, $x \neq y$ *e non esiste* $z \in L$ *tale che* $x \leq z \leq y$, *con* $x \neq z \neq y$.

PROPOSIZIONE 3.4.7. *Ogni catena completa è completamente distributiva.*

DIMOSTRAZIONE. Se $(L, \leq)$ è una catena completa, per il Lemma 3.4.2 basta che verifichiamo la condizione (**CDI**$'$).

Sia $(x_{ij})_{i \in I, j \in J}$ una famiglia di elementi di $L$ e sia $\bigwedge_{i \in I} \bigvee_{j \in J} x_{ij} = y$, allora resta da provare che $y = \bigvee_{f \in J^I} \bigwedge_{i \in I} x_{if(i)}$.

$y$ è un maggiorante per $\left\{\bigwedge_{i \in I} x_{if(i)} | f \in J^I\right\}$ in quanto, per come è stato definito $y$ risulta $\bigwedge_{i \in I} x_{if(i)} \leq \bigwedge_{i \in I} \bigvee_{j \in J} x_{ij} = y$, $\forall f \in J^I$.

Consideriamo, ora, un altro maggiorante, $u$, cioè sia $\bigwedge_{i \in I} x_{if(i)} \leq u$, $\forall f \in J^I$.

Se fosse $u \leq y$, $u \neq y$, allora sarebbe $u \leq \bigvee_{j \in J} x_{ij}$ e $u \neq \bigvee_{j \in J} x_{ij}$, $\forall i \in I$, quindi, $\forall i \in I$ esisterebbe un elemento $x_{ij_i}$, con $j_i \in J$, tale che $u \leq x_{ij_i}$, $u \neq x_{ij_i}$. Associando ad ogni $i \in I$ un tale indice, $j_i$, si otterrebbe una funzione

$$f_u : I \to J, \quad i \longmapsto f_u(i) = j_i$$

tale che $u \leq x_{if_u(i)}$, $u \neq x_{if_u(i)}$, $\forall i \in I$. Si avrebbe allora

$$u \leq \bigwedge_{i \in I} x_{if_u(i)} \leq u,$$

cioè $u = \bigwedge_{i \in I} x_{if_u(i)}$.

Inoltre si verificherebbe che $y$ copre $u$. Infatti considerato un elemento $u' \in L$ tale che $u \leq u' \leq y$ con $u' \neq y$, allora per i medesimi argomenti usati per $u$ esisterebbe $f_{u'} \in J^I$ tale che $u' = \bigwedge_{i \in I} x_{if_{u'}(i)}$.

Inoltre, poiché $\bigwedge_{i \in I} x_{if(i)} \leq u$, $\forall f \in J^I$, seguirebbe che $u' \leq u$, ovvero $u' = u$. Ora da $u \leq x_{if_u(i)}$, $u \neq x_{if_u(i)}$, $\forall i \in I$, poiché $y$ copre $u$ si avrebbe $y \leq x_{if_u(i)}$, $\forall i \in I$.

In definitiva si otterrebbe $y \leq \bigwedge_{i \in I} x_{if_u(i)} = u \leq y$ e questo è assurdo avendo supposto $u \neq y$.

□

Indichiamo con **CDLat** la sottocategoria piena di **CLat** i cui oggetti sono i reticoli completi e completamente distributivi.

PROPOSIZIONE 3.4.8. *Se $(L, \leq)$ è un reticolo completamente distributivo, allora ogni sottoreticolo completo di $(L, \leq)$ è completamente distributivo.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $(S, \leq)$ un sottoreticolo completo di $L$; poiché per ogni $F \subseteq S$ esiste $\sup_S F = \sup_L F \in S$ ed esiste $\inf_S F = \inf_L F \in S$, segue che $(S, \leq)$ è completamente distributivo. □

Data una famiglia di insiemi ordinati $(L_i, \leq)_{i \in I}$ e considerato il prodotto

$$\prod_{i \in I} L_i = \left\{ s : I \to \bigcup L_i | s(i) \in L_i \right\},$$

si può definire una relazione d'ordine su $\prod_{i \in I} L_i$ ponendo, $\forall s, t \in \prod_i L_i$

$$s \leq t \iff s(i) \leq t(i), \ \forall i \in I.$$

L'eventuale esistenza di strutture reticolari di un qualche tipo su ciascun $L_i$ comporta che la relazione d'ordine su definita induca un'analoga struttura di reticolo sul prodotto. In particolare formuliamo esplicitamente il seguente risultato

PROPOSIZIONE 3.4.9. *Se ogni $L_i$ è un reticolo completo e completamente distributivo, allora anche il prodotto $\left( \prod_{i \in I} L_i, \leq \right)$ è un reticolo completo completamente distributivo.*

DIMOSTRAZIONE. $\forall S \subseteq \prod_{i \in I} L_i$ si ha

$$\left( \bigvee S \right)(i) = \bigvee \{s(i) | s \in S\} \text{ e } \left( \bigwedge S \right)(i) = \bigwedge \{s(i) | s \in S\}, \ \forall i \in I.$$

Se poi $\mathcal{S} = ((s_{\alpha\beta})_{\beta\in B_\alpha})_{\alpha\in A}$ è una famiglia di famiglie di elementi del prodotto, allora dalla completa distributività in ogni $L_i$ segue che $\forall i \in I$

$$\begin{aligned}\left(\bigvee_{\alpha\in A}\bigwedge_{\beta\in B_\alpha} s_{\alpha\beta}\right)(i) &= \bigvee_{\alpha\in A}\bigwedge_{\beta\in B_\alpha} s_{\alpha\beta}(i)\\ &= \bigwedge_{\omega\in\prod_{\alpha\in A} B_\alpha}\bigvee_{\alpha\in A} s_{\alpha\omega(\alpha)}(i)\\ &= \left(\bigwedge_{\omega\in\prod_{\alpha\in A} B_\alpha}\bigvee_{\alpha\in A} s_{\alpha\omega(\alpha)}\right)(i).\end{aligned}$$

$\square$

CAPITOLO 4

# Topologia Senza Punti

### 4.1. Caratterizzazione dei Powerset

DEFINIZIONE 4.1.1. *Siano* $(X, \leq)$ *un reticolo ed* $a \in X$.
$a$ *si dice un* ***atomo*** *(di* $(X, \leq)$*) se* $a \neq \perp$ *e se* $\forall x \in X$

$$\perp \neq x \leq a \;\Rightarrow\; x = a.$$

$a$ *si dice un* ***antiatomo*** *(di* $(X, \leq)$*) se* $a \neq \top$ *e se* $\forall x \in X$

$$a \leq x \neq \top \;\Rightarrow\; x = a.$$

DEFINIZIONE 4.1.2. *Un reticolo* $(X, \leq)$ *si dice* ***atomico*** *se* $\forall x \in X$, $x \neq \perp$, *esiste* $a \in X$, $a$ *atomo tale che* $a \leq x$.

DEFINIZIONE 4.1.3. *Siano* $(X, \leq)$ *un reticolo e* $k \in X$.
$k$ *si dice* $\vee$***-irriducibile*** *(o* ***coprimo*** *o* ***molecola****) (in* $(X, \leq)$*) se* $k \neq \perp$ *e*

$$k \leq x \vee y, \text{ con } x, y \in X \text{ e } k \nleq x \;\Rightarrow\; k \leq y.$$

$k$ *si dice* ***completamente*** $\vee$***-irriducibile*** *(o* ***completamente coprimo****) (in* $(X, \leq)$*) se* $\forall K \subseteq \mathcal{P}(X)$ *tale che* $k \leq \bigvee K$ *esiste* $y \in K$ *per cui risulta* $k \leq y$.
$h$ *si dice* $\wedge$***-irriducibile*** *(o* ***primo****) (in* $(X, \leq)$*) se* $h \neq \top$ *e*

$$x \wedge y \leq h, \text{ con } x, y \in X \text{ e } x \nleq h \Rightarrow y \leq h.$$

$h$ *si dice* ***completamente*** $\wedge$***-irriducibile*** *(o* ***completamente primo****) (in* $(X, \leq)$*) se* $\forall H \subseteq \mathcal{P}(X)$ *tale che* $\bigwedge H \leq h$ *esiste* $y \in H$ *per cui risulta* $y \leq h$.

Ovviamente ogni elemento completamente coprimo (completamente primo, rispettivamente) è coprimo (primo, rispettivamente).

Inoltre la nozione di antiatomicità e quella di $\bigwedge$-irriducibilità di un elemento sono duali di quelle di atomicità e di $\bigvee$-irriducibilità di un elemento.

In particolare si ha quindi che un antiisomorfismo tra reticoli, eventualmente completi, cioè una bigezione che sia un isomorfismo dal primo reticolo all'opposto del secondo (ad esempio un'involuzione che inverte l'ordine in

$X$ è un antiisomorfismo da $X$ in se stesso), trasforma atomi in antiatomi, elementi $\bigvee$-irriducibili in elementi $\bigwedge$-irriducibili e viceversa.

PROPOSIZIONE 4.1.4. *Sia* $(X, \leq)$ *un reticolo distributivo e sia* $k \in X$. *Allora*

(1) $k$ *coprimo* $\Leftrightarrow k \neq \perp$ *e* $(k = x \vee y,$ *con* $x, y \in X$ *e* $k \neq x \Rightarrow k = y)$.
(2) $k$ *primo* $\Leftrightarrow k \neq \top$ *e* $(k = x \wedge y,$ *con* $x, y \in X$ *e* $k \neq x \Rightarrow k = y)$.

DIMOSTRAZIONE. (1) "$\Rightarrow$" Se $k$ è elemento coprimo, allora $k \neq \perp$.
Sia $k = x \vee y$, con $x, y \in X$ e $k \neq x$; allora $x \leq k$ e $y \leq k$. Poiché è $k \nleq x$ segue che $k \leq y$ e quindi $y = k$.

"$\Leftarrow$" Sia $k \neq \perp$ tale che $k \leq x \vee y$, con $x, y \in X$ e $k \nleq x$. Poiché, per ipotesi, il reticolo $X$ è distributivo si ha

$$k = k \wedge (x \vee y) = (k \wedge x) \vee (k \wedge y).$$

Da $k \nleq x$ segue che $k \wedge x \neq k$, quindi per l'ipotesi, si ha che $k = k \wedge y$, ovvero che $k \leq y$.

(2) La dimostrazione si ottiene dualizzando quella del punto (1). □

PROPOSIZIONE 4.1.5. *Sia* $(X, \leq)$ *un frame (coframe, rispettivamente). Allora,* $\forall k \in X$, *si ha*

$$k \text{ completamente coprimo (completamente primo, rispettivamente)}$$
$$\Updownarrow$$
$$k \neq \perp \ (k \neq \top, \text{ rispettivamente})$$
$$e$$
$$k = \bigvee A \ (k = \bigwedge A, \text{ rispettivamente}), \text{ con } A \subseteq X \Rightarrow \exists x \in A : k = x.$$

DIMOSTRAZIONE. "$\Downarrow$" Sia $k \in X$, $k$ completamente coprimo. Allora $k \neq \perp$ e $k = \bigvee A$, con $A \subseteq X$, $\Rightarrow a \leq k$, $\forall a \in A$, ed $\exists x \in A$ tale che $k \leq x$ $\Rightarrow \exists x \in A$ tale che $k = x$.

"$\Uparrow$" Sia $k \leq \bigvee H$, con $H \subseteq X$. Allora

$$k = k \wedge \left(\bigvee H\right) = \bigvee \{k \wedge h | h \in H\}.$$

Per l'ipotesi, esiste $y \in H$ tale che $k = k \wedge y$ e quindi $k \leq y$. Ciò prova che $k$ è completamente coprimo.

La dimostrazione si completa per dualità. □

Il seguente esempio mostra che senza le ipotesi di ditributività le condizioni poste nelle due precedenti proposizioni, sempre necessarie, non risultano essere sufficienti, quindi non caratterizzano i concetti introdotti nella definizione 4.1.3.

ESEMPIO 4.1.6. Sia $(\mathcal{S}, \leq)$ il reticolo (completo ma non distributivo) dei sottospazi di uno spazio vettoriale di dimensione 2. Chiaramente ogni retta vettoriale $K$ verifica le condizioni poste nelle proposizioni 4.1.4 e 4.1.5, ma non è un elemento coprimo. Siano, infatti, $X$ e $Y$ altre due rette vettoriali distinte tra loro e da $K$. Chiaramente, $K \leq X \vee Y$, ma $K \nleq X$ e $K \nleq Y$.

PROPOSIZIONE 4.1.7. *Se $(X, \leq)$ è un reticolo distributivo e $a \in X$ allora*

$$a \text{ atomo } (\text{antiatomo, rispettivamente}) \Rightarrow a \text{ coprimo } (\text{primo, rispettivamente}).$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $a \in X$, $a$ atomo. Per ipotesi si ha $a \neq \bot$; se $a = x \vee y$, con $x, y \in X$ e $a \neq x$, poiché $a$ è un atomo risulta $x = \bot$ e quindi $y = x \vee y = a$.

La dimostrazione si completa per dualità. □

PROPOSIZIONE 4.1.8. *In un frame ogni atomo è completamente coprimo. In un coframe ogni antiatomo è completamente primo.*

DIMOSTRAZIONE. E' analoga a quella della proposizione precedente utilizzando la Proposizione 4.1.5. □

ESEMPIO 4.1.9. (a) Se $S \in |\mathbf{Set}|$, $\forall x \in S$, $\{x\}$ è un atomo di $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$, infatti $\{x\} \neq \emptyset$ e $\forall A \in \mathcal{P}(S)$, $A \neq \emptyset$,

$$A \subseteq \{x\} \;\Rightarrow\; A = \{x\}.$$

Inoltre, $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ è un reticolo atomico, in quanto $\forall A \in \mathcal{P}(S)$, $A \neq \emptyset$, esiste almeno un $x \in A$ per cui $\{x\}$ è un atomo di $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ e $\{x\} \subseteq A$.

(b) Se $(X, \leq)$ è un reticolo totalmente ordinato, ogni $x \in X$, $x \neq \top$, è primo ed ogni $x \in X$, $x \neq \bot$, è coprimo. Se $(X, \leq)$ ha un atomo $a$, allora esso è unico, in quanto se esiste $a' \in X$, $a'$ atomo, allora per la totalità dell'ordinamento risulta $a \leq a'$ o $a' \leq a$, da cui in ogni caso segue che $a' = a$.

(c) Il reticolo $([0, 1], \leq)$ non ha atomi, in quanto, comunque prendo un elemento in $[0, 1]$ diverso da zero ne esiste sempre uno più piccolo di esso e diverso da zero. Analogamente si vede che non ha antiatomi.

(d) Il sottoreticolo $L = \{0\} \cup [\frac{1}{2}, 1]$ di $([0, 1], \leq)$ ha $\frac{1}{2}$ come atomo che, come si è osservato in (c), è anche unico.

(e) Ogni reticolo $(X, \leq)$ finito è atomico, in quanto $\forall a \in X$, $a \neq \bot$, o $a$ è un atomo, o detto $A = \{x \in X | \bot \neq x \leq a\}$ esiste $\overline{a}$ elemento minimale per $A$ che è un atomo ed è $\overline{a} \leq a$.

DEFINIZIONE 4.1.10. *Un reticolo $(X, \leq)$ si dice* ***powerset*** ***(insieme potenza)*** *se esiste $S \in |\mathbf{Set}|$ tale che*

$$(X, \leq) \cong (\mathcal{P}(S), \subseteq).$$

Ovviamente, è necessario che $(X, \leq)$ sia un'algebra di Boole, in quanto è isomorfo ad un'algebra di Boole.

TEOREMA 4.1.11 (A. Lindenbaum, A. Tarski, 1935). *Se* $(X, \leq)$ *è un reticolo allora*

$(X, \leq)$ *è powerset* $\Leftrightarrow$ $(X, \leq)$ *è algebra di Boole completa e atomica.*

DIMOSTRAZIONE. "$\Rightarrow$" Ovvio.

"$\Leftarrow$" Osserviamo intanto che dalle proposizioni 2.5.10, 3.3.4 e 3.3.6 (2) segue che $(X, \leq)$ verifica le leggi di distributività infinita.

Sia, ora, $S = \{a \in X | a \text{ atomo}\}$.

$\forall h \in X$ sia

$$H = \{a \in S | a \leq h\},$$

allora risulta $h = \bigvee H$. Infatti ovviamente, per come è stato costruito $H$, $h$ è un maggiorante per $H$. Inoltre, se $\overline{h}$ è un maggiorante per $H$ allora risulta

$$\neg\overline{h} \wedge h = \perp$$

in quanto se così non fosse allora poiché per ipotesi $X$ è un reticolo atomico, esisterebbe $a \in S$, tale che $a \leq \neg\overline{h} \wedge h$ e quindi $a \leq \neg\overline{h}$ e $a \leq h$ da cui seguirebbe che $a \in H$ e quindi $a \leq \overline{h}$, ma ciò conduce all'assurdo $a \leq \overline{h} \wedge (\neg\overline{h}) = \perp$.

Pertanto si ha

$$\neg\overline{h} \wedge h = \perp \;\Rightarrow\; \overline{h} \vee (\neg\overline{h} \wedge h) = \overline{h} \vee \perp \;\Rightarrow\; \overline{h} \vee h = \overline{h} \;\Rightarrow\; h \leq \overline{h}$$

ovvero $h$ è il più piccolo maggiorante di $H$.

La seguente funzione, chiaramente isotona,

$$f : X \to \mathcal{P}(S),\; h \longmapsto f(h) = H = \{a \in S | a \leq h\}$$

è un isomorfismo fra algebre di Boole. Infatti

- $f$ iniettiva:
  Se $h, k \in X$ sono tali che $f(h) = H = K = f(k)$, allora $h = \bigvee H = \bigvee K = k$.
- $f$ suriettiva:
  Se $L \subseteq S$, poiché $(X, \leq)$ è completo allora esiste $l = \bigvee L$ e risulta $f(l) = L$. Infatti
  "$\subseteq$" Per 2.5.10, 3.3.4 vale in $X$ la (**ILD**$\infty$), quindi per 4.1.5 e 4.1.8 si ha

$$\begin{aligned} a \in f(l) &\Rightarrow\; \perp \neq a \leq l = \bigvee L \\ &\Rightarrow\; \exists b \in L : \perp \neq a \leq b \\ &\Rightarrow\; a = b \in L. \end{aligned}$$

  "$\supseteq$" $a \in L \;\Rightarrow\; a \leq \bigvee L \;\Rightarrow\; a \in f(l)$.

Siano $x, x' \in X$

- $f(x \vee x') = f(x) \cup f(x')$:

"$\subseteq$" Per 4.1.7

$$\begin{aligned} a \in f(x \vee x') &\Rightarrow a \in S,\ a \leq x \vee x' \\ &\Rightarrow a \in S,\ a \leq x \ \text{ o } \ a \leq x' \\ &\Rightarrow \ a \in f(x) \ \text{ o } \ a \in f(x') \\ &\Rightarrow a \in f(x) \cup f(x'). \end{aligned}$$

"$\supseteq$" Ovvio, perchè $f$ è isotona.

- Ovviamente $f(\perp) = \perp$.

Quindi per le proposizioni 3.3.8 e 2.4.10 $f$ è un isomorfismo di algebre di Boole.

Dalle proprietà su dimostrate segue che $(X, \leq) \cong (\mathcal{P}(S), \subseteq)$, cioè che $X$ è powerset. □

COROLLARIO 4.1.12. *Ogni algebra di Boole completa e atomica è completamente distributiva.*

DIMOSTRAZIONE. Infatti, è ben noto (si veda l'Esempio 3.4.5 (a)) che il powerset $\mathcal{P}(X)$ di un qualsiasi insieme è completamente distributivo. □

## 4.2. Ideali e Filtri

DEFINIZIONE 4.2.1. *Siano $(X, \leq)$ un semireticolo superiore ed $I \subseteq X$. $I$ si dice **ideale** in $(X, \leq)$ se*

$I_1$. $\perp \in I$.
$I_2$. $x, y \in I \Rightarrow x \vee y \in I$.
$I_3$. $x \in I$ *e* $y \leq x \Rightarrow y \in I$.

DEFINIZIONE 4.2.2. *Siano $(X, \leq)$ un semireticolo inferiore ed $F \subseteq X$. $F$ si dice **filtro** in $(X, \leq)$ se*

$F_1$. $\top \in F$.
$F_2$. $x, y \in F \Rightarrow x \wedge y \in F$.
$F_3$. $x \in F$ *e* $x \leq y \Rightarrow y \in F$.

OSSERVAZIONE 4.2.3. 1. Le proprietà $I_1$ e $I_2$ sono equivalenti alla seguente proprietà:

$$A \subseteq I,\ A \text{ finito } \Rightarrow \ \vee A \in I$$

cioè $I$ è un $\vee$-sottosemireticolo di $X$.

2. Le proprietà $F_1$ ed $F_2$ sono equivalenti alla seguente proprietà:

$$B \subseteq F,\ B \text{ finito } \Rightarrow \ \wedge B \in F$$

cioè $F$ è un $\wedge$-sottosemireticolo di $X$.

3. La condizione $I_3$ si esprime dicendo che $I$ è un ***lower-set***. La condizione $F_3$ si esprime dicendo che $F$ è un ***upper-set***.

Se, $\forall S \subseteq X$, si pone $\downarrow S = \{x \in X | \exists s \in S : x \leq s\}$ e $\uparrow S \doteq \{y \in S | \exists s \in S : s \leq y\}$, allora la condizione $I_3$ ($F_3$, rispettivamente), è equivalente all'uguaglianza $\downarrow I = I$ ($\uparrow F = F$, rispettivamente).

4. Se $(X, \leq)$ è un $\vee$-semireticolo ($\wedge$-semireticolo, rispettivamente) e consideriamo una qualsiasi famiglia $\mathcal{I}$ di ideali ($\mathcal{F}$ di filtri, rispettivamente) in $X$ si verifica facilmente che l'intersezione è ancora un ideale (un filtro, rispettivamente) che si indica con

$$\bigwedge \mathcal{I} = \bigcap \mathcal{I}, \quad (\bigwedge \mathcal{F} = \bigcap \mathcal{F}, \text{rispettivamente}).$$

5. Da quanto osservato al punto 4. segue che per ogni $\emptyset \neq A \subseteq X$ è possibile determinare univocamente l'ideale (il filtro, rispettivamente) che contiene $A$ ed è contenuto in ogni altro ideale (filtro, rispettivamente) che contiene $A$. Tale ideale (filtro, rispettivamente) si indica con $< A >$ e si dice che è l'*ideale* (il *filtro*, rispettivamente) *generato da A*. E' facile verificare che l'ideale $< A >$ è costituito dagli elementi $x \in X$ per i quali $\exists H \subseteq A$, $H$ finito tale che $x \leq \bigvee H$. Il filtro $< A >$ è invece costituito dagli elementi $y \in X$ per i quali $\exists G \subseteq A$, $G$ finito tale che $\bigwedge G \leq y$.

DEFINIZIONE 4.2.4. *Sia $(X, \leq)$ un semireticolo superiore (inferiore, rispettivamente).*

*Un ideale $I$ in $X$ (un filtro $F$ in $X$, rispettivamente) si dice* ***principale*** *se ha un massimo (un minimo, rispettivamente).*

OSSERVAZIONE 4.2.5. Se $(X, \leq)$ è un $\bigvee$-semireticolo ($\bigwedge$-semireticolo, rispettivamente) completo si ha che un ideale $I$ in $X$ (un filtro $F$ in $X$, rispettivamente) è principale sse è chiuso per $\bigvee$ (per $\bigwedge$, rispettivamente).

PROPOSIZIONE 4.2.6. *Siano $(X, \leq)$ un $\bigvee$-semireticolo ed $I \subseteq X$.*

*$I$ è un ideale principale $\Leftrightarrow \exists | a \in X$ tale che $I = \downarrow a$.*

DIMOSTRAZIONE. "$\Rightarrow$" Se $I$ è un ideale principale, posto $a = \bigvee I \in I$, allora $I = \downarrow a$. Infatti, se $x \in \downarrow a$, allora $x \leq a$ e poiché $a \in I$ essendo $I$ un ideale si ha $x \in I$. Viceversa se $x \in I$ allora $x \leq \bigvee I = a$ e quindi $x \in \downarrow a$. Per doppia inclusione segue pertanto l'uguaglianza $I = \downarrow a$.

Se inoltre fosse $I = \downarrow a'$, allora sarebbe $a \in \downarrow a'$ e $a' \in \downarrow a$, quindi $a' = a$.

"$\Leftarrow$" $I$ è un lower-set, cioè verifica la condizione $I_3$, infatti se $x \in I$ ed $y \in X$ è tale che $y \leq x$, allora $y \leq x \leq a$, ovvero $y \in I$.

Inoltre, $I$ è chiuso per $\bigvee$, infatti, se $S \subseteq I$, allora $\bigvee S \leq \bigvee I = a \in I$ quindi $\bigvee S \in I$. Da ciò segue anche che $I$ verifica le condizioni $I_1$ e $I_2$. $\square$

PROPOSIZIONE 4.2.7. *Siano $(X, \leq)$ un semireticolo inferiore ed $F \subseteq X$.*

*$F$ è un filtro principale $\Leftrightarrow \exists | a \in X$ tale che $F = \uparrow a$.*

DIMOSTRAZIONE. Si ottiene dualizzando quella di 4.2.6. □

Con riferimento alle notazioni delle proposizioni 4.2.6 e 4.2.7 si dice che $I$ ed $F$ sono rispettivamente l'*ideale* e il *filtro principali generati da* $a$.

PROPOSIZIONE 4.2.8.

(1) $f \in \vee\text{-}\mathbf{SLat}(X,Y) \Rightarrow Kerf = \{a \in X | f(a) = \bot\}$ *è un ideale di* $X$.
(2) *Se* $X \in |\vee\text{-}\mathbf{SLat}|$ *ed* $I \subseteq X$ *è un ideale di* $X$ *allora esistono* $Y \in |\vee\text{-}\mathbf{SLat}|$ *ed* $f \in \vee\text{-}\mathbf{SLat}(X,Y)$ *tale che* $I = Kerf$.
(3) *Se* $X \in |\mathbf{DLat}|$ *e* $I$ *è un ideale di* $X$ *allora esistono* $Y \in |\mathbf{DLat}|$ *ed* $f \in \mathbf{DLat}(X,Y)$ *tale che* $Kerf = I$.

DIMOSTRAZIONE. (1) Chiaramente $\bot \in Kerf$.
Se $f \in \vee\text{-}\mathbf{SLat}(X,Y)$ ed $x, y \in Kerf$ allora

$$f(x \vee y) = f(x) \vee f(y) = \bot \;\Rightarrow\; x \vee y \in Kerf.$$

Se inoltre, $x \in Kerf$ ed $a \leq x$, allora

$$f(a) \leq f(x) = \bot \;\Rightarrow\; f(a) = \bot \;\Rightarrow\; a \in Kerf.$$

(2) Siano $X \in |\vee\text{-}\mathbf{SLat}|$ ed $I$ un ideale di $X$. $\forall a, b \in X$, sia

$$a \equiv b \;\Leftrightarrow\; \exists x, y \in I \;: a \vee x = b \vee y.$$

Ovviamente "$\equiv$" è una relazione d'equivalenza ed inoltre "$\equiv$" è compatibile con $\vee$, infatti

$$\begin{aligned} a \equiv a',\; b \equiv b' \Rightarrow\; & \exists\, x, x', y, y' \in I \;:\; a \vee x = a' \vee x' \;, b \vee y = b' \vee y' \\ \Rightarrow\; & (a \vee b) \vee (x \vee y) = (a' \vee b') \vee (x' \vee y') \\ \Rightarrow\; & a \vee b \equiv a' \vee b'. \end{aligned}$$

Sia $Y = X/\equiv$ il semireticolo quoziente e sia $f : X \to Y$ la suriezione canonica ( che è un morfismo in $\vee$-**SLat** ), allora si ha che $Kerf = I$, infatti

$$\begin{aligned} a \in Kerf \Rightarrow\; & f(a) = \bot = f(\bot) \\ \Rightarrow\; & a \equiv \bot \\ \Rightarrow\; & \exists\, x, y \in I : a \vee x = \bot \vee y = y \in I \\ \Rightarrow\; & a \in I. \end{aligned}$$

Viceversa

$$a \in I \;\Rightarrow\; a \vee a = \bot \vee a \;\Rightarrow\; a \equiv \bot \;\Rightarrow\; f(a) = \bot.$$

(3) Mediante lo stesso procedimento seguito in (2) si costruisce di $Y$ che sotto le attuali ipotesi è un reticolo, infatti "$\equiv$" è compatibile anche con $\wedge$

$$\begin{aligned} a \equiv a',\ b \equiv b' \Rightarrow\ & \exists\, x, x', y, y' \in I\ :\ a \vee x = a' \vee x',\ b \vee y = b' \vee y' \\ \Rightarrow\ & (a \vee x) \wedge (b \vee y) = (a' \vee x') \wedge (b' \vee y') \\ \Rightarrow\ & (a \wedge b) \vee (a \wedge y) \vee (x \wedge b) \vee (x \wedge y) \\ & = (a' \wedge b') \vee (a' \wedge y') \vee (x' \wedge b') \vee (x' \wedge y') \\ \Rightarrow\ & a \wedge b \equiv a' \wedge b'. \end{aligned}$$

La distributività in $Y$ si eredita banalmente da $X$.

Pertanto, la suriezione canonica $f : X \to Y$ è un morfismo di reticoli e analogamente a (2) si verifica che $Kerf = I$. □

PROPOSIZIONE 4.2.9.

(1) $f \in \wedge\text{-}\mathbf{SLat}(X, Y) \Rightarrow \wedge\text{-}Kerf = \{a \in A | f(a) = \top\}$ *è un filtro di* $X$.

(2) *Se* $X \in |\wedge\text{-}\mathbf{SLat}|$ *ed* $F \subseteq X$ *è un filtro di* $X$ *allora esistono* $Y \in |\wedge\text{-}\mathbf{SLat}|$ *ed* $f \in \wedge\text{-}\mathbf{SLat}(X, Y)$ *tale che* $F = \wedge\text{-}Kerf$.

(3) *Se* $X \in |\mathbf{DLat}|$ *ed* $F$ *è un filtro di* $X$ *allora esistono* $Y \in |\mathbf{DLat}|$ *ed* $f \in \mathbf{DLat}(X, Y)$ *tale che* $\wedge\text{-}Kerf = F$.

DIMOSTRAZIONE. Si ottiene dualizzando quella di 4.2.8. □

PROPOSIZIONE 4.2.10. *Siano* $(X, \leq)$ *un reticolo,* $I \subseteq X$ *ed* $F = X \setminus I$, *allora sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

($i$) $I$ *è un ideale ed* $F$ *è un filtro di* $X$.

($ii$) $I$ *è un ideale,* $\top \notin I$ *e* $(x \wedge y \in I \ \Rightarrow\ x \in I \text{ o } y \in I)$.

($iii$) $F$ *è un filtro,* $\perp \notin F$ *e* $(a \vee b \in F \ \Rightarrow\ a \in F \text{ o } b \in F)$.

($iv$) $\exists f \in \mathbf{Lat}(X, \mathit{2})$ *tale che* $f^{\leftarrow}(\perp) = I$ *e* $f^{\leftarrow}(\top) = F$.

DIMOSTRAZIONE. "$(i) \Rightarrow (ii)$" $\top \in F = X \setminus I \Rightarrow \top \notin I$.

Se $x \wedge y \in I$ allora $x \in I$ o $y \in I$; infatti se così non fosse, cioè se $x, y \notin I$ allora $x, y \in F$ da cui segue $x \wedge y \in F = X \setminus I$ ovvero $x \wedge y \notin I$, che è assurdo.

"$(ii) \Rightarrow (iii)$" Da $\perp \in I$ segue che $\perp \notin F$. Inoltre, da $a, b \notin F$, cioè $a, b \in I$, segue ovviamente $a \vee b \notin F$.

"$(iii) \Rightarrow (iv)$" Posto $f(x) = \perp$, $\forall x \in I$ e $f(y) = \top$, $\forall y \in F$, si ha che $f : X \to \mathit{2}$ è un morfismo di reticoli. Siano, infatti, $x, y \in X$.

Se $x \vee y \notin F$, allora $x, y \notin F$, quindi $f(x \vee y) = \perp = f(x) \vee f(y)$.

Se $x \vee y \in F$, allora $x \in F$ o $y \in F$, quindi $f(x \vee y) = \top = f(x) \vee f(y)$.

Se $x \wedge y \notin F$, allora $x \notin F$ o $y \notin F$, quindi $f(x \wedge y) = \perp = f(x) \wedge f(y)$.

Se $x \wedge y \in F$, allora $x, y \in F$ quindi $f(x \wedge y) = \top = f(x) \wedge f(y)$.

"$(iv) \Rightarrow (i)$" Ovvio, per le proposizioni 4.2.8 e 4.2.9. □

DEFINIZIONE 4.2.11. *Se* $(X, \leq)$ *è un reticolo ed* $I \subseteq X$ *è un ideale di* $X$ *che verifica una delle condizini equivalenti* $(i), (ii), (iv)$ *della* Proposizione 4.2.10 *allora* $I$ *si dice ideale* ***primo****. Un filtro caratterizzato dalle condizioni equivalenti* $(i), (iii), (iv)$ *della stessa proposizione si dice filtro* ***coprimo****.*

OSSERVAZIONE 4.2.12. L'espressione filtro coprimo che usiamo qui differisce da quella usata in [**6, 8**]. Riteniamo che le seguenti proposizioni, in particolare la 4.2.14, giustifichino tale scelta.

PROPOSIZIONE 4.2.13. *Siano* $(X, \leq)$ *un reticolo ed* $I$ *un ideale in* $X$.

$$I \text{ è un ideale principale primo} \Leftrightarrow \exists | a \in X,\ a \text{ primo, tale che } I = \downarrow a.$$

DIMOSTRAZIONE. "$\Rightarrow$" Dalla Proposizione 4.2.6 segue che $\exists | a \in X$ tale che $I = \downarrow a$. poiché $I$ è primo, allora $\top \notin \downarrow a$ e quindi $a \neq \top$. Se $x \wedge y \leq a$, $x, y \in X$ e $x \nleq a$ allora $x \wedge y \in \downarrow a$, $x \notin \downarrow a$ e poiché $\downarrow a$ è primo si ha $y \in \downarrow a$, ovvero $y \leq a$, cioè $a$ è primo.

"$\Leftarrow$" Dalla Proposizione 4.2.6 segue che $I$ è un ideale principale. Inoltre, poiché $a$ è primo, allora $a \neq \top$, quindi $\top \notin I$. Sia $x \wedge y \in \downarrow a$, $x, y \in X$. Se $x \leq a$, $x \in \downarrow a$ allora la tesi è vera. Se invece $x \nleq a$, allora essendo $a$ primo si ha $y \leq a$ e quindi $y \in \downarrow a$, ovvero $\downarrow a$ è un ideale primo. □

PROPOSIZIONE 4.2.14. *Siano* $(X, \leq)$ *un reticolo ed* $F$ *un filtro in* $X$.

$$F \text{ è un filtro principale coprimo} \Leftrightarrow \exists | a \in X,\ a \text{ coprimo, tale che } F = \uparrow a.$$

DIMOSTRAZIONE. Si ottiene dualizzando quella di 4.2.13. □

DEFINIZIONE 4.2.15. *Siano* $(X, \leq)$ *un reticolo ed* $F$ *un filtro in* $X$.
$F$ *si dice* ***filtro completamente coprimo*** *se*

$$\perp \notin F \text{ e } \bigvee A \in F \Rightarrow \exists a \in A : a \in F.$$

OSSERVAZIONE 4.2.16. 1. $F$ filtro completamente coprimo $\Rightarrow$ $F$ filtro coprimo.

2. Dalla Proposizione 4.2.10 segue chiaramente che se $S$ è un locale e $p : S \to \mathbf{2}$ è una funzione, allora

$$p^{\leftarrow}(\perp) \text{ ideale primo} \Leftrightarrow p \text{ morfismo di reticoli} \Leftrightarrow p^{\leftarrow}(\top) \text{ filtro coprimo.}$$

PROPOSIZIONE 4.2.17. *Siano* $S$ *un locale e* $p : S \to \mathbf{2}$ *una funzione, allora*

$$p \text{ morfismo di frame} \Leftrightarrow I = p^{\leftarrow}(\perp) \text{ ideale principale primo.}$$

DIMOSTRAZIONE. "$\Rightarrow$" Sia $p : S \to \mathbf{2}$ un morfismo di frame e sia $I = p^{\leftarrow}(\perp)$.

E' noto che $I$ è primo. Se, inoltre, $A \subseteq I$, allora

$$p\left(\bigvee A\right) = \bigvee \{p(a) | a \in A\} = \perp \Rightarrow \bigvee A \in I,$$

quindi $I$ è principale.

"$\Leftarrow$" Dalla Osservazione 4.2.16 (2.) segue che $p$ è un morfismo di reticoli da $S$ in $\mathit{2}$. Inoltre $p$ conserva $\bigvee$: infatti sia $X \subseteq S$. Se $\bigvee X \in I$, allora $p(\bigvee X) = \bot = \bigvee p^{\rightarrow}(X)$. Se $\bigvee X \notin I$, allora, poiché $I$ è principale, $\exists x' \in X$ : $x' \notin I$ e quindi $p(\bigvee X) = \top = \bigvee p^{\rightarrow}(X)$. □

COROLLARIO 4.2.18. *Siano $S$ un locale e $p : S \to \mathit{2}$ una funzione, allora*

*$p$ morfismo di frame $\Leftrightarrow F = p^{\leftarrow}(\top)$ filtro completamente coprimo.*

DIMOSTRAZIONE. "$\Rightarrow$" Sia $p : S \to \mathit{2}$ un morfismo di frame e sia $F = p^{\leftarrow}(\top)$. Se $A \subseteq S$ è tale che $\bigvee A \in F$, allora $\top = p(\bigvee A) = \bigvee \{p(a) | a \in A\}$ e quindi esiste $a' \in A$ per cui risulta $p(a') = \top$, altrimenti se così non fosse si avrebbe $A \subseteq p^{\leftarrow}(\bot)$ da cui si avrebbe l'assurdo $\bigvee \{p(a) | a \in A\} = \bot$.

"$\Leftarrow$" poiché $F$ è coprimo (si veda l'Osservazione 4.2.16 (1.), per l'Osservazione 4.2.16 2. $p$ è un morfismo di reticoli. Inoltre, $\forall A \subseteq S$ si ha

$$\begin{aligned} p\left(\bigvee A\right) = \top \Rightarrow & \bigvee A \in F \\ \Rightarrow & \exists a \in A : a \in F \\ \Rightarrow & p(a) = \top \\ \Rightarrow & \bigvee p^{\rightarrow}(A) = \top \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} p\left(\bigvee A\right) = \bot \Rightarrow & \bigvee A \notin F \\ \Rightarrow & a \notin F, \forall a \in A \\ \Rightarrow & p(a) = \bot, \forall a \in A \\ \Rightarrow & \bigvee p^{\rightarrow}(A) = \bot \end{aligned}$$

da cui segue che $p(\bigvee A) = \bigvee p^{\rightarrow}(A)$, ovvero che $p$ è un morfismo di frame. □

PROPOSIZIONE 4.2.19. *Siano $(X, \leq)$ un reticolo, $I$ un ideale di $X$ ed $F$ un filtro di $X$ tali che $I \cap F = \emptyset$; allora esiste $M$ ideale di $X$, massimale fra quelli che contengono $I$ e non intersecano $F$, ed esiste $G$ filtro di $X$ massimale tra quelli che contengono $F$ e non intersecano $I$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathcal{M}$ la famiglia degli ideali di $X$ disgiunti da $F$ e $\mathcal{C}$ una catena ascendente di ideali contenuta in $\mathcal{M}$. Allora si verifica facilmente che $C = \bigcup \mathcal{C}$ è un ideale appartenente ad $\mathcal{M}$ e per il Lemma di Zorn esiste un elemento $M$ massimale in $\mathcal{M}$.

Il resto della proposizione si dimostra per dualità. □

PROPOSIZIONE 4.2.20. *Se $(X, \leq)$ è un reticolo distributivo, $F$ è un filtro di $X$ ed $I$ è un ideale massimale fra quelli disgiunti da $F$, allora $I$ è primo.*

DIMOSTRAZIONE. Poiché per ipotesi $I \cap F = \emptyset$, allora $\top \notin I$.

Sia $x_1 \wedge x_2 \in I$ e siano $J_1$ e $J_2$ gli ideali generati da $I$ insieme con $x_1$ ed $x_2$, rispettivamente. Allora il generico elemento di $J_i$, con $i = 1, 2$, è del tipo $a \vee (x_i \wedge b)$, con $a \in I$, $b \in X$ : infatti, esso si può ottenere come $(p \vee x_i) \wedge q$, con $p \in I$ e $q \in X$, quindi per la distributività, è del tipo $(p \wedge q) \vee (x_i \wedge q)$, con $p \wedge q = a \in I$ e $q = b \in X$.

Se $J_1 \cap F \neq \emptyset \neq J_2 \cap F$ allora $\exists a_1 \vee (x_1 \wedge b_1) \in F$ ed $\exists a_2 \vee (x_2 \wedge b_2) \in F$ con $a_i \in I$ e $b_i \in X$, pertanto

$$[a_1 \vee (x_1 \wedge b_1)] \wedge [a_2 \vee (x_2 \wedge b_2)] \in F,$$

ma

$$\begin{aligned}&[a_1 \vee (x_1 \wedge b_1)] \wedge [a_2 \vee (x_2 \wedge b_2)] = \\ &= \underbrace{(a_1 \wedge a_2)}_{\in I} \vee \underbrace{(a_1 \wedge (x_2 \wedge b_2))}_{\in I} \vee \underbrace{((x_1 \wedge b_1) \wedge a_2))}_{\in I} \vee \underbrace{(x_1 \wedge b_1 \wedge x_2 \wedge b_2)}_{\in I} \in I\end{aligned}$$

e ciò è assurdo in quanto $I \cap F = \emptyset$.

Quindi sia $J_1 \cap F = \emptyset$; poiché $J_1 \supseteq I$ per la massimalità di $I$ ho $J_1 = I$, quindi $a_1 \in I$. □

PROPOSIZIONE 4.2.21. *Se $(X, \leq)$ è un reticolo distributivo, $I$ è un ideale di $X$ ed $F$ è un filtro massimale fra quelli disgiunti da $I$, allora $F$ è coprimo.*

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione si ottiene dalla 4.2.20 per dualità. □

DEFINIZIONE 4.2.22. *Un ideale $I$ si dice **proprio** se è diverso da $X$, cioè se $\top \notin I$.*

*Un filtro $F$ si dice **proprio** se è diverso da $X$, cioè se $\perp \notin F$.*

*Un ideale in $(X, \leq)$ massimale tra quelli disgiunti dal filtro $\{\top\}$ si dice ideale **proprio massimale** o semplicemente ideale **massimale**.*

*Un filtro in $(X, \leq)$ massimale tra quelli disgiunti dall'ideale $\{\perp\}$ si dice filtro **proprio massimale** o semplicemente filtro **massimale**.*

OSSERVAZIONE 4.2.23. Comunemente si usa il termine filtro su un insieme $X$, per denotare un filtro nel powerset di $X$, $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$. A volte capita di considerare filtri in qualche sottoreticolo del powerset di $X$; in tal caso si usa accompagnare il termine filtro con un aggettivo che suggerisca l'entità del sottoreticolo in cui si considera il filtro. Ad esempio per "*filtro aperto*" su uno spazio topologico $(X, \tau)$ si intende un filtro nel reticolo completo $\tau$.

Col termine ***ultrafiltro*** (su $X$) si usa abitualmente indicare un filtro massimale proprio nel powerset di $X$. Anche in questo caso si possono utilizzare espressioni come, facendo riferimento all'esempio su dato, ultrafiltro aperto.

COROLLARIO 4.2.24. *In un reticolo distributivo ogni ideale massimale è primo, ogni filtro massimale è coprimo.*

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione segue dalle proposizioni 4.2.20 e 4.2.21. $\square$

PROPOSIZIONE 4.2.25. *Sia* $(X, \leq)$ *un reticolo distributivo. Se* $a, b \in X$, $b \not\leq a$, *allora esiste un morfismo di reticoli* $f : X \to \mathit{2}$ *con* $f(a) = \bot$, $f(b) = \top$.

DIMOSTRAZIONE. Considero il filtro $\uparrow b$ e l'ideale $\downarrow a$. Se $x \in \uparrow b \cap \downarrow a$, allora $b \leq x \leq a$ da cui segue che $b \leq a$, che è assurdo. Quindi $\uparrow b \cap \downarrow a = \emptyset$. Se $I$ un ideale massimale fra quelli che sono disgiunti da $\uparrow b$, allora $I$ è primo e quindi è nucleo di un morfismo di reticoli $f : X \to \mathit{2}$ per cui risulta $f(a) = \bot$, $f(b) = \top$ in quanto $a \in I$ e $b \notin I$. $\square$

PROPOSIZIONE 4.2.26. *Se* $(X, \vee, \wedge, \neg)$ *è un'algebra di Boole e* $I$ *è un ideale in* $X$, *allora sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

$(i)$ *$I$ è primo.*
$(ii)$ $\forall a \in X : a \in I \Leftrightarrow \neg a \notin I$.
$(iii)$ *$I$ è massimale.*

DIMOSTRAZIONE. "$(i) \Rightarrow (ii)$" $\forall a \in X$ risulta $a \wedge \neg a = \bot \in I$ quindi $a \in I$ oppure $\neg a \in I$ essendo $I$ primo. Se inoltre si avesse $a \in I$ e $\neg a \in I$, allora sarebbe $a \vee \neg a = \top \in I$ contro l'ipotesi che $I$ sia primo.

"$(ii) \Rightarrow (iii)$" poiché $\bot \in I$, da $(ii)$ segue che $\neg\bot = \top \notin I$ quindi $I$ è proprio $(I \cap \{\top\} = \emptyset)$.

Se $J$ è un ideale proprio, $J \supsetneqq I$ e se $a \in J \setminus I$ allora $\neg a \in I \subset J$ e quindi $a \vee \neg a = \top \in J$, che è assurdo.

"$(iii) \Rightarrow (i)$" Segue dala Proposizione 4.2.20. $\square$

PROPOSIZIONE 4.2.27. *Se* $(X, \vee, \wedge, \neg)$ *è un'algebra di Boole e* $F$ *è un filtro in* $X$, *allora sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

$(i)$ *$F$ è coprimo.*
$(ii)$ $\forall a \in X : a \in F \Leftrightarrow \neg a \notin F$.
$(iii)$ *$F$ è massimale.*

DIMOSTRAZIONE. E' duale di quella della proposizione precedente. $\square$

COROLLARIO 4.2.28. *Se* $(X, \vee, \wedge, \neg)$ *è un'algebra di Boole ed* $a \in X$, *allora*

$$a \textit{ primo } \Leftrightarrow \neg a \textit{ atomo}.$$

DIMOSTRAZIONE. "$\Rightarrow$" Se $a \in X$ è primo, allora $\downarrow a$ è ideale primo, quindi $a \neq \top$ e pertanto $\neg a \neq \bot$. Se $a' \leq \neg a$, allora $a \leq \neg a'$. Nel caso $a \leq \neg a'$, e $a \neq \neg a'$, si ha $\neg a' \notin \downarrow a$; essendo $\downarrow a$ un ideale primo per 4.2.26 si ha $a' \in \downarrow a$ e quindi $a' \leq a \wedge \neg a = \bot$. Nel caso $\neg a' = a$, allora $a' = \neg a$. Pertanto dall'arbitrarietà di $a'$ segue che $\neg a$ è un atomo.

"$\Leftarrow$" Se $a \in X$ è tale che $\neg a$ è un atomo, allora evidentemente $a$ è un antiatomo. La tesi segue quindi dalla Proposizione 4.1.7. $\square$

## 4.3. Punti di un Locale

DEFINIZIONE 4.3.1. *Se $S$ è un locale, si dice* **punto** *di $S$ un'applicazione*

$$p : S \to \mathit{2}$$

*che conserva $\bigvee$ ed $\wedge$, cioè che sia un morfismo di frame.*

*L'insieme dei punti di $S$ lo indichiamo con*

$$pt(S) = \{p : S \to \mathit{2} \mid p \; morfismo \; di \; frame\}.$$

PROPOSIZIONE 4.3.2. *Se $S$ è un locale, $pt(S)$ è in corrispondenza bigettiva con l'insieme degli elementi primi di $S$.*

DIMOSTRAZIONE. Posto $P = \{a \in S | a \text{ primo}\}$, $\forall a \in P$ definiamo

$$p_a : S \to \mathit{2}, \; x \mapsto p_a(x) = \begin{cases} \bot & \text{se } x \leq a \\ \top & \text{se } x \nleq a. \end{cases}$$

Poiché, $\forall a \in P$, $p_a^{\leftarrow}(\bot) = \downarrow a$ è un ideale principale primo, per la Proposizione 4.2.17 si ha che $p_a$ è un morfismo di frame, ovvero $p_a \in pt(S)$.

Viceversa, ogni $p \in pt(S)$ determina, sempre per la Proposizione 4.2.17 un ideale principale primo, $p^{\leftarrow}(\bot) = \downarrow a_p$, quindi un elemento primo $a_p \in P$.

E' facile verificare che le corrispondenze

$$a \in P \longmapsto p_a \in pt(S)$$

e

$$p \in pt(S) \longmapsto a_p \in P$$

sono una l'inversa dell'altra. $\square$

Sia $S$ un locale e sia

$$\varphi : S \to \mathcal{P}(pt(S))$$

la funzione definita $\forall x \in S$ da

$$\varphi(x) = \{p \in pt(S) | p(x) = \top\}.$$

COROLLARIO 4.3.3. *$\varphi(x)$ è in corrispondenza bigettiva con l'insieme $\{a \in S | a \; primo \; : \; x \nleq a\}$.*

DIMOSTRAZIONE. Con riferimento alle corrispondenze definite nella dimostrazione della Proposizione 4.3.2 se $p \in \varphi(x)$, si ha $x \nleq a_p$, altrimenti se fosse $x \leq a_p$ allora sarebbe $\top = p(x) \leq p(a_p)$, che è assurdo.

Se $a \in S$ è primo, e $x \nleq a$, allora $p_a(x) = \top$, quindi $p_a \in \varphi(x)$. $\square$

Lemma 4.3.4. *Se* $(X, \leq)$ *ed* $(Y, \leq)$ *sono reticoli completi,* $f : X \to Y$ *conserva* $\bigvee$ *e* $\wedge$ *ed* $S \subseteq X$ *è un frame,* $(S, \leq)$*, con la relazione d'ordine indotta da* $X$*, allora* $(f^{\to}(S), \leq)$ *è un frame con la relazione d'ordine indotta da* $Y$*.*

Dimostrazione. Considerato a piacere $A \subseteq f^{\to}(S)$ e scelto a piacere $A' \subseteq S$ tale che $f^{\to}(A') = A$ si ha evidentemente

$$\bigvee A = \bigvee f^{\to}(A') = f^{\to}\left(\bigvee A'\right) \in f^{\to}(S)$$

quindi $f^{\to}(S)$ è un sottosemireticolo superiore completo di $Y$ quindi un reticolo completo con la relazione d'ordine indotta da $Y$.

Inoltre, in $f^{\to}(S)$ si verifica la (**ILD**$\infty$), infatti se $b \in f^{\to}(S)$ e $b = f(b')$, con $b' \in S$, allora, usando ancora le precedenti notazioni si ha

$$\begin{aligned} b \wedge \left(\bigvee A\right) &= f(b') \wedge \left(\bigvee f^{\to}(A')\right) \\ &= f(b') \wedge f\left(\bigvee A'\right) \\ &= f\left(b' \wedge (\bigvee A')\right) \\ &= f\left(\bigvee \{b' \wedge a' | a' \in A'\}\right) \\ &= \bigvee \{f(b') \wedge f(a') | a' \in A'\} \\ &= \bigvee \{b \wedge a | a \in A\}. \end{aligned}$$

$\square$

Proposizione 4.3.5. $\varphi : S \to \mathcal{P}(pt(S))$ *è un morfismo di frame, quindi* $\varphi(S)$ *è una topologia su* $pt(S)$*.*

Dimostrazione. Se $X \subseteq S$, allora $\varphi(\bigvee X) = \bigcup \{\varphi(x) | x \in X\}$; infatti,

$$\begin{aligned} p \in \bigcup \{\varphi(x) | x \in X\} &\Leftrightarrow \exists x \in X : p(x) = \top \\ &\Leftrightarrow \bigvee \{p(x) | x \in X\} = p\left(\bigvee X\right) = \top \\ &\Leftrightarrow p \in \varphi\left(\bigvee X\right). \end{aligned}$$

Siano $x, y \in S$, allora $\varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \cap \varphi(y)$, infatti

$$\begin{aligned} p \in \varphi(x) \cap \varphi(y) &\Leftrightarrow p(x) = \top = p(y) \\ &\Leftrightarrow p(x \wedge y) = p(x) \wedge p(y) = \top \\ &\Leftrightarrow p \in \varphi(x \wedge y). \end{aligned}$$

$\square$

Pertanto, $\varphi(S)$ è una topologia su $pt(S)$. Lo spazio topologico così ottenuto lo indicheremo brevemente con $pt(S)$ e la sua topologia la denoteremo con $\tau\big(pt(S)\big)$. Ovviamente, la ridotta di $\varphi$ a $\tau\big(pt(S)\big)$

$$\varphi : S \to \tau\big(pt(S)\big)$$

è un morfismo in **Frm** quindi determina un morfismo, che indichiamo con lo stesso simbolo, $\varphi \in \mathbf{Loc}(\tau\big(pt(S)\big), S)$.

PROPOSIZIONE 4.3.6. *Se* $(X, \vee, \wedge, \neg)$ *è un'algebra di Boole completa,* $\neg$ *induce un antiisomorfismo (bigezione che inverte l'ordine e quindi porta* $\bigvee$ *in* $\bigwedge$ *e* $\bigwedge$ *in* $\bigvee$*), di insiemi ordinati fra* $pt(X)$ *e* $\big\{a \in X |\ a \text{ atomo}\big\}$.

DIMOSTRAZIONE. La tesi segue dalla Proposizione 4.3.2 che permette di identificare i punti di $X$ con gli elementi primi di $X$ e dal Corollario 4.2.28. □

COROLLARIO 4.3.7. *Se* $(X, \vee, \wedge, \neg)$ *è un'algebra di Boole completa, allora* $\varphi(x)$ *è antiisomorfo, tramite* $\neg$*, a* $\big\{a \in X | a \text{ atomo} : a \leq x\big\}$, $\forall x \in X$.

DIMOSTRAZIONE. Se $p \in \varphi(x)$, con $x \in X$, allora $p$ determina un elemento primo $b \in X$, $x \not\leq b$, quindi tale che $\neg x \leq b$, ovvero $a = \neg b \leq x$, che per 4.2.28 è un atomo.

Tale corrispondenza è un antiisomorfismo di insiemi ordinati. □

PROPOSIZIONE 4.3.8. *Se* $(X, \vee, \wedge, \neg)$ *è un'algebra di Boole completa, allora*

$$\varphi : X \to \mathcal{P}\big(pt(X)\big) \ \textit{è iniettiva} \Leftrightarrow X \textit{ è atomica.}$$

DIMOSTRAZIONE. "$\Rightarrow$" Sia $\perp \neq x \in X$, allora

$$\varphi(x) \cong \big\{a \in X | a \text{ atomo} : a \leq x\big\} \neq \varphi(\perp) = \emptyset$$

e quindi esiste $a \in X$, $a$ atomo, tale che $a \leq x$.

"$\Leftarrow$" Sia $X$ atomica e siano $x, y \in X$ tali che $x \neq y$.

Allora $(x \wedge \neg y, \neg x \wedge y) \neq (\perp, \perp)$.

Sia $x \wedge \neg y \neq \perp$ e sia $a \in X$ un atomo, tale che $a \leq x \wedge \neg y$. Risulta $a \leq x$ e $a \leq \neg y$, quindi $a \not\leq \neg x$, altrimenti si avrebbe $a \leq x \wedge \neg x = \perp$. Ne segue che $y \leq \neg a$ e $x \not\leq \neg a$ e quindi il punto $p_{\neg a}$, determinato dall'elemento primo $\neg a$, sta in $\varphi(x)$ ma non in $\varphi(y)$, cioè $\varphi(x) \neq \varphi(y)$. □

### 4.4. Aggiunzione tra Top e Loc

In modo informale possiamo dire che la *topologia senza punti* è quella disciplina che studia la cetegoria **Loc**. I legami tra tale categoria e la categoria **Top** degli spazi topologici che descriveremo in questo paragrafo giustificano l'uso del termine *topologia senza punti*, considerando anche il fatto che gli elementi dell'insieme sostegno di uno spazio topologico si chiamano punti dello spazio stesso, mentre la famiglia degli aperti è la topologia dello spazio.

Definiremo ora, due funtori tra le categorie **Top** e **Loc**.

Sia $f \in \mathbf{Loc}(S,T)$ ed $f^{op} : T \to S$ il corrispondente morfismo di frame. Se $p \in pt(S)$, poniamo

$$\overline{f}(p) = p \circ f^{op} : T \to \mathit{2},$$

allora $\overline{f}(p) \in pt(T)$.

In questo modo resta quindi definita una funzione

$$pt(f) = \overline{f} : pt(S) \to pt(T)$$

che è un morfismo in **Top**, ovvero una funzione continua, infatti gli aperti di $pt(T)$ sono tutti e soli della forma

$$\varphi(x) = \{q \in pt(T) | q(x) = \top\}, \text{ con } x \in T.$$

Per ciascuno di essi si ha

$$\begin{aligned}\overline{f}^{\leftarrow}(\varphi(x)) &= \{p \in pt(S) | \overline{f}(p) = q \text{ con } q \in pt(T) \text{ e } q(x) = \top\} \\ &= \{p \in pt(S) | (p \circ f^{op})(x) = \top\} \\ &= \{p \in pt(S) | p(f^{op}(x)) = \top\} \\ &= \varphi(f^{op}(x)) \in \tau(pt(S)).\end{aligned}$$

DEFINIZIONE 4.4.1. *La coppia di funzioni*

$$pt : |\mathbf{Loc}| \to |\mathbf{Top}|, \ S \longmapsto (pt(S), \tau(pt(S)) = \varphi(S))$$

*e*

$$pt : \mathcal{M}or(\mathbf{Loc}) \to \mathcal{M}or(\mathbf{Top}), \ f \longmapsto pt(f) = \overline{f}$$

*costituisce un funtore da* **Loc** *in* **Top**

$$pt : \mathbf{Loc} \to \mathbf{Top}.$$

Infatti

$$pt(1_S)(p) = p \circ 1_S = p, \ \forall p \in pt(S)$$

cioè

$$pt(1_S) = 1_{pt(S)}.$$

Inoltre, se $f \in \mathbf{Loc}(S,T)$ e $g \in \mathbf{Loc}(T,Z)$, allora

$$f^{op} : T \to S, \ g^{op} : Z \to T$$

e quindi

$$f^{op} \circ g^{op} : Z \to S$$

ovvero $g \circ f \in \mathbf{Loc}(S, Z)$ e si ha $\forall p \in pt(S)$:

$$\begin{aligned} pt(g \circ f)(p) &= p \circ f^{op} \circ g^{op} \\ &= (p \circ f^{op}) \circ g^{op} \\ &= pt(g)(p \circ f^{op}) \\ &= pt(g)\big(pt(f)(p)\big) \\ &= \big(pt(g) \circ pt(f)\big)(p). \end{aligned}$$

Se $X$ è uno spazio topologico, allora $\tau(X)$ è un locale. I punti di $\tau(X)$ sono individuati dagli ideali principali primi, ovvero dagli aperti primi $A \in \tau(X)$, (cioè quelli per i quali $\downarrow A$ è primo), che sono quegli aperti $A \neq X$ tali che $\forall B, C \in \tau(X)$ risulta $B \cap C \subseteq A \Rightarrow B \subseteq A$ o $C \subseteq A$. Pertanto essi sono individuati dai chiusi irriducibili o coprimi, ovvero dai chiusi $D \neq \emptyset$ tali che $\forall G, H$ chiusi si ha $D \subseteq G \cup H \Rightarrow D \subseteq G$ o $D \subseteq H$.

In termini ancora equivalenti, un punto in $\tau(X)$ è individuato da un filtro completamente coprimo nel reticolo degli aperti; in tal caso, l'unione degli aperti che non ne fanno parte e che costituiscono l'ideale principale primo individuato dal punto, è un aperto primo ed il suo complementare è il corrispondente chiuso irriducibile.

E' utile osservare che ogni elemento $x \in X$ individua un punto in $\tau(X)$: infatti, $\tau(x) = \{A \in \tau(X) | x \in A\}$ è un filtro completamente coprimo in $\tau(X)$, in quanto, se l'unione di una famiglia di aperti contiene $x$, allora uno di tali aperti contiene $x$.

L'aperto primo corrispondente a tale punto è il più grande aperto che non contiene $x$, $A = \bigcup\{B \in \tau(X) | x \notin B\}$, ed il corrispondente chiuso irriducibile è $\overline{\{x\}}$, il più piccolo chiuso contenente $x$. Riprenderemo questo argomento nel prossimo paragrafo.

Indichiamo tale punto con $p_x$

$$p_x : \tau(X) \to \mathit{2}$$

tale che $\forall B \in \tau(X)$,

$$p_x(B) = \begin{cases} \bot & \text{se } x \notin B \\ \top & \text{se } x \in B. \end{cases}$$

PROPOSIZIONE 4.4.2. *La funzione*

$$\psi : X \to pt(\tau(X)), \ x \longmapsto p_x$$

*è continua rispetto alle topologie* $\tau$ *su* $X$ *e* $\tau(pt(\tau(X)))$ *su* $pt(\tau(X))$.

DIMOSTRAZIONE. Il generico aperto di $\tau(pt(\tau(X)))$ è del tipo

$$\varphi(A) = \{p \in pt(\tau(X)) | p(A) = \top\}, \quad con A \in \tau(X).$$

Allora risulta

$$\begin{aligned}\psi^{\leftarrow}(\varphi(A)) &= \{x \in X | p_x \in \varphi(A)\}\\ &= \{x \in X | p_x(A) = \top\}\\ &= \{x \in X | x \in A\}\\ &= A \in \tau(X).\end{aligned}$$

□

La seguente definizione riprende un argomento già trattato nell' Osservazione 3.3.14. E' facile verificare quanto è asserito da tale definizione.

DEFINIZIONE 4.4.3. *La coppia di funzioni*

$$\tau : |\mathbf{Top}| \to |\mathbf{Loc}|,\ X \longmapsto \tau(X)$$

*e*

$$\begin{gathered}\tau : \mathcal{M}or(\mathbf{Top}) \to \mathcal{M}or(\mathbf{Loc}),\\ f \in \mathbf{Top}(X, X') \mapsto \tau(f) \in \mathbf{Loc}(\tau(X), \tau(X'))\end{gathered}$$

*tale che*

$$(\tau(f))^{op} = f^{\leftarrow} : \tau(X') \to \tau(X)$$

*costituisce un funtore da* **Top** *in* **Loc** *che si indica con*

$$\tau : \mathbf{Top} \to \mathbf{Loc}.$$

TEOREMA 4.4.4. *Il funtore*

$$\tau : \mathbf{Top} \to \mathbf{Loc}$$

*è aggiunto a sinistra del funtore*

$$pt : \mathbf{Loc} \to \mathbf{Top},$$

*ovvero*

$$\tau \dashv pt.$$

DIMOSTRAZIONE. L'unità dell'aggiunzione è definita come segue:

$$\eta : 1_{\mathbf{Top}} \to pt \circ \tau,\ \eta = (\eta_X)_{X \in |\mathbf{Top}|}$$

con $\eta_X \in \mathbf{Top}(X, pt(\tau(X)))$, e

$$\psi \equiv \eta_X : X \to pt(\tau(X)),\ x \longmapsto p_x.$$

$\eta$ è una trasformazione naturale.

Infatti, se $f \in \mathbf{Top}(X, Y)$, il diagramma

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\eta_X} & pt(\tau(X)) \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle pt(\tau(f))} \\ Y & \xrightarrow{\eta_Y} & pt(\tau(Y)) \end{array}$$

è commutativo. Infatti, $\forall x \in X$ risulta

$$pt\big(\tau(f)\big)(\eta_X)(x) = pt\big(\tau(f)\big)(p_x) = p_x \circ (\tau(f))^{op} = p_x \circ f^{\leftarrow}$$

ed

$$\eta_Y(f(x)) = p_{f(x)};$$

inoltre, $\forall B \in \tau(Y)$ si ha

$$f(x) \in B \;\Leftrightarrow\; x \in f^{\leftarrow}(B) \;\Rightarrow\; p_x\big(f^{\leftarrow}(B)\big) = \top = p_{f(x)}(B)$$

$$f(x) \notin B \;\Leftrightarrow\; x \notin f^{\leftarrow}(B) \;\Rightarrow\; p_x\big(f^{\leftarrow}(B)\big) = \bot = p_{f(x)}(B).$$

La counità dell'aggiunzione è definita come segue:

$$\epsilon : \tau \circ pt \to 1_{\mathbf{Loc}}, \;\; \epsilon = (\epsilon_S)_{S \in |\mathbf{Loc}|}$$

con $\epsilon_S \in \mathbf{Loc}\big(\tau\big(pt(S)\big), S\big)$ e

$$\varphi \equiv (\epsilon_S)^{op} : S \to \tau\big(pt(S)\big), \;\; a \longmapsto \varphi(a) = \big\{p \in pt(S) | p(a) = \top\big\}.$$

$\epsilon$ è una trasformazione naturale.

Infatti, se $g \in \mathbf{Loc}(T, S)$, il seguente diagramma

$$\begin{array}{ccc} S & \overset{(\epsilon_S)^{op}}{\longrightarrow} & \tau\big(pt(S)\big) \\ {\scriptstyle g^{op}} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle (\tau(pt(g)))^{op}} \\ T & \overset{(\epsilon_T)^{op}}{\longrightarrow} & \tau(pt(T)) \end{array}$$

è commutativo. Infatti, $\forall a \in S$ si ha

$$\begin{aligned} \big(\tau(pt(g))\big)^{op}\big((\epsilon_S)^{op}(a)\big) &= (pt(g))^{\leftarrow}(\varphi(a)) \\ &= \big\{q \in pt(T) | q \circ g^{op} \in \varphi(a)\big\} \\ &= \big\{q \in pt(T) | q(g^{op}(a)) = \top\big\} \end{aligned}$$

ed

$$(\epsilon_T)^{op}(g^{op}(a)) = \varphi(g^{op}(a)) = \big\{q \in pt(T) | q(g^{op}(a)) = \top\big\}.$$

Si verificano, inoltre, le condizioni

$$\tau\left(pt\big(\tau(X)\big)\right) \overset{(\tau(\eta_X))^{op}}{\longrightarrow} \tau(X) \overset{(\epsilon_{\tau(X)})^{op}}{\longrightarrow} \tau\left(pt\big(\tau(X)\big)\right) = 1_{\tau\left(pt\left(\tau(X)\right)\right)}.$$

Infatti, gli elementi di $\tau\big(pt\big(\tau(X)\big)\big)$ sono del tipo $\varphi(A)$, con $A \in \tau(X)$ e si ha

$$\begin{aligned} (\epsilon_{\tau(X)})^{op}\big((\tau(\eta_X))^{op}(\varphi(A))\big) &= (\epsilon_{\tau(X)})^{op}\big(\eta_X^{\leftarrow}(\varphi(A))\big) \\ &= (\epsilon_{\tau(X)})^{op}\big(\big\{x \in X | p_x(A) = \top\big\}\big) \\ &= (\epsilon_{\tau(X)})^{op}\big(\big\{x \in X | x \in A\big\}\big) \\ &= (\epsilon_{\tau(X)})^{op}(A) = \varphi(A) \\ &= 1_{\tau\left(pt\left(\tau(X)\right)\right)}(\varphi(A)). \end{aligned}$$

$$pt\left(\tau\left(pt(S)\right)\right) \overset{pt(\epsilon_S)}{\longrightarrow} pt(S) \overset{\eta_{pt(S)}}{\longrightarrow} pt\left(\tau\left(pt(S)\right)\right) = 1_{pt(\tau(pt(S)))}.$$

Infatti, i punti di $\tau\big(pt(S)\big)$ sono funzioni $p : \tau\big(pt(S)\big) \to \mathbf{2}$, morfismi di frames e gli aperti di $\tau\big(pt(S)\big)$ sono del tipo $\varphi(a)$, con $a \in S$, quindi si ha

$$\eta_{pt(S)}\big(pt(\epsilon_S)(p)\big)(\varphi(a)) = \eta_{pt(S)}(p \circ \epsilon_S^{op})(\varphi(a)) = p_{p\circ\epsilon_S^{op}}(\varphi(a))$$

$$= \begin{cases} \perp & \text{se } p \circ \epsilon_S^{op} \notin \varphi(a) \\ \top & \text{se } p \circ \epsilon_S^{op} \in \varphi(a) \end{cases} = \begin{cases} \perp & \text{se } p(\epsilon_S^{op}(a)) = \perp \\ \top & \text{se } p(\epsilon_S^{op}(a)) = \top \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \perp & \text{se } p(\varphi(a)) = \perp \\ \top & \text{se } p(\varphi(a)) = \top \end{cases} = p(\varphi(a)) = 1_{pt\left(\tau\left(pt(S)\right)\right)}(\varphi(a)).$$

$\square$

## 4.5. Equivalenza tra Spazi Sobri e Locali Spaziali

DEFINIZIONE 4.5.1. *Sia $X$ uno spazio topologico.*

*Un chiuso irriducibile $F$ è un elemento coprimo nel coframe dei chiusi di $\tau(X)$.*

ESEMPIO 4.5.2. Se $X \in |\mathbf{Top}|$ e $x \in X$, allora $\overline{\{x\}}$ è un chiuso irriducibile in $X$.

Infatti, $\{x\} \subseteq \overline{\{x\}}$, quindi $\overline{\{x\}} \neq \emptyset$; inoltre, se $\overline{\{x\}} \subseteq F \cup F'$, con $F, F'$ chiusi di $X$, allora $\{x\} \subseteq F \cup F' \Rightarrow x \in F$ o $x \in F' \Rightarrow \overline{\{x\}} \subseteq F$ o $\overline{\{x\}} \subseteq F'$.

Sia $X \in |\mathbf{Top}|$. La funzione

$$\psi : X \to pt\big(\tau(X)\big),\ x \longmapsto p_x$$

definita in precedenza non è, in generale, né iniettiva né suriettiva.

In effetti, se si pensa ai punti di $pt\big(\tau(X)\big)$ come ai chiusi irriducibili in $\tau(X)$, complementari degli aperti primi di $\tau(X)$, così che il chiuso irriducibile determinato da $p_x$ è proprio $\overline{\{x\}}$, può capitare che punti $x, y \in X$, con $x \neq y$, abbiano la stessa chiusura, e quindi $p_x = p_y$; inoltre non è detto che un chiuso irriducibile sia la chiusura di qualche suo punto.

Nel primo caso si pensi a $|X| \geq 2$ con la topologia caotica o indiscreta, in cui $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$, $\forall x \neq y \in X$; nel secondo caso si pensi a $|X| \geq \omega$ con la topologia cofinita, in cui $X$ è irriducibile, ma la chiusura di ogni suo punto è il punto stesso.

DEFINIZIONE 4.5.3. *Se $\psi$ è bigettiva, cioè se ogni chiuso irriducibile di $\tau(X)$ è chiusura di uno ed un solo punto $x \in X$, lo spazio $X$ si dice* ***sobrio****.*

In tal caso, $\psi : X \to pt(\tau(X))$, è un omeomorfismo. Infatti, $\psi$ è bigettiva e continua; verifichiamo che è anche aperta: $\forall A \in \tau(X)$ risulta

$$\begin{aligned}\psi^{\to}(A) &= \{\psi(x) | x \in A\}\\ &= \{p_x | x \in A\}\\ &= \{p_x | x \in X, p_x(A) = \top\}\\ &= \{p \in pt(\tau(X)) | p(A) = \top\}\\ &= \varphi(A) \in \tau(pt(\tau(X))).\end{aligned}$$

PROPOSIZIONE 4.5.4.

(1) *Uno spazio topologico $X$ è $T_0$ sse $\psi$ è iniettiva.*
(2) *Uno spazio sobrio è $T_0$.*
(3) *Uno spazio $T_1$ è sobrio sse ogni chiuso irriducibile è un singoletto.*
(4) *Uno spazio $T_2$ è sobrio.*

DIMOSTRAZIONE. (1) Siano $x, y \in X$. Allora

$$\begin{aligned}\psi(x) = \psi(y) &\Leftrightarrow\ p_x = p_y\\ &\Leftrightarrow\ x \in A \textit{ sse } y \in A,\ \forall A \in \tau(X)\\ &\Leftrightarrow\ x, y \text{ hanno gli stessi intorni.}\end{aligned}$$

Quindi dire che $X$ è $T_0$, cioè che non esistono punti distinti con gli stessi intorni, equivale a dire che $\psi$ è iniettiva.

(2) Se $X$ è sobrio allora $\psi$ è bigettiva, quindi iniettiva, perciò $X$ è $T_0$ per la (1).

(3) Sia $X$ uno spazio $T_1$. Se $X$ è sobrio ed $F$ è chiuso irriducibile, allora $F \neq \emptyset$ e si ha $x \in F \Rightarrow F = \overline{\{x\}} = \{x\}$. Viceversa, se ogni chiuso irriducibile è un singoletto, allora ogni chiuso irriducibile è anche chiusura di tale punto e ovviamente solo di tale punto.

(4) E' sufficiente provare che ogni chiuso irriducibile è un singoletto. Se $F$ è un chiuso contenente due punti distinti $x \neq y$ e se $U \in \tau(x)$, $V \in \tau(y)$, $U \cap V = \emptyset$, allora $F \setminus U$ ed $F \setminus V$ sono chiusi non vuoti strettamente contenuti in $F$ e la cui unione è $F$; quindi $F$ è riducibile. □

PROPOSIZIONE 4.5.5. *Se $S$ è un locale sono equivalenti le seguenti condizioni*

(*i*) $\varphi : S \to \mathcal{P}(pt(S))$ *è iniettiva.*
(*ii*) $\varphi : S \to \tau(pt(S))$ *è un isomorfismo di frames.*
(*iii*) $\forall a, b \in S : a \not\leq b \Rightarrow \exists p \in pt(S) : p(a) = \top$ *e* $p(b) = \bot$.

DIMOSTRAZIONE. "(*i*) $\Rightarrow$ (*ii*)" Se $\varphi : S \to \mathcal{P}(pt(S))$ è iniettiva, la sua ridotta è bigettiva ed è ancora un morfismo di frame. La tesi segue allora dalla Proposizione 3.3.8.

"(*ii*) $\Rightarrow$ (*iii*)" Se $\varphi : S \to \tau(pt(S))$ è un isomorfismo di frames e $a, b \in S$

sono tali che $a \nleq b$, allora $\varphi(a) \nleq \varphi(b)$, quindi $\exists p \in pt(S)$ tale che $p(a) = \top$ e $p(b) = \bot$.

"$(iii) \Rightarrow (i)$" Se $a, b \in S$ e $a \neq b$, in particolare $a \nleq b$, allora $\exists p \in pt(S)$ tale che $p(a) = \top$ e $p(b) = \bot$, quindi $\varphi(a) \neq \varphi(b)$. Dunque $\varphi$ è iniettiva.

□

DEFINIZIONE 4.5.6. *Un locale $S$ si dice* ***spaziale*** *se verifica una delle condizioni equivalenti della* Proposizione 4.5.5.

PROPOSIZIONE 4.5.7. *Se $\big(X, \tau(X)\big)$ è uno spazio topologico allora $\tau(X)$ è un locale spaziale.*

DIMOSTRAZIONE. Se $A, B \in \tau(X)$ e $A \nsubseteq B$, sia $a \in A \setminus B$. Il punto $p_a$ verifica allora le condizioni $p_a(A) = \top$ e $p_a(B) = \bot$. □

PROPOSIZIONE 4.5.8. *Se $S$ è un locale, allora lo spazio $pt(S)$ è sobrio.*

DIMOSTRAZIONE. Per ottenere la tesi dobbiamo provare che la funzione

$$\psi : pt(S) \to pt\big(\tau\big(pt(S)\big)\big)$$

è bigettiva.

Suriettività: Se $t \in pt\big(\tau\big(pt(S)\big)\big)$, poniamo $p = t \circ \varphi$ con $\varphi : S \to \tau\big(pt(S)\big)$ morfismo di frame definito in precedenza. Allora $p \in pt(S)$ e si verifica che $\psi(p) = t$. Infatti per ogni aperto $\varphi(a) \in \tau\big(pt(S)\big)$, con $a \in S$, si ha

$$\begin{aligned} \psi(p)\big(\varphi(a)\big) = \top &\Leftrightarrow\ p \in \varphi(a) \\ &\Leftrightarrow p(a) = \top \\ &\Leftrightarrow\ t\big(\varphi(a)\big) = \top. \end{aligned}$$

Iniettività: $\forall p, q \in pt(S)$, $p \neq q$, $\exists a \in S$ tale che $p(a) \neq q(a)$. Se $p(a) = \top$ e $q(a) = \bot$, allora $p \in \varphi(a)$ e $q \notin \varphi(a)$.

Ne segue che $pt(S)$ è uno spazio $T_0$, quindi $\psi$ è iniettiva. □

OSSERVAZIONE 4.5.9. 1. L'assioma di sobrietà è indipendente dall'assioma $T_1$.

Sia $\tau(X)$ la topologia cofinita sull'insieme infinito $X$. $(X, \tau(X))$ è $T_1$ ma non è sobrio; infatti il chiuso $X$ è irriducibile ($X$ è infinito e i chiusi propri sono finiti) e non è un singoletto.

Sia $\tau(Y)$ la topologia del punto particolare $y \in Y$ su $Y$ con almeno due punti. $\big(pt(\tau(Y)), \tau\big(pt(\tau(Y))\big)\big)$ è sobrio, per la Proposizione 4.5.8 ma non è $T_1$; infatti, se $\varphi(A)$, con $A \in \tau(Y)$ è un qualsiasi aperto non banale in $pt\big(\tau(Y)\big)$, il punto $\psi(y) = p_y : \tau(Y) \to \mathit{2}$ tale che $p_y(B) = \top$ sse $y \in B$ appartiene a $\varphi(A)$: infatti, $\psi(y) \in \varphi(A) \Leftrightarrow \psi(y)(A) = \top \Leftrightarrow y \in A$ che è certamente vero.

2. Dalla Proposizione 4.5.8 segue che se $X \in |\mathbf{Top}|$, allora lo spazio $pt\big(\tau(X)\big)$ è sobrio e si dice *soberificazione* di $X$.

PROPOSIZIONE 4.5.10. *L'aggiunzione*

$$\tau \dashv pt$$

*diventa una equivalenza se si restringe alle sottocategorie piene degli spazi topologici sobri,* **Sob** $\subseteq$ **Top**, *e dei locali spaziali* **SpatLoc** $\subseteq$ **Loc**.

DIMOSTRAZIONE. Con riferimento alla dimostrazione del Teorema 4.4.4 osserviamo innanzitutto che $\tau$, ristretto alla categoria **Sob**, ha immagine nella categoria **SpatLoc** per la Proposizione 4.5.7 ed il funtore $pt$, ristretto alla categoria **SpatLoc**, ha immagine nella categoria **Sob** per la Proposizione 4.5.8. L'aggiunzione $\tau \dashv pt$ rimane valida per i funtori considerati tra **Sob** e **SpatLoc**. Inoltre, l'unità dell'aggiunzione in tal caso è un isomorfismo naturale perchè per ogni spazio sobrio $X$ la funzione $\psi : X \to pt\big(\tau(X)\big)$ definita in precedenza, è un isomorfismo. Analogamente, per ogni locale spaziale la funzione $\varphi : S \to \tau\big(pt(S)\big)$ è un isomorfismo, quindi anche la counità dell'aggiunzione è un isomorfismo naturale.

□

CAPITOLO 5

# Teoremi di Rappresentazione di Reticoli

## 5.1. I Teorema di Rappresentazione di Stone

PROPOSIZIONE 5.1.1. *Sia $(L, \leq)$ un reticolo e siano:*
$\big(Idl(L), \leq\ \big)$ *l'insieme degli ideali in L ordinato rispetto all'inclusione*

$$I \leq J \ \Leftrightarrow\ I \subseteq J.$$

$\big(Flt(L), \leq\ \big)$ *l'insieme dei filtri in L con la relazione*

$$F \leq G \ \Leftrightarrow\ G \subseteq F.$$

*Allora* $\big(Idl(L), \leq\ \big)$ *e* $\big(Flt(L), \leq\ \big)$ *sono reticoli completi.*

DIMOSTRAZIONE. Se $\mathcal{S} \subseteq Idl(L)$, allora $\bigcap \mathcal{S} \subseteq L$ è un ideale. Infatti, ovviamente, valgono le proprietà $(i)$ e $(ii)$ degli ideali. Tale ideale si indica anche con $\bigwedge \mathcal{S} = \bigcap \mathcal{S}$. Quindi $Idl(L)$ è un $\bigwedge$-sottosemireticolo completo di $\mathcal{P}(L)$; di conseguenza $\big(Idl(L), \leq\ \big)$ è un reticolo completo.

L'asserzione per i filtri $\big(Flt(L), \leq\ \big)$ si prova dualmente. Si noti, però che se $\mathcal{F} \subseteq Flt(L)$ si ha $\bigvee \mathcal{F} = \bigcap \mathcal{F}$. □

Osserviamo che per $\mathcal{S} \subseteq Idl(L)$ si ha $\bigvee \mathcal{S} = \left\langle \bigcup \mathcal{S} \right\rangle$ e se $\mathcal{F} \subseteq Flt(L)$ si ha $\bigwedge \mathcal{F} =< \bigcup \mathcal{F} >$.

Inoltre per ogni $I \in Idl(L)$ si ha $I = \bigvee \big\{ \downarrow a | a \in I \big\}$.

PROPOSIZIONE 5.1.2. *Se $(L, \leq)$ è un reticolo distributivo allora il reticolo* $\big(Idl(L), \leq\ \big)$ *è un frame,* $\big(Flt(L), \leq\ \big)$ *è un coframe.*

DIMOSTRAZIONE. Per la proposizione 5.1.1 basta verificare la (**ILD**$\infty$) per $\big(Idl(L), \leq\ \big)$ e la (**IILD**$\infty$) per $\big(Flt(L), \leq\ \big)$.

Siano $I \in Idl(L)$ ed $\mathcal{S} \subseteq Idl(L)$. E' evidente che

$$\begin{aligned}\bigvee \{I \wedge J | J \in \mathcal{S}\} &= \left\langle \bigcup \{I \cap J | J \in \mathcal{S}\} \right\rangle \\ &= \left\langle I \cap \left(\bigcup \mathcal{S}\right) \right\rangle \\ &\leq I \wedge \left(\bigvee \mathcal{S}\right).\end{aligned}$$

Viceversa, $\forall a \neq \perp$ si ha $a \in I \wedge (\bigvee \mathcal{S}) \Leftrightarrow a \in I$ e $\exists X = \{x_1, \cdots, x_n\} \subseteq \bigcup \mathcal{S}$ tale che $a \leq \bigvee X$. Sia $x_i \in J_i$, con $J_i \in \mathcal{S}$, $\forall i = 1, \cdots, n$; allora $a \wedge x_i \in I \wedge J_i$, $\forall i = 1, \cdots, n$ e $a = a \wedge (\bigvee X) = (a \wedge x_i) \vee \cdots \vee (a \wedge x_n) \in \vee\{I \wedge J_i | i = 1, \cdots, n\} \subseteq \bigvee\{I \wedge J | J \in \mathcal{S}\}$.

Dualmente si prova la (**IILD**$\infty$) per $(Flt(L), \leq)$.

□

LEMMA 5.1.3. *Se $L$ è un reticolo completo ed $a \in L$, allora sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

(*i*) *$\forall S \subseteq L$, con $a \leq \bigvee S$, esiste $F \subseteq S$, $F$ finito, tale che $a \leq \bigvee F$.*

(*ii*) *$\forall S \subseteq L$, $S$ sottoinsieme diretto, con $a \leq \bigvee S$, esiste $s \in S$ tale che $a \leq s$.*

(*iii*) *$\forall I \subseteq L$, $I$ ideale, con $a \leq \bigvee I$, risulta $a \in I$.*

DIMOSTRAZIONE. "(*i*) $\Rightarrow$ (*ii*)" Sia $S \subseteq L$ un sottoinsieme diretto con $a \leq \bigvee S$. Allora per (*i*) $\exists F \subseteq S$, $F$ finito, tale che $a \leq \bigvee F$. Poiché $S$ è diretto esiste $s \in S$, maggiorante per $F$, quindi $a \leq \bigvee F \leq s$.

"(*ii*) $\Rightarrow$ (*iii*)" Sia $I$ un ideale con $a \leq \bigvee I$. Poiché $I$ è diretto, esiste, per (*ii*), $s \in I$ tale che $a \leq s$, quindi $a \in I$.

"(*iii*) $\Rightarrow$ (*i*)" Sia $S \subseteq L$ con $a \leq \bigvee S$ e sia $I =< S >$. Chiaramente $a \leq \bigvee S \leq \bigvee I$, quindi, per (*iii*), $a \in I$ da cui si deduce, ricordando come si costruisce $< S >$, che $\exists F \subseteq S$, $F$ finito tale che $a \leq \bigvee F$. □

DEFINIZIONE 5.1.4. *Se $L$ è un reticolo completo, un elemento $a \in L$ si dice **finito** (in $L$) se soddisfa una delle condizioni equivalenti del* Lemma 5.1.3.

Poniamo

$$K(L) = \{a \in L | a \text{ finito}\}.$$

COROLLARIO 5.1.5. *Se $L$ è un frame ed $a \in L$, allora*

$$a \text{ è finito} \Leftrightarrow \forall S \subseteq L, \text{ tale che } \bigvee S = a \; \exists F \subseteq S \; F \text{ finito tale che } \bigvee F = a.$$

DIMOSTRAZIONE. "$\Rightarrow$" Se $S \subseteq L$ è tale che $\bigvee S = a$, allora poiché $a$ è finito, $\exists F \subseteq S$, $F$ finito, tale che $a \leq \bigvee F \leq \bigvee S = a$, ovvero $\bigvee F = a$.

"$\Leftarrow$" Se $S \subseteq L$ è tale che $a \leq \bigvee S$, sia

$$A = \{a \wedge s | s \in S\},$$

allora $A \subseteq S$ e

$$\bigvee A = \bigvee \{a \wedge s | s \in S\} = a \wedge \Big(\bigvee S\Big) = a.$$

Dall'ipotesi segue che $\exists F = \{a \wedge s_1, \cdots, a \wedge s_n\} \subseteq A$ tale che $\bigvee F = a$ e quindi considerato $F' = \{s_1, \cdots, s_n\} \subseteq S$ si ha $a = \bigvee F \leq \bigvee F'$. □

ESEMPIO 5.1.6. Siano $X \in |\mathbf{Set}|$, $V \in |\mathbf{Vec}|$, $T \in |\mathbf{Top}|$ e consideriamo i reticoli $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$, $(\tau(T), \subseteq)$ e $(\mathcal{S}(V), \subseteq)$ costituiti dai sottoinsiemi di $X$, dagli aperti di $T$ e dai sottospazi di $V$, rispettivamente.

Gli elementi finiti in $\mathcal{P}(X)$ sono gli insiemi di cardinalità finita, in $\tau(T)$ sono gli aperti compatti, in $\mathcal{S}(V)$ sono i sottospazi di dimensione finita. Le verifiche sono banali nei primi due casi. Nel terzo caso consideriamo un sottospazio $U$ di dimensione finita e sia $U \leq \bigvee \mathcal{U}$, con $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{S}(V)$, dove chiaramente $\bigvee \mathcal{U} = L(\bigcup \mathcal{U})$ è il sottospazio generato da $\bigcup \mathcal{U}$. Consideriamo la funzione $\beta : \mathcal{U} \to \mathcal{P}(V)$ che ad ogni $U' \in \mathcal{U}$ associa una base $\beta(U')$ di $U'$. Chiaramente $\bigvee \mathcal{U} = L(\bigcup \beta^{\to}(\mathcal{U}))$. Sia, ora, $\beta(U) = \{x_1, \cdots, x_n\}$ una base di $U$. $\forall 1 \leq i \leq n$, sia $\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{U}$, $\mathcal{F}_i$ finito, tale che $x_i \in L(\bigcup \{\beta(U') | U' \in \mathcal{F}_i\})$, allora $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{U}$ è finito e, chiaramente, $U = L(\{x_1, \cdots, x_n\}) \subseteq L(\bigcup \mathcal{F}) = \bigvee \mathcal{F}$.

Viceversa sia $U \in \mathcal{S}(V)$ finito in $\mathcal{S}(V)$ e sia $B \subseteq U$ una sua base. Poniamo, per ogni $b \in B$, $U_b = L(\{b\})$. Chiaramente $U = L(B) = \bigvee \{U_b | b \in B\}$ quindi, per ipotesi, $\exists \{U_{b_1}, \cdots, U_{b_m}\}$ con $b_i \in B$, $\forall 1 \leq i \leq m$, tale che $U \leq \bigvee \{U_{b_1}, \cdots, U_{b_m}\}$ per cui $dim U \leq m$.

LEMMA 5.1.7. *Se $L$ è un reticolo completo allora $K(L)$ è un $\vee$-sottosemireticolo.*

DIMOSTRAZIONE. Poiché $\perp = \bigvee \emptyset$, allora da 5.1.3 $(i)$ segue che $\perp \in K(L)$. Se $a, b \in K(L)$ ed $S \subseteq L$ tale che $a \vee b \leq \bigvee S$, allora $a \leq \bigvee S$ e $b \leq \bigvee S$, quindi $\exists F, G \subseteq S$, $F, G$ finiti, tali che $a \leq \bigvee F$ e $b \leq \bigvee G$, da cui segue che $a \vee b \leq \bigvee (F \cup G)$ ovvero $a \vee b \in K(L)$. □

DEFINIZIONE 5.1.8. *Un locale $S$ si dice **coerente** se*

(1) *Gli elementi finiti di $S$ formano un sottoreticolo $K(S)$.*
(2) *$K(S)$ genera tramite $\bigvee$ tutto $S$, cioè $\forall a \in S\ \exists A \subseteq K(S)$ tale che $a = \bigvee A$.*

Osserviamo che per verificare la condizione *1.* basta provare che $K(S)$ è chiuso per $\wedge$ grazie al Lemma 5.1.7.

LEMMA 5.1.9. *Se $L$ è un reticolo distributivo, gli elementi finiti del locale $Idl(L)$ sono gli ideali principali in $L$. In simboli*

$$K(Idl(L)) = \{ \downarrow a | a \in L \}.$$

DIMOSTRAZIONE. Se $B \in Idl(L)$ e $B = \downarrow b \leq \bigvee \mathcal{S}$, con $b \in L$ e $\mathcal{S} \subseteq Idl(L)$, allora $b \in \bigvee \mathcal{S} = < \bigcup \mathcal{S} >$, quindi $\exists I_1, \cdots, I_n \in \mathcal{S}$ ed $\exists a_1 \in I_1, \cdots, a_n \in I_n$ tali che $b \leq a_1 \vee \cdots \vee a_n$. Ne segue che $b \in I_1 \vee \cdots \vee I_n$ quindi $B \leq I_1 \vee \cdots \vee I_n$ è finito in $Idl(L)$.

Viceversa, sia $I \in Idl(L)$ un elemento finito in $Idl(L)$. Poiché $I = \bigvee \{\downarrow a | a \in I\}$ ed $I$ è finito, $\exists a_1, \cdots, a_n \in I$ tale che $I = \downarrow a_1 \vee \cdots \vee \downarrow a_n$.

Chiaramente $\bigvee \{a_1, \cdots, a_n\} = \bigvee (\downarrow a_1 \vee \cdots \vee \downarrow a_n) = \bigvee I \in I$ è un massimo per $I$ e quindi $I$ è un ideale principale. □

PROPOSIZIONE 5.1.10. *Sia* $S \in |\mathbf{Loc}|$.

$S$ *è coerente* $\Leftrightarrow \exists L \in |\mathbf{DLat}|$ *ed* $\exists \varphi : S \to Idl(L)$ *isomorfismo di frame.*

DIMOSTRAZIONE. "$\Rightarrow$" Sia $S$ un locale coerente. Poiché $S$ è coerente $K(S)$ è un sottoreticolo di $S$ ed essendo $S$ un locale, $K(S)$ è distributivo. Per la Proposizione 5.1.2 $Idl\big(K(S)\big)$ è un locale.

Sia

$$\varphi : S \to Idl\big(K(S)\big)$$

$$a \longmapsto \varphi(a) = \big\{k \in K(S) | k \leq a\big\}.$$

Evidentemente $\varphi(a)$ è un lower set e, per il Lemma 5.1.7, è chiuso per $\vee$, quindi è un ideale di $K(S)$.

Se $I \in Idl\big(K(S)\big)$, allora $I$ è un sottoinsieme diretto di $S$ e quindi posto $a = \bigvee I$ si ha

$$k \in K(S) \text{ e } k \leq a \Leftrightarrow \exists b \in I \text{ tale che } k \leq b \Leftrightarrow k \in I.$$

Pertanto $\varphi(a) = I$, ovvero $\varphi$ è suriettiva.

Considerata l'applicazione

$$\varphi' : Idl\big(K(S)\big) \to S$$

$$I \longmapsto \varphi'(I) = \bigvee I$$

dalla condizione (2) della Definizione 5.1.8 segue che $\varphi'(\varphi(a)) = \bigvee \varphi(a) = \bigvee \big\{k \in K(S) | k \leq a\big\} = a$, $\forall a \in A$, ovvero l'applicazione $\varphi'$ è inversa a sinistra di $\varphi$, la quale pertanto è iniettiva, quindi bigettiva.

Inoltre, $\varphi$ è chiaramente isotona, quindi è un isomorfismo di frame.

"$\Leftarrow$" Sia $L$ un reticolo distributivo.

Poiché per ogni ideale $I$ in $L$ si ha $I = \bigvee \big\{ \downarrow a | a \in I\big\}$, dal Lemma 5.1.9 segue che $K\big(Idl(L)\big)$ genera $Idl(L)$ tramite $\bigvee$.

Inoltre, $K\big(Idl(L)\big)$ è chiuso per $\wedge$, infatti l'ideale $L = \downarrow \top$ è chiaramente finito e dati $I$ e $J$ finiti, $I = \downarrow a$, $J = \downarrow b$, si ha evidentemente $I \wedge J = \downarrow (a \wedge b) \in K\big(Idl(L)\big)$.

Quindi $Idl(L)$ è coerente ed essendo $\varphi$ un isomorfismo, anche $S$ è coerente. □

DEFINIZIONE 5.1.11. *Indichiamo con* **CohLoc** *la categoria avente come oggetti i locali coerenti e come morfismi* $f \in \mathbf{CohLoc}(S,T)$ *i morfismi in* $\mathbf{Loc}(S,T)$, *tali che* $f^{op} : T \to S$ *porta elementi finiti di* $T$ *in elementi finiti di* $S$, *ovvero*

$$(f^{op})^{\to}\big(K(T)\big) \subseteq K(S).$$

*Tali morfismi si dicono* ***coerenti***.

ESEMPIO 5.1.12. E' evidente che non tutti i morfismi di frame determinano morfismi coerenti. Infatti, notiamo che per ogni $X \in |\mathbf{Set}|$, $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ è un locale coerente e per ogni funzione $f : X \to Y$ l'operatore powerset inverso $f^{\leftarrow} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ è un morfismo di frame (anzi, di reticoli completi) ma non è necessariamente coerente. Se infatti $X$ è un insieme infinito ed $f$ è una funzione di valore costante $y \in Y$, allora ogni sottoinsieme finito $F \subseteq Y$, elemento finito di $\mathcal{P}(Y)$, contenente $y$ ha come immagine $f^{\leftarrow}(F) = X$ che non è finito.

Se però $\varphi \in \mathbf{Loc}(S,T)$ è un isomorfismo, allora gli elementi finiti di $S$ sono tutte e sole le immagini tramite $f^{op}$ degli elementi finiti di $T$,

$$(\varphi^{op})^{\rightarrow}\big(K(T)\big) = K(S),$$

come si verifica facilmente. Si ha quindi in tal caso che $S$ è coerente se e solo se lo è $T$.

PROPOSIZIONE 5.1.13. $\mathbf{DLat}$ *è duale di* $\mathbf{CohLoc}$.

DIMOSTRAZIONE. Un'equivalenza $\Psi$ tra $\mathbf{DLat}$ e $\mathbf{CohLoc}^{op}$ si ottiene nel modo seguente. Associamo ad ogni locale coerente $S$ il reticolo distributivo $\Psi(S) = K(S)$. Come si è visto nella dimostrazione della Proposizione 5.1.10, $S$ è isomorfo a $Idl(K(S))$.

Per ogni morfismo $f \in \mathbf{CohLoc}(T,S)$ la restrizione

$$\Psi(f^{op}) : K(S) \to K(T)$$

è un morfismo di reticoli distributivi.

E' evidente che

$$\Psi : \mathbf{CohLoc}^{op} \to \mathbf{DLat}$$

è un funtore. Inoltre, si prova che è fedele, pieno e denso.

$\Psi$ è fedele, infatti siano $f, g \in \mathbf{CohLoc}(T,S)$ tali che $\Psi(f^{op}) = \Psi(g^{op})$. $\forall a \in S\ \exists A \subseteq K(S)$ tale che $a = \bigvee A$ e poiché $f^{op}$ è un morfismo di frame $f^{op}(a) = f^{op}\left(\bigvee A\right) = \bigvee\big\{f^{op}(x) | x \in A\big\} = \bigvee\big\{g^{op}(x) | x \in A\big\} = g^{op}\left(\bigvee A\right) = g^{op}(a)$.

$\Psi$ è pieno, infatti ogni morfismo di reticoli $h : K(S) \to K(T)$ si estende a un morfismo di frame $\overline{h} : S \to T$ che determina un morfismo di $\mathbf{CohLoc}$ e la cui restrizione $\Psi(\overline{h}) = h$. Basta infatti porre $\forall x \in S$, $x = \bigvee A$ con $A \subseteq K(S)$, $\overline{h}(x) = \bigvee h^{\rightarrow}(A)$.

Infine, $\Psi$ è denso, infatti $\forall L \in \mathbf{DLat}$ sia $Idl(L)$ il locale coerente dei suoi ideali. Per il Lemma 5.1.9 $K\big(Idl(L)\big) = \big\{\downarrow a | a \in L\big\}$ che è chiaramente isomorfo ad $L$.

Per il Teorema 1.8.7 $\Psi$ è un'equivalenza. □

DEFINIZIONE 5.1.14. *Uno spazio topologico* $\big(X, \tau(X)\big)$ *si dice* ***coerente*** *se è sobrio e se la sua topologia* $\tau(X)$ *è un locale coerente.*

*Una funzione continua fra due spazi coerenti $f : X \to Y$ si dice* ***coerente*** *se la restrizione del suo operatore powerset inverso*

$$f^{\leftarrow} : \tau(Y) \to \tau(X)$$

*è un morfismo coerente.*

Indichiamo con **CohTop** la categoria concreta i cui oggetti sono gli spazi coerenti ed i cui morfismi sono le funzioni coerenti.

OSSERVAZIONE 5.1.15. E' evidente che, per ogni spazio topologico $X$, $\tau(X)$ è un locale coerente sse la famiglia dei sottoinsiemi compatti aperti di $X$, $KO(X)$ è chiusa per intersezioni (oltre che, ovviamente, per unioni) finite e forma una base per la topologia $\tau(X)$. In particolare $\big(X, \tau(X)\big)$ deve essere compatto.

Una funzione continua è coerente sse l'immagine reciproca di ogni compatto è un compatto.

PROPOSIZIONE 5.1.16. *Sia $L$ un qualsiasi reticolo. Gli elementi primi del locale $Idl(L)$ sono esattamente gli ideali primi in $L$.*

DIMOSTRAZIONE. Se $I$ è un elemento primo di $Idl(L)$, allora $I \neq L$, quindi $\top \notin I$. Si ha inoltre $a \wedge b \in I \Rightarrow \downarrow a \subseteq I$ e $\downarrow b \subseteq I \Rightarrow \downarrow a \wedge \downarrow b \leq I$ $\Rightarrow \downarrow a \leq I$ o $\downarrow b \leq I \Rightarrow a \in I$ o $b \in I$.

Viceversa, se $I$ è un ideale primo, allora $\top \notin I \Rightarrow L \neq I$.

Siano $J, K \in Idl(L)$, tali che $J \cap K \leq I$. Se $J \nsubseteq I$, allora esiste $b \in J \setminus I$; si ha allora $\forall c \in K$, $b \wedge c \in J \cap K \subseteq I$ e poiché $I$ è un ideale primo e $b \notin I$, allora $c \in I$, ovvero $K \subseteq I$. Pertanto, $I$ è un elemento primo di $Idl(L)$.

□

TEOREMA 5.1.17. *Ogni locale coerente è spaziale.*

DIMOSTRAZIONE. Se $S \in |\mathbf{CohLoc}|$, per la Proposizione 5.1.10 $\exists L \in |\mathbf{DLat}|$ tale che $S \cong Idl(L)$. Proviamo quindi che $Idl(L)$ è spaziale.

Siano $I \nleq J$ due ideali di $L$ e sia $a \in I \setminus J$. Evidentemente $J \cap \uparrow a = \emptyset$. Se $J'$ è l'ideale massimale tra quelli che non intersecano il filtro $\uparrow a$ (si veda la Proposizione 4.2.19) allora $J'$ è primo per la Proposizione 4.2.20 quindi è un elemento primo in $Idl(L)$ per la Proposizione 5.1.16 e determina un punto $p \in pt\big(Idl(L)\big)$ che vale $\perp$ sugli ideali inclusi in $J'$, $\top$ sugli altri. Ora, è evidente che $J \leq J'$ mentre da $a \notin J'$ segue che $I \nleq J'$, cioè $p(J) = \perp$, $p(I) = \top$. La tesi segue dalla Proposizione 4.5.5. □

PROPOSIZIONE 5.1.18. *Le categorie* **CohLoc** *e* **CohTop** *sono equivalenti.*

DIMOSTRAZIONE. Le equivalenze fra **SpatLoc** e **Sob** considerate nella Proposizione 4.5.10 si restringono alle sottocategorie ora considerate; infatti, è chiaro che per ogni spazio coerente $X$, $\tau(X)$ è un locale coerente.

Viceversa, per ogni locale coerente $S$, si ha che $\big(pt(S), \tau\big(pt(S)\big)\big)$ è sobrio; inoltre, osservato che $S$ è spaziale, si ha che $\varphi : S \to \tau\big(pt(S)\big)$ è un isomorfismo di frame quindi anche $\tau\big(pt(S)\big)$ è coerente.

E' chiaro poi che tali restrizioni dei funtori $\tau$ e $pt$ sono delle equivalenze poiché già lo sono tra le categorie **SpatLoc** e **Sob**.

□

TEOREMA 5.1.19 (I Teorema di Rappresentazione di Stone). *La categoria* **DLat** *è duale della categoria* **CohTop**.

DIMOSTRAZIONE. E' ovvia conseguenza di 5.1.13 e 5.1.18.

□

## 5.2. II Teorema di Rappresentazione di Stone

La dualità, descritta nel I Teorema di Rappresentazione di Stone, tra **DLat** e **CohTop**, può essere ristretta alla sottocategoria piena **Bool** di **DLat** e ad un'opportuna sottocategoria piena di **CohTop** costituita da particolari spazi topologici che vengono comunemente chiamati spazi di Stone.

Prima di descrivere tali spazi e stabilirne il collegamento con le algebre di Boole è utile riconsiderare e descrivere esplicitamente l'equivalenza, implicitamente ricavata, tra $\mathbf{DLat}^{op}$ e **CohTop**; in particolare sarà utile tenere presente la corrispondenza fra le classi degli oggetti di tali categorie.

A uno spazio coerente $\big(X, \tau(X)\big)$ la dualità di Stone associa il reticolo distributivo $K(\tau(X))$ e ad $f \in \mathbf{CohTop}(X, Y)$, associa il morfismo di reticoli $f^{\leftarrow} \in \mathbf{DLat}\big(K(\tau(Y)), K(\tau(X))\big)$ ottenuto tramite restrizione del morfismo di locali coerenti $f^{\leftarrow} : \tau(Y) \to \tau(X)$.

Viceversa, ad un reticolo distributivo $L$ si associa lo spazio coerente

$$\Big(pt\big(Idl(L)\big), \tau\big(pt(Idl(L))\big)\Big)$$

e ad un morfismo $h \in \mathbf{DLat}^{op}(M, L)$ si associa $pt(h^{op})$.

DEFINIZIONE 5.2.1. *Lo spazio coerente*

$$spec(L) = pt\big(Idl(L)\big)$$

*si dice* ***spettro*** *di $L$.*

I punti di tale spazio sono determinati dagli ideali principali primi di $Idl(L)$ quindi dagli elementi primi di $Idl(L)$ che, come si è visto, sono esattamente gli ideali primi di $L$. Più esplicitamente, i punti dello spettro sono i morfismi di frame

$$spec(L) = \big\{p_I | I \text{ ideale primo di } L\big\}$$

con

$$p_I : Idl(L) \to \mathbf{2}$$
$$J \longmapsto p_I(J) = \begin{cases} \perp & \text{se } J \leq I \\ \top & \text{se } J \nleq I. \end{cases}$$

L'insieme degli aperti è

$$\tau\big(spec(L)\big) = \big\{\varphi(J) | J \in Idl(L)\big\}$$

con

$$\varphi(J) = \big\{p_I \in pt\big(Idl(L)\big) | I \text{ ideale primo e } J \nleq I\big\}$$

In termini equivalenti lo spettro di $L$ può essere descritto con riferimento ai filtri coprimi di $L$ che, per la Proposizione 4.2.10, sono esattamente i complementari in $L$ dei filtri primi di $L$.

In effetti si ha che

$$spec(L) = \big\{q_F | F \text{ filtro coprimo di } L\big\}$$

con

$$q_F : Idl(L) \to \mathbf{2}$$
$$J \longmapsto q_F(J) = \begin{cases} \perp & \text{se } J \cap F = \emptyset \\ \top & \text{se } J \cap F \neq \emptyset \end{cases}$$

e

$$\tau\big(spec(L)\big) = \big\{A_J | J \in Idl(L)\big\}$$

con

$$A_J = \big\{q_F \in pt\big(Idl(L)\big) | F \text{ filtro coprimo e } F \cap J \neq \emptyset\big\}.$$

Utilizziamo queste ultime notazioni per dimostrare i seguenti risultati.

LEMMA 5.2.2. *Sia $L$ un reticolo distributivo. Allora*

$$K\Big(\tau\big(spec(L)\big)\Big) \cong L.$$

DIMOSTRAZIONE. Intanto osserviamo che $Idl(L) \cong \tau\big(spec(L)\big)$ poiché la corrispondenza $J \longmapsto A_J$ è un isomorfismo in quanto è chiaramente bigettiva e conserva $\bigvee$; infatti, $\forall \mathcal{S} \subseteq Idl(L)$ si ha $A_{\bigvee \mathcal{S}} = \bigcup \big\{A_J | J \in \mathcal{S}\big\}$. Una inclusione è banale e per l'altra abbiamo

$$q_F \in A_{\bigvee \mathcal{S}}, \text{ con } F \text{ filtro coprimo } \Rightarrow F \cap \Big(\bigvee \mathcal{S}\Big) \neq \emptyset$$
$$\Rightarrow \exists b \in F, \exists a_1 \in J_1 \in \mathcal{S}, \cdots, \exists a_n \in J_n \in \mathcal{S} \text{ tali che } b \leq a_1 \vee \cdots \vee a_n$$
$$\Rightarrow b \in F \text{ e } b = b \wedge (a_1 \vee \cdots \vee a_n) = (b \wedge a_1) \vee \cdots \vee (b \wedge a_n) \in F$$
$$\Rightarrow b \in F \text{ e } \exists 1 \leq i \leq n \text{ tale che } b \wedge a_i \in F \Rightarrow b \wedge a_i \in F \cap J_i$$
$$\Rightarrow q_F \in A_{J_i} \subseteq \bigcup \big\{A_J | J \in \mathcal{S}\big\}.$$

Tenendo anche conto del Lemma 5.1.9 si ha

$$K\Big(\tau\big(spec(L)\big)\Big) \cong K\big(Idl(L)\big) \cong L.$$

□

PROPOSIZIONE 5.2.3. *Sia $L$ un reticolo distributivo. Si ha allora l'equivalenza*

$$spec(L) \text{ è } T_2 \Leftrightarrow L \text{ è algebra di Boole.}$$

DIMOSTRAZIONE. "$\Rightarrow$" $spec(L)$, essendo coerente, è compatto. Se esso è anche $T_2$ si ha

$$\begin{aligned} K(\tau(spec(L))) &= \{A \subseteq spec(L) | A \text{ aperto e compatto}\} \\ &= \{A \subseteq spec(L) | A \text{ aperto e chiuso}\} \end{aligned}$$

e tale insieme, ordinato per inclusione, è chiaramente un'algebra di Boole quindi, per il Lemma 5.2.2, $L$ è un'algebra di Boole.

Viceversa, sia $L$ un'algebra di Boole e siano $q_F \neq q_G$ due punti di $spec(L)$. Allora $F$ e $G$ sono filtri coprimi distinti in $L$.

Se $a \in F \setminus G$, allora per la Proposizione 4.2.26 $\neg a \in G \setminus F$. Considerati gli aperti $U = A_{(\downarrow a)}$ e $U' = A_{(\downarrow(\neg a))}$ si ha

$$a \in F \cap \downarrow a \;\Rightarrow\; F \cap \downarrow a \neq \emptyset \;\Rightarrow\; q_F \in U$$

$$\neg a \in G \cap \downarrow (\neg a) \;\Rightarrow\; G \cap \downarrow (\neg a) \neq \emptyset \;\Rightarrow\; q_G \in U'$$

ed inoltre $U \cap U' = \emptyset$, altrimenti si avrebbe

$$\begin{aligned} \exists H \text{ filtro coprimo con } q_H \in U \cap U' &\Rightarrow H \cap \downarrow a \neq \emptyset \neq H \cap \downarrow (\neg a) \\ &\Rightarrow \exists h, k \in H,\ h \leq a,\ k \leq \neg a \\ &\Rightarrow h \wedge k \leq a \wedge \neg a = \perp \text{ e } h \wedge k \in H \\ &\Rightarrow \perp \in H \end{aligned}$$

e questo è assurdo essendo $H$ coprimo. □

Richiamiamo ora alcune nozioni di topologia generale, utili per introdurre e caratterizzare gli spazi di Stone.

PROPOSIZIONE 5.2.4. *Sia $(X, \tau)$ uno spazio topologico .*

(1) *$(X, \tau)$ $T_2$ e $K \subseteq X$ compatto $\Rightarrow$ $K$ chiuso.*
(2) *$(X, \tau)$ compatto e $H \subseteq X$ chiuso $\Rightarrow$ $H$ compatto.*

DIMOSTRAZIONE. (1) Sia $y \in X \setminus K$. $\forall x \in K$ siano $U_x \in \tau(y)$, $V_x \in \tau(x)$ aperti disgiunti $U_x \cap V_x = \emptyset$. $\{V_x | x \in K\}$ è chiaramente un ricoprimento aperto di $K$ e quindi ammette un sottoricoprimento finito $\{V_{x_1}, \cdots, V_{x_n}\}$. Evidentemente si ha $U = U_{x_1} \cap \cdots \cap U_{x_n} \in \tau(y)$ e $U \cap K \subseteq U \cap (V_{x_1} \cap \cdots \cap V_{x_n}) = (U \cap V_{x_1}) \cup \cdots \cup (U \cap V_{x_n}) \subseteq (U_{x_1} \cap V_{x_1}) \cup \cdots \cup (U_{x_n} \cap V_{x_n}) = \emptyset$. $X \setminus K$ è quindi intorno di $y$ e, per l'arbitrarietà di $y$, è un aperto.

(2) Sia $\mathcal{A} = \{A_i | i \in I\}$ un qualsiasi ricoprimento aperto di $H$. Allora $\mathcal{A} \cup \{X \setminus H\}$ è un ricoprimento aperto di $X$. Sia $\mathcal{A}'$ un sottoricoprimento finito e sia $\mathcal{A}' \cap \mathcal{A} = \{A_1, \cdots, A_m\}$. Chiaramente $A_1 \cup \cdots \cup A_m = ((X \setminus H) \cap H) \cup (A_1 \cup \cdots \cup A_m) = ((X \setminus H) \cup A_1 \cup \cdots \cup A_m) \cap (H \cup A_1 \cup \cdots \cup A_m) =$

$H \cup (A_1 \cup \cdots \cup A_m) \Rightarrow H \subseteq A_1 \cup \cdots \cup A_m$ cioè $\mathcal{A}' \cap \mathcal{A}$ è un sottoricoprimento finito di $\mathcal{A}$ e pertanto $H$ è compatto. $\square$

COROLLARIO 5.2.5. *Sia $(X, \tau)$ uno spazio compatto e $T_2$. $\forall P \subseteq X$ si ha*

$$P \text{ chiuso } \Leftrightarrow P \text{ compatto.}$$

DIMOSTRAZIONE. Segue banalmente dalla proposizione precedente. $\square$

DEFINIZIONE 5.2.6. *Sia $X$ uno spazio topologico.*

*$X$ si dice* ***totalmente sconnesso*** *se gli unici connessi sono i singoletti.*

*$X$ si dice* ***totalmente separato*** *se $\forall x \neq y\ \exists U \subseteq X$, $U$ clopen, tale che $x \in U$ e $y \notin U$.*

*$X$ si dice* ***zero dimensionale*** *se i clopen formano una base di $\tau(X)$.*

PROPOSIZIONE 5.2.7.

(1) *Uno spazio totalmente sconnesso è $T_1$.*
(2) *Uno spazio totalmente separato è $T_2$ e totalmente sconnesso.*
(3) *Uno spazio zero dimensionale e $T_0$ è regolare e totalmente separato.*

DIMOSTRAZIONE. (1) Poiché ogni componente connessa è un chiuso, i singoletti, ovvero le componenti connesse di uno spazio topologico totalmente sconnesso, sono chiusi.

(2) Siano $a \neq b$ due punti distinti dello spazio $X$ e sia $A \subseteq X$ un clopen tale che $a \in A$ e $b \notin A$. Sia $B = X \setminus A$. $B$ è intorno aperto di $b$ e $A \cap B = \emptyset$, quindi $X$ è $T_2$. Inoltre, se $Y \subseteq X$ ha almeno due punti $x \neq y$ e se $U$ è un clopen che contiene $x$ e non $y$ e $V = X \setminus U$, allora $Y \cap U$ e $Y \cap V$ formano una partizione aperta non banale di $Y$ che, quindi, è sconnesso.

(3) Sia $F$ un chiuso non vuoto e $x \notin F$. $X \setminus F$ è aperto e quindi unione di clopen: sia $U$ un clopen tale che $x \in U \subseteq X \setminus F$ e $V = X \setminus U$. Allora $U$ e $V$ sono intorni aperti disgiunti di $x$ ed $F$, rispettivamente.

Se $x \neq y$ e se $A$ è aperto, $x \in A$, $y \notin A$, allora $A$ è unione di clopen, quindi $\exists$ clopen $U$ tale chè $x \in U \subseteq A$, quindi $y \notin U$. $\square$

PROPOSIZIONE 5.2.8. *Sono equivalenti le seguenti affermazioni*

$(i)$ *$X$ è compatto, $T_2$ e totalmente sconnesso.*
$(ii)$ *$X$ è compatto e totalmente separato.*
$(iii)$ *$X$ è compatto, $T_0$ e zero dimensionale.*
$(iv)$ *$X$ è $T_2$ e coerente.*

DIMOSTRAZIONE. "$(i) \Rightarrow (ii)$" Sia $x \in X$ e sia $\mathbf{C}(x)$ l'insieme dei punti che non possono essere separati da $x$ con un clopen.

$\mathbf{C}(x)$ è un chiuso, infatti, se $y \in X \setminus \mathbf{C}(x)$, $y$ può essere separato da $x$ con un clopen, cioè $\exists U$ clopen, con $y \in U$ e $x \notin U$ e tutti i punti di $U$ sono separabili da $x$ con il clopen $U$, quindi $U \subseteq X \setminus \mathbf{C}(x)$.

Se $|\mathbf{C}(x)| \geq 2$, allora, per l'ipotesi, $\mathbf{C}(x)$ è sconnesso, quindi $\mathbf{C}(x) = F_1 \cup F_2$, con $F_1$, $F_2$ chiusi disgiunti, non vuoti nel sottospazio $\mathbf{C}(x)$ (chiuso), quindi in $X$. Poiché $X$ è compatto e $T_2$, esso è anche normale, quindi $\exists A \in \tau$, $A \supseteq F_1$, la cui chiusura è disgiunta da $F_2$.

Allora la frontiera di $A$, $fr(A) = cl(A) \cap (X \setminus A)$, non interseca $\mathbf{C}(x)$, perchè $cl(A) \cap F_2 = \emptyset$ e $(X \setminus A) \cap F_1 = \emptyset$; quindi ogni punto della frontiera di $A$ è separabile da $x$ con un clopen, cioè $\forall y \in fr(A)\ \exists B_y$ clopen che contiene $y$ ma non $x$. $\{B_y | y \in fr(A)\}$ è un ricoprimento aperto di clopen di $fr(A)$ che è chiuso e quindi (poiché $X$ è compatto) è compatto, per cui esiste un sottoricoprimento finito di clopen $fr(A) \subseteq B_{y_1} \cup B_{y_2} \cup \cdots \cup B_{y_n}$.

Sia $B = B_{y_1} \cup B_{y_2} \cup \cdots \cup B_{y_n}$, allora $B$ è clopen, $B \supseteq fr(A)$ e $x \notin B$, quindi tutti i punti di $B$ sono separabili da $x$ col clopen $B$, cioè $B \cap \mathbf{C}(x) = \emptyset$.

L'insieme $W = A \setminus B = cl(A) \setminus B$ è clopen non vuoto e

$$W \cap \mathbf{C}(x) = A \cap (X \setminus B) \cap \mathbf{C}(x) = A \cap \mathbf{C}(x) \supseteq F_1 \neq \emptyset$$

e inoltre

$$\begin{aligned}
(X \setminus W) \cap \mathbf{C}(x) &= (X \setminus W) \cap (F_1 \cup F_2) \\
&\supseteq (X \setminus W) \cap F_2 \\
&= \big(B \cup (X \setminus cl(A))\big) \cap F_2 \\
&\supseteq \big(X \setminus cl(A)\big) \cap F_2 \\
&= F_2 \neq \emptyset
\end{aligned}$$

e questa è una contraddizione. Infatti, uno dei due clopen $W$ o $X \setminus W$ non contiene $x$ e quindi tutti i suoi punti sono separabili con clopen da $x$, cioè esso deve essere disgiunto da $\mathbf{C}(x)$.

"$(ii) \Rightarrow (iii)$" Per ottenere la tesi bisogna solo provare che ogni aperto $U$ è unione di clopen, cioè che $\forall U \in \tau$, $\forall x \in U\ \exists A$ clopen tale che $x \in A \subseteq U$. Sia $y \in X \setminus U$, quindi $y \neq x$; esiste $B_y$ clopen, $y \in B_y$ e $x \notin B_y$. Allora $\{B_y | y \in X \setminus U\}$ ricopre $X \setminus U$ che è chiuso, quindi compatto.

Considerato un sottoricoprimento finito $B_{y_1} \cup B_{y_2} \cup \cdots \cup B_{y_n}$, posto $B = B_{y_1} \cup B_{y_2} \cup \cdots \cup B_{y_n}$, allora $B$ è clopen, $x \notin B$, $B \supseteq X \setminus U$. Posto $A = X \setminus B$, $A$ è clopen, $x \in A$ e $A \subseteq U$.

"$(iii) \Rightarrow (iv)$" Uno spazio $T_0$ e zero dimensionale è regolare, quindi $T_2$ e pertanto anche sobrio. Inoltre, poiché lo spazio è compatto e $T_2$, i compatti coincidono con i chiusi e poiché i clopen formano una base, anche i compatti aperti formano una base. Infine, una qualsiasi intersezione finita di compatti aperti è intersezione finita di clopen, quindi è un clopen e quindi è compatto-aperto. Pertanto segue che lo spazio è coerente.

"$(iv) \Rightarrow (iii)$" Poiché lo spazio è $T_2$ esso è $T_0$ e i compatti sono chiusi. Poiché, per ipotesi, ogni aperto è unione di compatti-aperti, esso è anche unione di clopen, cioè lo spazio è zero dimensionale. Inoltre lo spazio è compatto perchè è coerente.

"$(iii) \Rightarrow (ii)$" Segue dalla Proposizione 5.2.7.

"$(ii) \Rightarrow (i)$" Segue dalla Proposizione 5.2.7. □

DEFINIZIONE 5.2.9. *Uno* ***spazio di Stone*** *è uno spazio che verifica una delle proprietà equivalenti della* Proposizione 5.2.8.

Indichiamo con **Stone** la categoria che ha come oggetti gli spazi di Stone e come morfismi le funzioni continue.

Osservato che ogni spazio di Stone è chiaramente uno spazio coerente si prova il seguente risultato.

PROPOSIZIONE 5.2.10. *Ogni funzione continua fra due spazi di Stone è coerente.*

DIMOSTRAZIONE. La tesi segue dal fatto che in uno spazio di Stone i compatti aperti sono i chiusi aperti e se $f$ è continua, $f^{\leftarrow}$ li conserva. □

OSSERVAZIONE 5.2.11. **Stone** è sottocategoria piena sia di **CohTop** che di **Top**, sebbene l'inclusione fra queste ultime due non sia piena.

TEOREMA 5.2.12 (II Teorema di Rappresentazione di Stone). *La categoria* **Bool** *è duale della categoria* **Stone**.

DIMOSTRAZIONE. Come si è già osservato all'inizio del paragrafo, la dualità del I Teorema di Stone associa ad ogni spazio coerente $X$ il reticolo distributivo $K(\tau(X))$; è chiaro che se $X$ è uno spazio di Stone allora $K(\tau(X))$ è un'algebra di Boole perchè è costituita dai clopen di $X$.

Viceversa, la stessa dualità associava a ogni reticolo distributivo $L$ lo spazio coerente che abbiamo chiamato $spec(L)$ il quale, se $L$ è un'algebra di Boole è anche $T_2$ (si veda la Proposizione 5.2.3) quindi è uno spazio di Stone.

Essendo inoltre **Stone** e **Bool** sottocategorie piene di **CohTop** e **DLat**, rispettivamente, è chiaro che tale dualità si restringe alle sottocategorie dell'enunciato. □

Concludiamo questo paragrafo enunciando due caratterizzazioni degli oggetti delle categorie correlate dalla dualità del II Teorema di Stone. La dimostrazione di tali risultati si può vedere su [**8**] nel Capitolo 2 paragrafi 4.5-4.9.

PROPOSIZIONE 5.2.13. *Uno spazio topologico* $(X, \tau(X))$ *è uno spazio di Stone sse è* $T_1$ *e coerente.*

PROPOSIZIONE 5.2.14. *Un reticolo distributivo è un'algebra di Boole sse i suoi ideali primi sono massimali.*

Ricordiamo a proposito di quest'ultima proposizione, che in ogni reticolo distributivo gli ideali massimali sono primi.

## 5.3. Rappresentazione di Reticoli Completamente Distributivi

Se $(L, \leq)$ è un insieme pre-ordinato, indichiamo con $R(L)$ la classe dei lower set (detti anche semiideali) di $L$.

LEMMA 5.3.1. *Se $f \in \mathbf{CLat}(L, S)$, $f$ è suriettiva ed $L$ è completamente distributivo, allora $S$ è completamente distributivo.*

DIMOSTRAZIONE. Basta verificare

$$\textbf{(CDI)} \quad \bigwedge_{i \in I} \bigvee_{j \in J_i} a_{ij} = \bigvee_{f \in \prod_{i \in I} J_i} \bigwedge_{i \in I} a_{if(i)}$$

dove per ogni $i \in I$ e per ogni $j \in J_i$, $a_{ij} \in S$. Dalla suriettività di $f$ segue che $\forall a_{ij} \in S$ esiste $x_{ij} \in L$ tale che $f(x_{ij}) = a_{ij}$ e poiché $L$ è completamente distributivo ed $f$ è un morfismo in **CLat** si ha

$$\begin{aligned}
\bigwedge_{i \in I} \bigvee_{j \in J_i} a_{ij} &= \bigwedge_{i \in I} \bigvee_{j \in J_i} f(x_{ij}) \\
&= f\left(\bigwedge_{i \in I} \bigvee_{j \in J_i} x_{ij}\right) \\
&= f\left(\bigvee_{g \in \prod_{i \in I} J_i} \bigwedge_{i \in I} x_{ig(i)}\right) \\
&= \bigvee_{g \in \prod_{i \in I} J_i} \bigwedge_{i \in I} f(x_{ig(i)}) \\
&= \bigvee_{g \in \prod_{i \in I} J_i} \bigwedge_{i \in I} a_{ig(i)}
\end{aligned}$$

□

LEMMA 5.3.2. *Se $(L, \leq)$ è un insieme pre-ordinato, allora $\big(R(L), \subseteq\big)$ è un sottoreticolo completo di $\mathcal{2}^L$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathcal{A} \subseteq R(L)$. Se $a \in \bigcup \mathcal{A}$ allora $\exists A \in \mathcal{A}$ tale che $a \in A$; poiché $A$ è un semiideale di $L$ allora $\downarrow a \subseteq A$ e quindi $\downarrow a \subseteq \bigcup \mathcal{A}$. Pertanto $\bigcup \mathcal{A}$ è un semiideale di $L$, ovvero $\bigcup \mathcal{A} \in R(L)$.

Analogamente si dimostra che $\bigcap \mathcal{A} \in R(L)$.

Da ciò segue la tesi. □

Lemma 5.3.3. *Se* $(L, \leq)$ *è un reticolo completo e* $\Phi = \{\Phi_a | a \in A\} \subseteq R(L)$*, allora*

$$\bigcap \Phi = \left\{ \bigwedge s^{\rightarrow}(A) | s \in S(\Phi) \right\},$$

*dove*

$$S(\Phi) = \{s : A \to L| \quad \forall a \in A : s(a) \in \Phi_a\} \cong \prod_{a \in A} \Phi_a.$$

Dimostrazione. Se $x \in \bigcap \Phi$, allora $\forall a \in A$ risulta $x \in \Phi_a$. Sia $s_0 : A \to L$ l'applicazione che ad ogni $a \in A$ associa $s_0(a) = x$, allora $s_0^{\rightarrow}(A) = \{x\}$, quindi $\bigwedge s_0^{\rightarrow}(A) = x$, da cui segue che $x \in \{ \bigwedge s^{\rightarrow}(A) | s \in S(\Phi)\}$.

Viceversa, se $x \in \{\bigwedge s^{\rightarrow}(A) | s \in S(\Phi)\}$, allora esiste un'applicazione $s_1 : A \to L$ tale che $s_1 \in S(\Phi)$ ed $x = \bigwedge s_1^{\rightarrow}(A)$; pertanto, per ogni $a \in A$ : $x \leq s_1(a) \in \Phi_a$ quindi $x \in \Phi_a$, ovvero $x \in \bigcap \Phi$.

$\square$

Proposizione 5.3.4 (G. N. Raney [**11**], 1952). *Se* $(L, \leq)$ *è un reticolo completo, allora sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

(i) *$L$ è completamente distributivo.*
(ii) *$\exists X \in |\mathbf{Set}|$, tale che $L$ è immagine tramite un morfismo di reticoli completi di un sottoreticolo completo di $2^X$.*

Dimostrazione. "$(i) \Rightarrow (ii)$" Dal Lemma 5.3.2 segue che $R(L)$ è un sottoreticolo completo di $2^L$ e quindi $R(L)$ è un reticolo completo completamente distributivo.

Sia

$$f : R(L) \to L$$

l'applicazione, chiaramente suriettiva, che ad ogni $M \in R(L)$ associa

$$f(M) = \bigvee M.$$

$f$ è un morfismo di reticoli completi: infatti se $\Phi \subseteq R(L)$ e $\Phi = \{\Phi_a | a \in A\}$, risulta

$$\begin{aligned} f\left(\bigvee \Phi\right) &= \bigvee \left(\bigcup \{\Phi_a | a \in A\}\right) \\ &= \bigvee \left(\left\{\bigvee \Phi_a | a \in A\right\}\right) \\ &= \bigvee (\{f(\Phi_a) | a \in A\}) \\ &= \bigvee f^{\rightarrow}(\Phi) \end{aligned}$$

quindi $f$ conserva $\bigvee$. Inoltre, grazie al Lemma 5.3.3 e alla completa distributività di $L$ si ha

$$\begin{aligned} f\left(\bigwedge \Phi\right) &= \bigvee \left(\bigcap \Phi\right) \\ &= \bigvee \left\{\bigwedge s^{\rightarrow}(A) | s \in S(\Phi)\right\} \\ &= \bigvee_{s\in\prod_{a\in A}\Phi_a} \bigwedge_{a\in A} s(a) \\ &= \bigwedge \left\{\bigvee \Phi_a | a \in A\right\} \\ &= \bigwedge \{f(\Phi_a)|a \in A\} \\ &= \bigwedge f^{\rightarrow}(\Phi) \end{aligned}$$

e quindi $f$ è un morfismo di reticoli completi.

"$(ii) \Rightarrow (i)$" Segue dal Lemma 5.3.1. □

E' implicito nella proposizione precedente che la classe dei sottoreticoli completi di $\mathcal{2}^X$, al variare di $X \in |\mathbf{Set}|$, non rappresenta tutti i reticoli completamente distributivi; tuttavia rappresenta tutti e soli quelli che verificano una ulteriore proprietà, come mostra il seguente teorema. Per la dimostrazione di tale teorema è utile osservare che se un elemento $x$ di un reticolo completo $X$ è sup di elementi coprimi, allora $x = \bigvee \{a \in X | a \text{ coprimo}, \ a \leq x\}$.

TEOREMA 5.3.5 (I Teorema di Rappresentazione di Raney). *Se $(L, \leq)$ è un reticolo completo allora $\exists X \in |\mathbf{Set}|$ tale che $(L, \leq)$ è isomorfo ad un sottoreticolo completo di $\mathcal{2}^X$ se e solo se ogni elemento di $(L, \leq)$ è il* sup *di un insieme di elementi completamente coprimi.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $X \in |\mathbf{Set}|$. Se $R$ è un sottoreticolo completo di $\mathcal{2}^X$, sia $A_p = \bigcap \{B \subseteq R | p \in B\}$, $\forall p \in X$; allora $A_p$ è completamente coprimo infatti se $(F_i)_{i\in I} \subseteq R$, tale che $A_p \subseteq \bigcup_{i\in I} F_i$ allora $p \in \bigcup_{i\in I} F_i$ e quindi esiste $\bar{i} \in I$ tale che $p \in F_{\bar{i}}$ pertanto $F_{\bar{i}} \in \{B \subseteq R | p \in B\}$ da cui segue che $A_p \subseteq F_{\bar{i}}$.

Sia, ora, $P \subseteq X$, $P \in R$. Chiaramente, $A_p \subseteq P$, $\forall p \in P$ e quindi $P = \bigcup \{A_p | p \in P\}$; dall'arbitrarietà di $P \in R$ segue la tesi.

Viceversa, se $X$ è l'insieme degli elementi di $L$ completamente coprimi, sia

$$f : L \to \mathcal{P}(X)$$

l'applicazione definita $\forall a \in L$ da

$$f(a) = \{x \in X | x \leq a\}.$$

Per ottenere la tesi basta verificare che $f$ è un morfismo di reticoli completi iniettivo. Siano $a, b \in L$, tali che $a \neq b$; se $a \not\leq b$, allora esiste

$x_0 \in X$ tale che $x_0 \leq a$ e $x_0 \nleq b$. Pertanto $x_0 \in f(a)$ e $x_0 \notin f(b)$ e quindi $f(a) \neq f(b)$, ovvero $f$ è iniettiva.

Sia $S \subseteq L$. Se $x \in f\left(\bigvee S\right)$, allora $x \leq \bigvee S$; essendo $x$ completamente coprimo esiste $s \in S$ tale che $x \leq s$ e quindi $x \in \bigcup f^{\rightarrow}(S)$. Viceversa, se $x \in \bigcup f^{\rightarrow}(S) = \bigcup \{f(a)|a \in S\}$ allora esiste $a \in S$ tale che $x \in f(a) = \{y \in X|y \leq a\}$ quindi $x \leq a \leq \bigvee S$, ovvero $x \in f\left(\bigvee S\right)$. Pertanto per doppia inclusione si ha che $f\left(\bigvee S\right) = \bigcup f^{\rightarrow}(S)$, ovvero $f$ conserva $\bigvee$.

Sia, ora, $x \in f\left(\bigwedge S\right) = \{x \in X|x \leq \bigwedge S\}$, allora $x \leq a$, $\forall a \in S$, da cui segue che $x \in f(a)$, $\forall a \in S$, ovvero $x \in \bigcap f^{\rightarrow}(S)$. Viceversa, se $x \in \bigcap f^{\rightarrow}(S)$ allora $x \leq s$, $\forall s \in S$, quindi $x \leq \bigwedge S$, ovvero $x \in f\left(\bigwedge S\right)$. Pertanto per doppia inclusione segue che $f\left(\bigwedge S\right) = \bigcap f^{\rightarrow}(S)$, ovvero $f$ conserva $\bigwedge$.

□

Esempio 5.3.6. Nel reticolo completamente distributivo, $([0,1], \leq)$ non esiste alcun elemento completamente coprimo. Infatti ogni $x \in (0,1]$ è sup dell'insieme $\{y \in [0,1]|y \leq x,\ y \neq x\}$ senza essere minore o uguale di alcun elemento di tale insieme. Dal Teorema 5.3.5 segue che $([0,1], \leq)$ non è isomorfo ad alcun sottoreticolo completo di $\mathbf{2}^X$, con $X \in |\mathbf{Set}|$.

Lemma 5.3.7. *Se $L$ è un reticolo completo, posto*

$$K(x) = \bigcap \{M|M \in R(L) : x \leq \bigvee M\}, \quad \forall x \in L,$$

*allora valgono le seguenti proprietà:*

(1) $\forall x \in L$: $\bigvee K(x) \leq x$.
(2) $\forall x, y \in L$ *con* $x \leq y$ : $K(x) \subseteq K(y)$.
(3) $\forall A \subseteq L$ : $\bigcup \{K(a)|a \in A\} = K\left(\bigvee A\right)$.

Dimostrazione. (1) Sia $x \in L$. L'insieme $\downarrow x \in R(L)$, allora $K(x) \subseteq \downarrow x$ da cui segue che $\bigvee K(x) \leq \bigvee(\downarrow x) = x$.

(2) Se $x, y \in L$ e $x \leq y$, allora

$$\{M|M \in R(L) : y \leq \bigvee M\} \subseteq \{M|M \in R(L) : x \leq \bigvee M\}$$

da cui segue che $K(x) \subseteq K(y)$.

(3) Sia $A \subseteq L$. Se $t \notin \bigcup \{K(a)|a \in A\}$, allora $\forall a \in A : t \notin K(a)$.

Scegliamo $\forall a \in A$, $M_a \in R(L)$ tale che $t \notin M_a$ e $a \leq \bigvee M_a$. Allora posto $M = \bigcup \{M_a|a \in A\}$ si ha $M \in R(L)$, $\bigvee A \leq \bigvee M$ e $t \notin M$. Quindi $t \notin K\left(\bigvee A\right)$.

Viceversa, se $t \in \bigcup \{K(a)|a \in A\}$, allora $t \in K(a)$, per qualche $a \in A$, e quindi, poiché $a \leq \bigvee A$, $t \in K\left(\bigvee A\right)$. Pertanto $\bigcup \{K(a)|a \in A\} = K\left(\bigvee A\right)$. □

Osservazione 5.3.8. Dal Lemma 5.3.7 segue che $\forall y \in K(x)$, con $x \in L$, si ha $y \leq x$, infatti

$$y \leq \bigvee K(x) \leq x.$$

Proposizione 5.3.9. *Se $L$ è un reticolo completo, allora*

$$L \text{ è completamente distributivo} \Leftrightarrow \bigvee K(x) = x, \ \forall x \in L.$$

Dimostrazione. "$\Rightarrow$" Se $x \in L$, allora essendo $L$ completamente distributivo ed applicando il Lemma 5.3.3 si ha, indicando con $\mathcal{M} = \{M \subseteq L | M \in R(L), \ x \leq \bigvee M\}$

$$\begin{aligned} x &\leq \bigwedge \left\{ \bigvee M | M \in \mathcal{M} \right\} \\ &= \bigvee \left\{ \bigwedge s^{\rightarrow}(\mathcal{M}) | s : \mathcal{M} \to L : s(M) \in M, \quad \forall M \in \mathcal{M} \right\} \\ &\leq \bigvee \bigcap \{ M | M \in R(L) : x \leq \bigvee M \} = \bigvee K(x). \end{aligned}$$

Inoltre, per il Lemma 5.3.7 (1) si ha che $\bigvee K(x) \leq x$, da cui per doppia disuguaglianza segue la tesi.

"$\Leftarrow$" Poiché per ipotesi $K(a) \in R(L)$ e $\bigvee K(a) = a$, $\forall a \in L$, allora la funzione

$$f : R(L) \to L, \ M \longmapsto \bigvee M$$

già definita nella dimostrazione della Proposizione 5.3.4 è suriettiva, e, come già visto, è un morfismo di reticoli completi. Pertanto, poiché per il Lemma 5.3.2, $R(L)$ è un sottoreticolo completo di $\mathbf{2}^L$, per la Proposizione 5.3.4 si ha che $L$ è un reticolo completamente distributivo. □

Se $L$ è un reticolo completo, consideriamo la relazione binaria $\rho$ definita da

$$x\rho y \ \Leftrightarrow \ x \in K(y), \quad \forall x, y \in L.$$

Allora $\rho \in \mathbf{Rel}(L, L)$.

Dall'Osservazione 5.3.8 segue, evidentemente, che $x\rho y \Rightarrow x \leq y$, $\forall x, y \in L$.

Proposizione 5.3.10. *Se $L$ è un reticolo completo completamente distributivo, allora $\rho \in \mathbf{Rel}(L, L)$ è idempotente e quindi è transitiva.*

Dimostrazione. Per la Proposizione 5.3.9 e per il Lemma 5.3.7 (3), $\forall x \in L$ si ha

$$K(x) = K\left(\bigvee K(x)\right) = \bigcup \{K(a) | a \in K(x)\}.$$

Poiché risulta

$$\begin{aligned} x\rho y \ &\Leftrightarrow \ x \in K(y) = \bigcup \{K(a) | a \in K(y)\} \\ &\Leftrightarrow \exists \overline{a} \in L : x \in K(\overline{a}) \text{ e } \overline{a} \in K(y) \\ &\Leftrightarrow \exists \overline{a} \in L : x\rho\overline{a} \text{ e } \overline{a}\rho y \\ &\Leftrightarrow x(\rho \circ \rho)y \end{aligned}$$

allora risulta $\rho = \rho \circ \rho$, ovvero $\rho$ è idempotente.

Inoltre, da $x\rho y$ e $y\rho z$ segue $x(\rho \circ \rho)z$ da cui $x\rho z$. □

Una catena che sia un reticolo completo si dirà *catena completa.*

TEOREMA 5.3.11 (II Teorema di Rappresentazione di Raney). *Se $L$ è un reticolo completo allora sono equivalenti le seguenti affermazioni*

(i) *$L$ è completamente distributivo.*
(ii) *$L$ è isomorfo ad un sottoreticolo completo del prodotto di una famiglia di catene complete.*

DIMOSTRAZIONE. "$(i) \Rightarrow (ii)$" Sia $L$ un reticolo completo, completamente distributivo. Indichiamo con $\Gamma$ la famiglia delle catene massimali rispetto a $\rho$. Notiamo che ogni catena si estende ad almeno una catena massimale, per il Lemma di Zorn. Se $C \in \Gamma$ e $a \in L$, poniamo

$$f(C,a) = \{t \in C | \exists x \in C : t\rho x \text{ e } x\rho a\}$$

e

$$F_C = \{f(C,a)|a \in L\}.$$

Proviamo che $\forall a \in L$, $\bigcup\{f(C,a)|C \in \Gamma\} = K(a)$: infatti, se $t \in K(a)$, cioè $t\rho a$, allora, poiché per 5.3.10 $\rho$ è idempotente, esiste $x \in L$ tale che $t\rho x$ e $x\rho a$ quindi $\{t,x,a\}$ è una catena . Se $C \supseteq \{t,x,a\}$ è una catena massimale, allora, ovviamente, $t \in f(C,a) \subseteq \bigcup\{f(C,a)|C \in \Gamma\}$.

Viceversa, se $t \in f(C,a)$ per qualche $C \in \Gamma$, allora $\exists x \in C$, tale che $t \in K(x)$ e $x \in K(a)$ quindi $x \leq a$ e $t \in K(x) \subseteq K(a)$.

Se, ora, $a,b \in L$ e $f(C,a) \nsubseteq f(C,b)$ allora esiste $t \in f(C,a)$ tale che $t \notin f(C,b)$. Pertanto $\exists x \in C$ tale che $t\rho x$ e $x\rho a$ ma $\forall y \in C : \neg(t\rho y)$ o $\neg(y\rho b)$. Considerato un qualsiasi $s \in f(C,b)$ esiste allora $y \in C$ tale che $s\rho y$ e $y\rho b$ deve essere quindi $\neg(t\rho y)$. Poiché $C$ è una catena si ha allora $s\rho y$, $y\rho t$, $t\rho x$, $x\rho a$ da cui, per la transitività di $\rho$ segue $s\rho y$ e $y\rho a$, cioè $s \in f(C,a)$.

Quindi $f(C,b) \subseteq f(C,a)$. Così per ogni $C \in \Gamma$, $F_C$ è una catena rispetto alla relazione di inclusione in $\mathcal{2}^C$.

Inoltre, se $C \in \Gamma$ ed $A \subseteq L$, allora $\bigcup\{f(C,a)|a \in A\} = f(C,\bigvee A)$: infatti,

$$t \in f(C,\bigvee A) \;\Leftrightarrow\; t \in C \text{ ed } \exists x \in C \;:\; t\rho x \text{ e } x\rho\bigvee A$$

e dal Lemma 5.3.7 (3) segue che

$$x\rho\bigvee A \;\Leftrightarrow\; \exists a \in A \;:\; x\rho a.$$

Quindi $t \in f(C,\bigvee A) \Leftrightarrow \exists a \in A : t \in f(C,a)$. Pertanto $F_C$ è chiuso rispetto all'unione per ogni $C \in \Gamma$. Segue che, $\forall C \in \Gamma$, $F_C$ è una catena completa in cui se $F \subseteq F_C$, $\bigvee F = \bigcup F$ ma l'inf non è l'intersezione, infatti, $\bigwedge F = \bigcup\{f(C,b)|b \in L,\ f(C,b) \subseteq \bigcap F\}$ è il più grande elemento di $F_C$ contenuto in tutti gli elementi di $F$.

Inoltre osserviamo che se $C \in \Gamma$ ed $A \subseteq L$, allora $\bigwedge\{f(C,a)|a \in A\} = f(C,\bigwedge A)$. Infatti, se $t \in \bigwedge\{f(C,a)|a \in A\}$, allora esiste $b \in L$ tale che $t \in f(C,b)$ ed $f(C,b) \subseteq \bigcap\{f(C,a)|a \in A\}$. Quindi $t \in C$ ed esiste

$s \in C$ tale che $t\rho s$ ed $s\rho b$. Poiché $\rho$ è idempotente e poiché $C$ è una catena massimale rispetto a $\rho$, esistono $u, y \in C$ tale che $t\rho u$, $u\rho y$, $y\rho s$ ed $s\rho b$. Pertanto $y \in f(C,b)$ e $\forall a \in A$ si ha che $y \in f(C,a)$, quindi $y \leq a$, $\forall a \in A$, da cui segue che $y \leq \bigwedge A$. Dal Lemma 5.3.7 (2) si ha che $t\rho u$ $u\rho \bigwedge A$ ovvero che $t \in f(C, \bigwedge A)$ e quindi $\bigwedge \{f(C,a)|a \in A\} \subseteq f(C, \bigwedge A)$.

Viceversa, dal Lemma 5.3.7 (2) segue che $\forall a \leq a'$ si ha $f(C,a) \subseteq f(C,a')$ quindi $f(C, \bigwedge A) \subseteq \bigcap \{f(C,a)|a \in A\}$ da cui si ha $f(C, \bigwedge A) \subseteq \bigwedge \{f(C,a)|a \in A\}$.

Sia $D$ il prodotto della famiglia $\{F_C | C \in \Gamma\}$, cioè

$$D = \{\theta : \Gamma \to \bigcup \{F_C | C \in \Gamma\} | \quad \forall C \in \Gamma : \theta(C) \in F_C\}.$$

$D$ è un reticolo completo in cui se $D_1 \subseteq D$, allora $\forall C \in \Gamma$

$$\left(\bigvee D_1\right)(C) = \bigvee \{\theta(C) | \theta \in D_1\}, \ \left(\bigwedge D_1\right)(C) = \bigwedge \{\theta(C) | \theta \in D_1\}.$$

Inoltre, poiché ognuna delle catene complete $F_C$ è completamente distributiva anche il prodotto lo è, per la Proposizione 3.4.9.

Indichiamo con $\theta_a$, $\forall a \in L$, tutte le funzioni di $D$ tali che $\theta_a(C) = f(C,a)$. Poniamo $L^* = \{\theta_a | a \in L\}$ e sia

$$\phi : L \to L^*, \ a \longmapsto \theta_a.$$

Si verifica facilmente che $L^*$ è un sottoreticolo completo di $D$. Inoltre, $\phi$ è chiaramente suriettiva ed è anche iniettiva: infatti se $\theta_a = \theta_b$, allora $\forall C \in \Gamma$ si ha $f(C,a) = f(C,b)$, quindi

$$\begin{aligned} a &= \bigvee K(a) \\ &= \bigvee \left(\bigcup \{f(C,a) | C \in \Gamma\}\right) \\ &= \bigvee \left(\bigcup \{f(C,b) | C \in \Gamma\}\right) \\ &= \bigvee K(b) = b. \end{aligned}$$

Se $A \subseteq L$, allora $\bigvee \phi^{\rightarrow}(A) = \bigvee \{\theta_a | a \in A\} = \theta_{\bigvee A} = \phi(\bigvee A)$: infatti, se $C \in \Gamma$ allora

$$\begin{aligned} \left(\bigvee \{\theta_a | a \in A\}\right)(C) &= \bigvee \{\theta_a(C) | a \in A\} \\ &= \bigvee \{f(C,a) | a \in A\} \\ &= \bigcup \{f(C,a) | a \in A\} \\ &= f(C, \bigvee A) \\ &= \theta_{\bigvee A}(C). \end{aligned}$$

Ciò basta per dire che $\phi$ è un isomorfismo di reticoli completi da $L$ in $L^*$, per il Corollario 3.3.9.

"$(ii) \Rightarrow (i)$" Dalla Proposizione 3.4.7 segue che ogni catena completa è un reticolo completamente distributivo. Il prodotto di una famiglia di reticoli completamente distributivi è completamente distributivo. Inoltre, per la Proposizione 3.4.8 si ha che $L$, in quanto sottoreticolo completo di un reticolo completamente distributivo è anch'esso completamente distributivo. $\square$

Il seguente risultato riconduce il precedente teorema ad una situazione particolare, quella cioè in cui tutte le catene complete di cui si fa il prodotto sono isomorfe all'intervallo unitario $[0, 1]$.

PROPOSIZIONE 5.3.12. *Se $(L, \leq)$ è un reticolo completo allora sono equivalenti le seguenti affermazioni*

($i$) *$L$ è un reticolo completamente distributivo.*
($ii$) *Esiste $X \in |\mathbf{Set}|$, tale che $L$ è isomorfo ad un sottoreticolo completo di $I^X$, dove $I = [0, 1]$.*

DIMOSTRAZIONE. Si veda [**5**] Esercizio 2.30. $\square$

Da tale proposizione si evince quindi come l'insieme dei sottoreticoli completi di $I^X$, $\forall X \in |\mathbf{Set}|$, rappresenta l'intera classe dei reticoli completi completamente distributivi.

## 5.4. Elementi Generatori nei Locali Spaziali

L'equivalenza tra le categorie **Sob** e **SpatLoc** descritta nel paragrafo 4.5 comporta, oltre alle conseguenze già considerate in precedenza, il seguente risultato.

PROPOSIZIONE 5.4.1. *Ogni frame spaziale è isomorfo alla topologia di qualche spazio (sobrio). Dualmente ogni coframe spaziale è isomorfo al coframe dei chiusi di qualche spazio (sobrio).*

DIMOSTRAZIONE. Le equivalenze $\tau$ e $pt$ portano chiaramente un locale spaziale $S$ in $pt(S)$ che è sobrio ed al quale si associa

$$\tau \circ pt(S) \cong i_{\mathbf{SpatLoc}}(S) = S.$$

Dualmente, per ogni coframe $L$ gli isomorfismi

$$L \cong (L^{op})^{op} \cong \big(\tau \circ pt(L^{op})\big)^{op} \cong \neg\big(\tau \circ pt(L^{op})\big)$$

dove $\neg : \mathcal{P}\big(pt(L^{op})\big) \to \mathcal{P}\big(pt(L^{op})\big)$ è la usuale complementazione. $\square$

PROPOSIZIONE 5.4.2. *Se $\big(X, \tau(X)\big)$ è uno spazio topologico, ogni chiuso* è sup *di chiusi coprimi.*

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo già osservato che la chiusura di un punto è un elemento coprimo del coframe dei chiusi. Se $C$ è un qualsiasi chiuso si ha

$$C = \bigcup_{x \in C} \{x\}$$

da cui

$$C \subseteq \bigcup_{x \in C} cl(x).$$

Ma da $x \in C$ segue $cl(x) \subseteq cl(C) = C$, quindi

$$C = \bigcup_{x \in C} cl(x)$$

e poiché $C$ è chiuso si ha

$$C = cl\left(\bigcup_{x \in C} cl(x)\right) = \bigvee_{x \in C} cl(x).$$

□

Da questi risultati segue che i coframe spaziali sono generati tramite $\bigvee$ dai loro elementi coprimi. Un risultato duale vale per i frame spaziali. Più precisamente si ha quanto segue.

COROLLARIO 5.4.3. *Siano $S$ un frame spaziale e $T$ un coframe spaziale. Allora $\forall x \in S$ e $\forall y \in T$ si ha*

$$x = \bigwedge \{a \in S | a \text{ primo}, \ x \leq a\}$$

$$y = \bigvee \{b \in T | b \text{ coprimo}, \ b \leq y\}.$$

DIMOSTRAZIONE. Segue facilmente dalle proposizioni 5.4.1 e 5.4.2. □

OSSERVAZIONE 5.4.4. Dal precedente corollario segue che condizione necessaria perchè un frame spaziale abbia una involuzione che inverte l'ordine è che ogni suo elemento si possa ottenere come sup di elementi coprimi.

PROPOSIZIONE 5.4.5. *Ogni catena completa $(C, \leq)$ è un frame spaziale.*

DIMOSTRAZIONE. Dalla Proposizione 3.4.7 segue che $(C, \leq)$ è un frame. Verifichiamo che $(C, \leq)$ è spaziale: siano $a, a' \in C$ tali che $a \not\leq a'$. Sia

$$p : C \to \{\perp, \top\}$$

una funzione definita $\forall t \in C$ da

$$p(t) = \perp \text{ se } t \leq a' \text{ e } p(t) = \top \text{ se } a' \leq t, \ a' \neq t.$$

$p$ è un morfismo di frame: infatti, se $x, y \in C$

$$\begin{aligned} p(x \wedge y) = \bot \Leftrightarrow\ & x \wedge y \leq a' \\ \Leftrightarrow\ & x \leq a' \text{ o } y \leq a' \\ \Leftrightarrow\ & p(x) = \bot \text{ o } p(y) = \bot \\ \Leftrightarrow\ & p(x) \wedge p(y) = \bot. \end{aligned}$$

Se $S \subseteq C$

$$\begin{aligned} p\left(\bigvee S\right) = \bot \Leftrightarrow\ & \bigvee S \leq a' \\ \Leftrightarrow\ & s \leq a', \quad \forall s \in S \\ \Leftrightarrow\ & p(s) = \bot, \quad \forall s \in S \\ \Leftrightarrow\ & \bigvee \{p(s) | s \in S\} = \bot. \end{aligned}$$

Inoltre, ovviamente, $p(a) = \top$ e $p(a') = \bot$. Da ciò segue la tesi. □

PROPOSIZIONE 5.4.6. *Per ogni insieme non vuoto $X$ e per ogni frame spaziale $L$ si ha che $L^X$ è un frame spaziale.*

DIMOSTRAZIONE. Come caso particolare della Proposizione 3.4.9 si verifica che $L^X$ è un frame. Per provare che è spaziale consideriamo $f, g \in L^X$ con $f \nleq g$. Sia $x' \in X$ tale che $f(x') \nleq g(x')$ e consideriamo un morfismo di frame

$$p : L \to \mathbf{2}$$

tale che $p\big(f(x')\big) = \top$ e $p\big(g(x')\big) = \bot$ e poniamo

$$\bar{p} : L^X \to \mathbf{2}, \quad h \mapsto \bar{p}(h) = p\big(h(x')\big).$$

Allora si ha

$$\begin{aligned} \bar{p}(h \wedge h') &= p\big(h(x') \wedge h'(x')\big) \\ &= p\big(h(x')\big) \wedge p\big(h'(x')\big) \\ &= \bar{p}(h) \wedge \bar{p}(h') \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \bar{p}\left(\bigvee_{j \in J} h_j\right) &= p\left(\bigvee \{h_j(x') | j \in J\}\right) \\ &= \bigvee \{p(h_j(x')) | j \in J\} \\ &= \bigvee \{\bar{p}(h_j) | j \in J\}. \end{aligned}$$

Quindi $\bar{p}$ è un morfismo di frame e chiaramente $\bar{p}(f) = \top$, $\bar{p}(g) = \bot$. □

PROPOSIZIONE 5.4.7. *Se $(L, \leq)$ è un sottoreticolo completo di un frame spaziale $(X, \leq)$, allora $(L, \leq)$ è un frame spaziale.*

DIMOSTRAZIONE. Poiché $(L, \leq)$ è un sottoreticolo completo di $(X, \leq)$, allora $\inf_X A \in L$ e $\sup_X A \in L$, $\forall A \subseteq L$. Pertanto, $\forall A \subseteq L$ esiste $\inf_L A = \inf_X A$ ed esiste $\sup_L A = \sup_X A$, ovvero $(L, \leq)$ è un reticolo completo ed inoltre, poiché $(X, \leq)$ è un frame, allora anche $(L, \leq)$ è un frame.

Siano, ora, $a, a' \in L$, tali che $a \not\leq a'$. Poiché $(X, \leq)$ è spaziale, esiste

$$p : X \to \{\perp, \top\}$$

morfismo di frame tale che

$$p(a) = \top \text{ e } p(a') = \perp$$

allora esiste

$$\overline{p} = p_{|L} : L \to \{\perp, \top\}$$

morfismo di frame tale che

$$\overline{p}(a) = p(a) = \top \text{ e } \overline{p}(a') = p(a') = \perp,$$

ovvero $(L, \leq)$ è un frame spaziale. □

Dalla Proposizione 5.3.12, considerando anche le proposizioni 5.4.5, 5.4.6 e 5.4.7 segue che ogni reticolo completo completamente distributivo è un frame spaziale e, poiché in un reticolo completamente distributivo valgono entrambe le leggi di distributività infinita, è anche un coframe spaziale. Pertanto segue la seguente proprietà.

PROPOSIZIONE 5.4.8. *Se $(L, \leq)$ è un reticolo completo completamente distributivo, allora ogni $a \in X$ si può esprimere come* sup *di elementi coprimi e si può anche esprimere come* inf *di elementi primi.*

□

### 5.5. Famiglie Fini e Grossolane nei Reticoli Completi

DEFINIZIONE 5.5.1. *Se $(L, \leq)$ è un reticolo completo, $a \in L$ e $B \subseteq L$, allora $B$ si dice **famiglia fine** di $a$ in $L$ se $B \neq \emptyset$ e risulta*

(1) $\bigvee B = a$.
(2) $A \subseteq L,\ a \leq \bigvee A \Rightarrow \forall x \in B\ \exists y \in A : x \leq y$.

PROPOSIZIONE 5.5.2. *Se $L$ è un reticolo completo ed $a \in L$, allora l'unione di famiglie fini di $a$ è ancora una famiglia fine di $a$.*

DIMOSTRAZIONE. Banale. □

L'unione di tutte le famiglie fini di $a$, se esiste, si indica con $\beta(a)$ ed è ovviamente la più grande famiglia fine di $a$ in $L$.

ESEMPIO 5.5.3. (a) In $\big(\mathcal{P}(X), \subseteq\big)$, con $X \in |\mathbf{Set}|$, $\forall E \in \mathcal{P}(X)$, $E \neq \emptyset$, $\beta(E) = \big\{\{e\}|e \in E\big\} \cup \{\emptyset\}$ e $\beta(\emptyset) = \{\emptyset\}$.

(b) In $(I, \leq)$, $\forall a \in (0,1]$, $\beta(a) = [0,a)$ e $\beta(0) = \big\{0\big\}$. Ogni successione $\{a_n|n \in \mathbb{N}\} \subseteq [0,a)$ crescente costituisce una famiglia fine di $a$ in $I$.

(c) In $(I^X, \leq)$, $X \in |\mathbf{Set}|$, $\forall h \in I^X$: $\beta(h) = \big\{f \in I^X | f \leq h, |supp(f)| \leq 1\big\}$ è la famiglia fine massimale di $h$.

OSSERVAZIONE 5.5.4. Se $B$ è una famiglia fine di $a$ e $B' = \bigcup\{\downarrow b|b \in B\}$ allora $B'$ è una famiglia fine di $a$. Ne segue che la più grande famiglia fine di un qualsiasi elemento di $L$ è un lower set.

PROPOSIZIONE 5.5.5. *Se $L$ è un reticolo completo, $x \in L$ e $K(x) = \bigcap\{M|M \in R(L) : x \leq \bigvee M\}$, allora $\forall x \in L$ :*

$$K(x) \text{ è una famiglia fine di } x \text{ in } L \Leftrightarrow \bigvee K(x) = x.$$

DIMOSTRAZIONE. "$\Rightarrow$" E' ovvio, perchè se $K(x)$ è una famiglia fine deve soddisfare 5.5.1 (1)

"$\Leftarrow$" Per ipotesi $K(x)$ verifica la proprietà 5.5.1 (1). Sia, ora, $A \subseteq L$, tale che $x \leq \bigvee A$. Allora per il Lemma 5.3.7 (2) si ha $K(x) \subseteq K\left(\bigvee A\right)$. Pertanto se $k \in K(x)$ allora per il Lemma 5.3.7 (3), $k \in K\left(\bigvee A\right) = \bigcup\big\{K(a)|a \in A\big\}$, allora esiste $\overline{a} \in A$ tale che $k \in K(\overline{a})$ e per l'osservazione 5.3.8 risulta $k \leq \overline{a}$.

Quindi $\forall k \in K(x)$ $\exists \overline{a} \in A$ tale che $k \leq \overline{a}$, ovvero $K(x)$ è una famiglia fine di $x$. □

PROPOSIZIONE 5.5.6. *Siano $L$ un reticolo completo ed $x \in L$. $\bigvee K(x) = x$ se e solo se $K(x)$ è la più grande famiglia fine di $x$, cioè $\beta(x) = K(x)$.*

DIMOSTRAZIONE. La condizione è necessaria, infatti sia $x \in L$. Per la Proposizione 5.5.5 $K(x)$ è una famiglia fine di $x$, quindi $K(x) \subseteq \beta(x)$. Supponiamo per assurdo che esista $A \subseteq L$ una famiglia fine di $x$ tale che $A \not\subseteq K(x)$; allora $\exists \overline{a} \in A \setminus K(x)$ e poiché $K(x)$ è un lower set risulta $\overline{a} \not\leq k$, $\forall k \in K(x)$. Pertanto $K(x) \subseteq L$, $\bigvee K(x) = x$, ma preso $\overline{a} \in A$, non esiste alcun $k \in K(x)$ per cui $\overline{a} \leq k$, ovvero non è verificata per $A$ la proprietà (2) di 5.5.1, e quindi $A$ non è una famiglia fine di $X$, che è un assurdo. Pertanto $A \subseteq K(x)$, $\forall A \subseteq \beta(x)$, ovvero $\beta(x) = K(x)$.

La sufficienza segue banalmente da 5.5.5. □

TEOREMA 5.5.7. *Se $(L, \leq)$ è un reticolo completo, allora*

$$L \text{ è completamente distributivo} \Leftrightarrow \forall x \in L \ \exists \beta(x).$$

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione é conseguenza delle proposizioni 5.5.2, 5.5.5, 5.5.6 e 5.3.9. □

COROLLARIO 5.5.8. *Se $(L, \leq)$ è un reticolo completo, allora*

$$L \text{ è completamente distributivo} \Leftrightarrow K(x) \text{ è una famiglia fine}, \forall x \in L.$$

DIMOSTRAZIONE. Segue da 5.3.9 e 5.5.6. □

DEFINIZIONE 5.5.9. *Se* $(L, \leq)$ *è un reticolo completo,* $a \in L$ *e* $B \subseteq L$*, allora* $B$ *si dice* ***famiglia fine standard*** *di* $a$ *se* $B$ *è una famiglia fine di* $a$ *e* $b$ *è coprimo,* $\forall b \in B$.

OSSERVAZIONE 5.5.10. Siano $(L, \leq)$ un reticolo completo completamente distributivo ed $a \in L$ tale che $\exists \beta(a)$. Se $\forall x \in \beta(a)$ poniamo $[x] = \{y \in L | y \text{ coprimo e } y \leq x\}$ dalla Proposizione 5.4.8 segue che $x = \bigvee[x]$ e ciò consente di verificare che

$$\beta^*(a) = \bigcup \{[x] | x \in \beta(a)\}$$

è una famiglia fine standard di $a$.

Dalla Osservazione 5.5.4 segue chiaramente che se indichiamo con $M(L)$ l'insieme degli elementi coprimi di $L$ allora

$$\beta^*(a) = \beta(a) \cap M(L).$$

TEOREMA 5.5.11. *Se* $(L, \leq)$ *è un reticolo completo, allora*

$L$ *è completamente distributivo* $\Leftrightarrow \forall a \in L\ \exists A \subseteq L$, $A$ *famiglia fine standard di* $a$.

DIMOSTRAZIONE. Segue dal Teorema 5.5.7 e dalla Definizione 5.5.9. □

ESEMPIO 5.5.12. (a) $\forall A \in \mathcal{P}(X)$, con $X \in |\mathbf{Set}|$, si ha

$$\beta^*(A) = \{\{x\} | x \in A\}$$

infatti $M(L) = \{\{x\} | x \in X\}$.

(b) E' facile vedere che, per $I = [0, 1]$, $M(I) = \{a \in I | a \neq 0\}$ e $M(I^X) = \{f : X \to I || supp(f)| = 1\}$. Quindi tenendo conto anche degli esempi (b) e (c) di 5.5.3 si ha

$$\beta^*(a) = (0, a)\ , \quad \forall a \in I$$

$$\beta^*(h) = \{f \in I^X | f \leq h, |supp(f)| = 1\}, \quad \forall h \in I^X.$$

DEFINIZIONE 5.5.13. *Se* $(L, \leq)$ *è un reticolo completo,* $a \in L$ *e* $A \subseteq L$*, allora* $A$ *si dice* ***famiglia grossolana*** *di* $a$ *in* $L$ *se* $A \neq \emptyset$ *e risulta*

(1) $\bigwedge A = a$.
(2) $B \subseteq L$, $\bigwedge B \leq a \Rightarrow \forall x \in A\ \exists y \in B : y \leq x$.

PROPOSIZIONE 5.5.14. *Se* $L$ *è un reticolo completo ed* $a \in L$*, allora l'unione di famiglie grossolane di* $a$ *è ancora una famiglia grossolana di* $a$.

DIMOSTRAZIONE. Banale. □

L'unione di tutte le famiglie grossolane di $a$, se esiste, si indica con $\alpha(a)$.

Esempio 5.5.15. (a) In $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$, con $X \in |\mathbf{Set}|, \forall E \in \mathcal{P}(X)$, $E \neq X$, $\alpha(E) = \{X \setminus \{e\} | e \notin E\} \cup \{X\}$ è la più grande famiglia grossolana di $E$ e $\alpha(X) = \{X\}$ è l'unica famiglia grossolana di $X$.

(b) In $(I, \leq)$, $\forall a \in (0,1]$, $\alpha(a) = (a, 1]$ è la più grande famiglia grossolana di $a$ e $\alpha(1) = \{1\}$ è l'unica famiglia grossolana di 1.

(c) In $(I^X, \leq)$, con $X \in |\mathbf{Set}|$, $\forall h \in I^X$, $\alpha(h) = \{f \in I^X | h \leq f \leq 1$ e $|\{x \in X | f(x) \neq 1\}| \leq 1\}$ è la più grande famiglia grossolana di $h$.

Teorema 5.5.16. *Se $(L, \leq)$ è un reticolo completo allora*

*$L$ è un reticolo completamente distributivo $\Leftrightarrow \forall a \in L\ \exists A \subseteq L$ famiglia grossolana di $a$.*

Dimostrazione. "$\Rightarrow$" Siano $L$ un reticolo completamente distributivo ed $a \in L$.

Posto

$$\mathcal{A} = \left\{A \subseteq L | \bigwedge A \leq a\right\}$$

poiché $\{a\} \in \mathcal{A}$ allora risulta $\mathcal{A} \neq \emptyset$.

Consideriamo $\mathcal{A}$ come una famiglia di sottoinsiemi di $L$

$$\mathcal{A} = \{A_i | i \in H\} \text{ e } A_i = \{a_{ij} | j \in J_i\}, \quad \forall i \in H.$$

Allora

$$A = \left\{ \bigvee_{i \in H} a_{if(i)} | f \in \prod_{i \in H} J_i \right\}$$

è una famiglia grossolana di $a$: infatti dalla definizione di $A_i$ e per la completa distributività segue che

$$\begin{aligned} \bigwedge A &= \bigwedge_{f \in \prod J_i} \left( \bigvee_{i \in H} a_{if(i)} \right) \\ &= \bigvee_{i \in H} a_{if(i)} \left( \bigwedge_{j \in J_i} a_{ij} \right) \\ &= \bigvee_{i \in H} \bigwedge A_i \\ &= a. \end{aligned}$$

Inoltre, se $B \subseteq L$ è tale che $\bigwedge B \leq a$, allora per definizione di $\mathcal{A}$, $\exists i_0 \in H$ tale che $B = A_{i_0}$. Ora, fissato $x \in A$, $\exists f \in \prod J_i$ tale che $x = \bigvee_{i \in H} a_{if(i)}$. Quindi, posto $y = a_{i_0 f(i_0)}$, risulta $y \in B$ e ovviamente $y \leq x$. Pertanto $\mathcal{A}$ è una famiglia grossolana di $a$.

"$\Leftarrow$" Per dimostrare che $L$ è un reticolo completamete distributivo proviamo la condizione (**CDII**), ovvero, posto $a = \bigvee_{i\in H}\left(\bigwedge_{j\in J_i} a_{ij}\right)$ si deve provare che

$$a = \bigwedge_{f\in\prod J_i}\left(\bigvee_{i\in H} a_{if(i)}\right).$$

$\forall i \in H$ e $\forall f \in \prod J_i$ risulta $\bigwedge_{j\in J_i} a_{ij} \leq a_{if(i)}$ e quindi $a \leq \bigvee_{i\in H} a_{if(i)}$, da cui segue che

$$a \leq \bigwedge_{f\in\prod J_i}\left(\bigvee_{i\in H} a_{if(i)}\right).$$

Consideriamo, ora, $\alpha(a)$, la più grande famiglia grossolana di $a$. $\forall i \in H$, sia $B_i = \{a_{ij} | j \in J_i\} \subseteq L$, allora $\bigwedge B_i = \bigwedge_{j\in J_i} a_i \leq a$.

Dalla definizione di famiglia grossolana segue che $\forall i \in H$ e $\forall x \in \alpha(a)$ $\exists j_i \in J_i : a_{ij_i} \leq x$. Considerata $f \in \prod_{i\in H} J_i$ definita $\forall i \in H$ da $f(i) = j_i$ allora $a_{if(i)} \leq x$, $\forall i \in H$.

Pertanto $\forall x \in \alpha(a)$ $\exists f \in \prod_{i\in H} J_i$ tale che $\bigvee_{i\in H} a_{if(i)} \leq x$ da cui segue che

$$\bigwedge_{f\in\prod_{i\in I} J_i}\left(\bigvee_{i\in H} a_{if(i)}\right) \leq \bigwedge \alpha(a) = a.$$

$\square$

DEFINIZIONE 5.5.17. *Sia $L$ un reticolo completo.*

*$A \subseteq L$ si dice **famiglia grossolana standard** di $a \in L$ se è una famiglia grossolana di $a$ formata da elementi primi.*

Osserviamo che se esiste $\alpha(a)$, famiglia grossolana massimale di $a$, allora la più grande famiglia grossolana standard è $\alpha^*(a) = \{x \in L | x \in \alpha(a), x \text{ primo}\}$.

COROLLARIO 5.5.18. *Se $L$ è un reticolo completo allora*

$$L \text{ completamente distributivo} \Leftrightarrow \forall a \in L\ \exists \alpha^*(a).$$

CAPITOLO 6

# $L$-Spazi Topologici

## 6.1. $L$-insiemi

DEFINIZIONE 6.1.1. *Sia $L$ un reticolo completo. Per ogni $X \in |\mathbf{Set}|$ si definisce **$L$-powerset** di $X$ il reticolo completo*

$$L^X = \{A : X \to L | A \ funzione\ arbitraria\}$$

*con la relazione indotta puntualmente da quella di $L$, per la quale $\forall A, B \in L^X$ risulta*

$$A \leq B \ \Leftrightarrow \ A(x) \leq B(x), \quad \forall x \in X.$$

Rispetto a tale relazione d'ordine $L^X$ è un reticolo completo in cui si verifica che i sup e gli inf sono deducibili da quelli di $L$ nel modo seguente: $\forall (A_i)_{i\in I} \subseteq L^X$, $\forall x \in X$

$$\left(\bigvee_{i\in I} A_i\right)(x) = \bigvee_{i\in I} (A_i(x))$$

e

$$\left(\bigwedge_{i\in I} A_i\right)(x) = \bigwedge_{i\in I} (A_i(x)).$$

*Gli elementi di $L^X$ si chiamano $L$-**insiemi** su ($o$ $L$-sottoinsiemi di) $X$. Il supporto di un $L$-insieme $A \in L^X$ è*

$$A_\perp = \{x \in X | A(x) \neq \perp\}.$$

*Se $Y \subseteq X$ e $\lambda \in L$, l'$L$-insieme $\lambda_Y \in L^X$ definito $\forall x \in X$ da*

$$\lambda_Y(x) = \begin{cases} \lambda & \text{se } x \in Y \\ \perp & \text{se } x \notin Y \end{cases}$$

*si dice $L$-insieme costante su $Y$.*

*Gli $L$-insiemi costanti su un singoletto $\{x\}$ di valore $\lambda \neq \perp$ si chiamano punti su $X$ e si indicano con $\lambda_x$.*

PROPOSIZIONE 6.1.2. *Se $L$ verifica la $(\mathbf{ILD}\infty)$ allora anche $L^X$ verifica la $(\mathbf{ILD}\infty)$.*

DIMOSTRAZIONE. Siano $A \in L^X$, $X \in |\mathbf{Set}|$, e $\mathcal{B} \subseteq L^X$. Poiché per ipotesi $L$ verifica (**ILD**$\infty$) allora $\forall x \in X$ risulta

$$\begin{aligned}\left(A \wedge \left(\bigvee \mathcal{B}\right)\right)(x) &= A(x) \wedge \left(\bigvee \mathcal{B}\right)(x)\\ &= A(x) \wedge \left(\bigvee \{B(x) | B \in \mathcal{B}\}\right)\\ &= \bigvee \{A(x) \wedge B(x) | B \in \mathcal{B}\}\\ &= \bigvee \{(A \wedge B)(x) | B \in \mathcal{B}\}\\ &= \left(\bigvee \{A \wedge B | B \in \mathcal{B}\}\right)(x)\end{aligned}$$

ovvero in $L^X$ si verifica (**ILD**$\infty$). □

Analogamente si verifica che se $L$ è un reticolo completamente distributivo, allora anche $L^X$ eredita da $L$ tale struttura.

PROPOSIZIONE 6.1.3. *Se in $L$ esiste un'involuzione che inverte l'ordine (o una complementazione) essa induce un'involuzione che inverte l'ordine (o una complemantazione) su $L^X$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia

$$\kappa : L \to L$$

un'involuzione che inverte l'ordine (o una complementazione) in $L$. Indichiamo con lo stesso simbolo, $\kappa$, l'applicazione

$$\kappa : L^X \to L^X$$

definita $\forall A \in L^X$ e $\forall x \in X$ da

$$\big(\kappa(A)\big)(x) = \kappa(A(x)).$$

$\kappa$ è un'involuzione che inverte l'ordine in $L^X$: infatti

- $\forall A \in L^X$ e $\forall x \in X$ si ha

$$\big(\kappa(\kappa(A))\big)(x) = \kappa\big(\kappa(A)(x)\big) = \kappa\big(\kappa(A(x))\big) = A(x)$$

ovvero $\kappa$ è un'involuzione.

- $\forall A, B \in L^X$, $\forall x \in X$, si ha

$$\begin{aligned}A \leq B &\Rightarrow A(x) \leq B(x)\\ &\Rightarrow \kappa(B(x)) \leq \kappa(A(x))\\ &\Rightarrow (\kappa(B))(x) \leq (\kappa(A))(x)\end{aligned}$$

ovvero $\kappa$ inverte l'ordine.

□

In particolare, da ciò segue che se $L$ è un'algebra di Boole o un'algebra di Hutton (ovvero un reticolo completo, completamente distributivo dotato di un'involuzione che inverte l'ordine), allora anche $L^X$ lo è.

Nelle proprietà seguenti sia $L$ un reticolo completo.

PROPOSIZIONE 6.1.4. *Se $a \in L$ è irriducibile allora $\forall x \in X$, $a_x$ è irriducibile.*

DIMOSTRAZIONE. Siano $x \in X$ ed $a \in L$, $a$ elemento irriducibile. Se $A, B \in L^X$ sono tali che $a_x = A \vee B$, allora $\forall x' \in X$, $x' \neq x$ risulta

$$A(x') \vee B(x') = (A \vee B)(x') = a_x(x') = \perp \Rightarrow A(x') = \perp \text{ e } B(x') = \perp$$

$$\begin{aligned} A(x) \vee B(x) = a \Rightarrow\ & A(x) = a \text{ o } B(x) = a \\ \Rightarrow\ & A = a_x \text{ o } B = a_x \end{aligned}$$

da cui segue la tesi. □

PROPOSIZIONE 6.1.5. *Se $a \in L$ è un atomo, allora, $\forall x \in X$, $a_x$ è un atomo.*

DIMOSTRAZIONE. Se $A \in L^X$, $A \neq \perp_X$ è tale che $A \leq a_x$, allora $A_\perp = \{x\}$ e $\perp \neq A(x) \leq a$ quindi essendo $a$ un atomo, $A(x) = a$, ovvero $A = a_x$, quindi $a_x$ è un atomo. □

PROPOSIZIONE 6.1.6. *Se $A \in L^X$ è irruducibile in $L^X$ allora $A_\perp = \{x\}$ e $A(x)$ è irriducibile in $L$ cioè $A$ è del tipo $a_x$ con $x \in X$ e $a \in L$ irriducibile.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $A \in L^X$ irriducibile in $L^X$. Se supponiamo per assurdo che $\exists x, x' \in A_\perp$, $x \neq x'$ allora

$$\bigvee_{y \neq x'} \big(A(y)\big)_y \vee \big(A(x')\big)_{x'} = A$$

ovvero $A$ è riducibile, che è assurdo! Pertanto, essendo $A \neq \perp_X$, segue che $A = a_x$. Inoltre $a$ è irriducibile in $L$; infatti, se

$$a = b \vee b', \text{ con } b, b' \in L$$

allora per l'irriducibilità di $A$ si ha

$$\begin{aligned} A = a_x = b_x \vee {b'}_x \Rightarrow\ & b_x = a_x \text{ o } {b'}_x = a_x \\ \Rightarrow\ & b = a \text{ o } b' = a. \end{aligned}$$

□

PROPOSIZIONE 6.1.7. *Se $A \in L^X$ è un atomo in $L^X$ allora $A_\perp = \{x\}$ e $A(x)$ è un atomo, cioè $A$ è del tipo $a_x$ con $x \in X$ e $a \in L$ atomo.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $A$ un atomo in $L^X$. Se ci fossero due elementi $x \neq x'$ tali che $x, x' \in A_\perp$, allora $\big(A(x)\big)_x$ sarebbe diverso dal minimo $\perp_X$ e strettamente minore di $A$, contro l'ipotesi che $A$ sia un atomo.

Quindi $A$ è del tipo $a_x$. Inoltre $a \in L$ è un atomo, altrimenti esisterebbe $a' \leq a$, $\perp \neq a' \neq a$ e allora sarebbe ${a'}_x \leq a_x = A$, con $\perp_X \neq {a'}_x \neq a_x$, che è assurdo. □

Definizione 6.1.8. *Sia* $f \in \mathbf{Set}(X, T)$.
*Si dice **operatore** $L$**-powerset inverso** associato a (o di) $f$ la funzione*

$$f_L^{\leftarrow} : L^T \to L^X$$

*definita* $\forall B \in L^T$ *da*

$$f_L^{\leftarrow}(B) = B \circ f.$$

Proposizione 6.1.9. *Sia* $f \in \mathbf{Set}(X, T)$.

(1) $f_L^{\leftarrow}$ *conserva* $\bigvee$, $\bigwedge$.
(2) *Se su* $L$ *è definita un'involuzione che inverte l'ordine* $\kappa : L \to L$, *allora* $f_L^{\leftarrow}$ *commuta con le involuzioni indotte da* $\kappa$ *su* $L^T$ *ed* $L^X$.

Dimostrazione. (1) Verifichiamo che $f_L^{\leftarrow}$ conserva $\bigwedge$.
Se $\mathcal{B} \subseteq L^T$ ed $x \in X$, allora

$$\begin{aligned} f_L^{\leftarrow}\left(\bigwedge \mathcal{B}\right)(x) &= \left(\left(\bigwedge \mathcal{B}\right) \circ f\right)(x) \\ &= \left(\bigwedge \mathcal{B}\right)(f(x)) \\ &= \bigwedge \{B(f(x)) | B \in \mathcal{B}\} \\ &= \bigwedge \{(f_L^{\leftarrow}(B))(x) | B \in \mathcal{B}\} \\ &= \left(\bigwedge f_L^{\leftarrow}(\mathcal{B})\right)(x). \end{aligned}$$

La dimostrazione è analoga per $\bigvee$.

(2) Se $B \in L^T$ allora

$$\begin{aligned} \big(f_L^{\leftarrow}(\kappa(B))\big)(x) &= \big(\kappa(B)\big)(f(x)) \\ &= \kappa\big(B(f(x))\big) \\ &= \kappa\big(f_L^{\leftarrow}(B)(x)\big) \\ &= \big(\kappa\big(f_L^{\leftarrow}(B)\big)\big)(x). \end{aligned}$$

$\square$

Osservazione 6.1.10. Poiché $f_L^{\leftarrow}$ conserva $\bigwedge$, per il Teorema del Funtore Aggiunto esiste un unico aggiunto a sinistra di $f_L^{\leftarrow}$,

$$f_L^{\rightarrow} : L^X \to L^T$$

definito, come è noto, $\forall A \in L^X$ da

$$f_L^{\rightarrow}(A) = \bigwedge \{B \in L^T | A \leq f_L^{\leftarrow}(B)\}$$

e detto **operatore powerset diretto** associato a (o di) $f$.

Sempre, dal Teorema del Funtore Aggiunto segue che $f_L^{\rightarrow}$ conserva $\bigvee$.

PROPOSIZIONE 6.1.11. *Se $f \in \mathbf{Set}(X,T)$, l'operatore $L$-powerset diretto di $f$ si può ottenere direttamente da $f$ mediante la seguente espressione.*

$$f_L^{\rightarrow}(A)(t) = \bigvee \{A(x) | x \in X : f(x) = t\}, \quad \forall A \in L^X, \quad \forall t \in T.$$

DIMOSTRAZIONE. Fissato un generico $t \in T$ e posto

$$\bigvee \{A(x) | x \in X : f(x) = t\} = a$$

e

$$\mathcal{B} = \{B \in L^T | A \leq f_L^{\leftarrow}(B)\}$$

allora

$$f_L^{\rightarrow}(A)(t) = \bigwedge \{B \in L^T | A \leq f_L^{\leftarrow}(B)\}(t) = \bigwedge \{B(t) | B \in \mathcal{B}\}.$$

Se $B \in \mathcal{B}$, allora $A(x) \leq B\big(f(x)\big) = f_L^{\leftarrow}(B)(x)$, $\forall x \in X$, quindi

$$A(x) \leq B\big(f(x)\big) = B(t), \quad \forall x \in X \ : \ f(x) = t$$

ovvero

$$a = \bigvee \{A(x) | f(x) = t\} \leq B(t)$$

da cui segue che

$$a \leq \bigwedge \{B(t) | B \in \mathcal{B}\}.$$

Se

$$\overline{B} = a_t \vee \Big(\bigvee \{\top_{t'} | t' \in T : t' \neq t\}\Big)$$

allora $\overline{B} \in L^T$ ed inoltre $\overline{B} \in \mathcal{B}$: infatti, $\forall x \in X$

$$f_L^{\leftarrow}(\overline{B})(x) = \begin{cases} \overline{B}(t) = a \ \text{ e } \ A(x) \leq a & \text{se } f(x) = t \\ \overline{B}\big(f(x)\big) = \top \ \text{ e } \ A(x) \leq \top & \text{se } f(x) \neq t. \end{cases}$$

Allora si ha

$$\bigwedge \{B(t) | B \in \mathcal{B}\} \leq \overline{B}(t) = a$$

e per doppia disuguaglianza segue la tesi. □

OSSERVAZIONE 6.1.12. Se $L = \mathit{2}$ l'$L$-powerset di un generico insieme $X$ è isomorfo all'insieme delle parti $\mathcal{P}(X)$, tramite l'identificazione di ogni sottoinsieme di $X$ con la sua funzione caratteristica.

L'operatore $\mathit{2}$-powerset diretto di $f \in \mathbf{Set}(X,T)$ si identifica, allora, con la corrispondenza che ad $A \subseteq X$ associa la cosiddetta immagine diretta di $A$

$$\{t \in T | \exists x \in A : f(x) = t\}.$$

L'operatore $\mathit{2}$-powerset inverso di $f$ è invece la corrispondenza che associa a $B \subseteq T$ la cosiddetta immagine inversa di $B$

$$\{x \in X | f(x) \in B\}.$$

Questi sono gli operatori powerset tradizionali (o classici), già considerati nell'Esempio 1.8.12 con differente notazione per i powerset

$$f^{\rightarrow} : \mathit{2}^X \rightarrow \mathit{2}^T \text{ ed } f^{\leftarrow} : \mathit{2}^T \rightarrow \mathit{2}^X.$$

PROPOSIZIONE 6.1.13.

(1) *Se* $f \in \mathbf{Set}(X,T)$, $g \in \mathbf{Set}(T,S)$, *allora*
  (1.a) $(g \circ f)_L^{\rightarrow} = g_L^{\rightarrow} \circ f_L^{\rightarrow}$.
  (1.b) $(g \circ f)_L^{\leftarrow} = f_L^{\leftarrow} \circ g_L^{\leftarrow}$.

(2) $\forall X \in |\mathbf{Set}|$,
$$(i_X)_L^{\rightarrow} = i_{L^X} = (i_X)_L^{\leftarrow}.$$

DIMOSTRAZIONE. (1) Siano $f \in \mathbf{Set}(X,T)$, $g \in \mathbf{Set}(T,S)$.

(1.a) Se $A \in L^X$ ed $s \in S$ si ha
$$(g \circ f)_L^{\rightarrow}(A)(s) = \bigvee \{A(x) | x \in X : g \circ f(x) = s\}$$
e
$$\begin{aligned} g_L^{\rightarrow} \circ f_L^{\rightarrow}(A)(s) &= \bigvee \{f_L^{\rightarrow}(A)(t) | t \in T : g(t) = s\} \\ &= \bigvee \left\{ \left( \bigvee \{A(x) | x \in X : f(x) = t\} \right) | t \in T : g(t) = s \right\} \\ &= \bigvee \{A(x) | x \in X : \exists t \in T \text{ con } f(x) = t, g(t) = s\} \\ &= \bigvee \{A(x) | x \in X : g(f(x)) = s\}. \end{aligned}$$

(1.b) Sia $C \in L^S$, allora
$$\begin{aligned} (g \circ f)_L^{\leftarrow}(C) &= C \circ (g \circ f) \\ &= (C \circ g) \circ f \\ &= f_L^{\leftarrow}(C \circ g) \\ &= f_L^{\leftarrow} \circ g_L^{\leftarrow}(C). \end{aligned}$$

(2) Sia $A \in L^X$, allora
$$(i_X)_L^{\leftarrow}(A) = A \circ i_X = A = i_{L^X}(A).$$

Analogamente si dimostra l'altra uguaglianza. □

La proposizione 6.1.13 consente di poter dare la seguente Definizione.

DEFINIZIONE 6.1.14. *Le corrispondenze*
$$X \in |\mathbf{Set}| \longmapsto \rightarrow_L (X) = L^X$$
*ed*
$$f \in \mathbf{Set}(X,T) \longmapsto \rightarrow_L (f) = f_L^{\rightarrow}$$
*definiscono un funtore*
$$\rightarrow_L : \mathbf{Set} \rightarrow \bigvee\text{-}\mathbf{CSLat}.$$

*Le corrispondenze*
$$X \in |\mathbf{Set}| \longmapsto \leftarrow_L (X) = L^X$$
*ed*
$$f \in \mathbf{Set}(X,T) \longmapsto \leftarrow_L (f) = f_L^{\leftarrow}$$

*definiscono un funtore controvariante*

$$\leftarrow_L \colon \mathbf{Set} \to \mathbf{CLat}.$$

*I funtori $\to_L$ ed $\leftarrow_L$ sono detti **funtori $L$-powerset**, rispettivamente, diretto ed inverso.*

## 6.2. $L$-Spazi Topologici

In questo paragrafo supporremo che $L$ sia almeno un frame.

DEFINIZIONE 6.2.1. *Siano $X \in |\mathbf{Set}|$ ed $L \in |\mathbf{Frm}|$.*

*Una $L$-**topologia** $\tau$ su $X$ è un sottosemireticolo $\bigvee$-completo dell'$L$-powerset di $X$, cioè una famiglia $\tau \subseteq L^X$ chiuso per $\bigvee$ e $\wedge$ in $L^X$.*

*La coppia $(X, \tau)$ si dice $L$-**spazio topologico** con sostegno $X$ ed $L$-topologia $\tau$.*

Gli elementi di $\tau$ si dicono ***aperti*** dell'$L$-spazio topologico.

Se in $L$, e quindi in $L^X$, è fissata una involuzione $\kappa$ che inverte l'ordine, le immagini tramite $\kappa$ degli aperti della $L$-topologia si dicono i ***chiusi*** dell'$L$-spazio topologico.

OSSERVAZIONE 6.2.2. Una $\mathit{2}$-topologia ed un $\mathit{2}$-spazio topologico sono, semplicemente, una topologia ed uno spazio topologico.

Vari concetti (come quello di intorno, chiusura$\cdots$) e vari assiomi (compattezza, separazione$\cdots$) si possono introdurre negli $L$-spazi topologici in modo analogo che negli spazi topologici tradizionali, in cui la complementazione dell'algebra di Boole $\mathcal{P}(X)$ è l'involuzione che inverte l'ordine utilizzata per la determinazione dei chiusi dello spazio.

Tali estensioni presentano difficoltà tecniche di vario tipo, poiché l'$L$-powerset di $X$, cui appartengono gli aperti dell'$L$-spazio topologico $(X, \tau)$, è un reticolo più generale del powerset classico $\mathcal{P}(X)$ che, come è noto è un'algebra di Boole completa e atomica.

In generale, invece, si suppone che $L$, e quindi $L^X$, sia un frame (condizione indispensabile perchè anche $\tau$ risulti essere sicuramente un frame) o un reticolo completamente distributivo o un'algebra di Hutton.

DEFINIZIONE 6.2.3. *Siano $(X, \tau)$, $(T, \delta)$ due $L$-spazi topologici.*

*Un'applicazione $f : X \to T$ si dice **continua** se il suo operatore $L$-powerset inverso $f_L^{\leftarrow}$ verifica la condizione*

$$f_L^{\leftarrow}(B) \in \tau, \quad \forall B \in \delta$$

*cioè si può ridurre ad una funzione*

$$f_L^{\leftarrow} : \delta \to \tau$$

*che, evidentemente, è un morfismo di frame.*

Osserviamo che dalla funtorialità di $\leftarrow_L$ segue che la composizione di funzioni continue è continua.

Inoltre, la funzione identica $i_X$ è continua qualunque sia la $L$-topologia considerata su $X$; ciò segue subito dal fatto che il suo operatore $L$-powerset inverso è la funzione identica $i_{L^X}$.

DEFINIZIONE 6.2.4. *Fissato un reticolo completo $L$, indichiamo con*

$$L\text{-}\mathbf{Top}$$

*la categoria avente per oggetti gli $L$-spazi topologici e per morfismi fra gli oggetti $(X,\tau)$, $(T,\delta)$ le funzioni continue fra tali $L$-spazi topologici. Composizione ed identità sono le stesse che in* **Set**.

Evidentemente, $L$-**Top** è una categoria concreta.

## 6.3. $(L, M)$-Spazi Topologici

DEFINIZIONE 6.3.1. *Siano $X \in |\mathbf{Set}|$, $L, M \in |\mathbf{CDLat}|$.*
*Una $(L,M)$-**topologia** $\tau$ su $X$ è un $M$-insieme sull'$L$-powerset di $X$*

$$\tau : L^X \to M$$

*che verifica le seguenti condizioni:*

(1) $\tau(\bot_X) = \tau(\top_X) = \top$.
(2) $\tau(A) \wedge \tau(A') \leq \tau(A \wedge A')$, $\forall A, A' \in L^X$.
(3) $\bigwedge \{\tau(A) | A \in \mathcal{A}\} \leq \tau(\bigvee \mathcal{A})$, $\forall \mathcal{A} \subseteq \tau$.

E' evidente che una $(L, 2)$-topologia si identifica con una $L$-topologia e una $(2, 2)$-topologia si identifica con una topologia tradizionale.

*La coppia $(X,\tau)$ con $X \in |\mathbf{Set}|$ e $\tau : L^X \to M$ $(L,M)$-topologia su $X$, si dice $L$-spazio $M$-topologico o anche $(L,M)$-**spazio topologico**.*

OSSERVAZIONE 6.3.2. Gli assiomi (1), (2), (3) sono equivalenti agli assiomi:
(a) $\mathcal{F} \subseteq L^X$, $\mathcal{F}$ finito $\Rightarrow \bigwedge \{\tau(F) | F \in \mathcal{F}\} \leq \tau(\bigwedge \mathcal{F})$.
(b) $\mathcal{A} \subseteq L^X \Rightarrow \bigwedge \{\tau(A) | A \in \mathcal{A}\} \leq \tau(\bigvee \mathcal{A})$.

In particolare l'assioma (1) si ottiene da (a) e (b) considerando, rispettivamente, $\mathcal{F} \doteq \emptyset$ e $\mathcal{A} = \emptyset$.

DEFINIZIONE 6.3.3. *Siano $(X,\tau)$, $(T,\delta)$ due $(L,M)$-spazi topologici.*
*Una funzione*

$$f : X \to T$$

*si dice **continua** tra tali spazi e si scrive*

$$f : (X,\tau) \to (T,\delta)$$

*se verifica la condizione*

$$\delta(B) \leq \tau\big(f_L^{\leftarrow}(B)\big), \quad \forall B \in L^T$$

*o equivalentemente,*

$$\delta \leq (f_L^{\leftarrow})_M^{\leftarrow}(\tau).$$

In effetti possiamo osservare che

$$f_L^{\leftarrow} : L^T \to L^X, \ (f_L^{\leftarrow})_M^{\leftarrow} : M^{L^X} \to M^{L^T},$$
$$\tau \in M^{L^X}, \ \delta \in M^{L^T}$$

e ricordando la definizione degli operatori $L$-powerset si ha

$$(f_L^{\leftarrow})_M^{\leftarrow}(\tau) = \tau \circ f_L^{\leftarrow}$$

il che permette di provare la suddetta equivalenza.

OSSERVAZIONE 6.3.4. 1. $(X, \tau)$ è un $(L, M)$-spazio topologico allora $i_X : X \to X$ è continua, infatti poiché $(i_X)_L^{\leftarrow} = i_{L^X}$ segue che

$$\tau\big((i_X)_L^{\leftarrow}(B)\big) = \tau(B), \quad \forall B \in L^X.$$

2. Se $f : (X, \tau) \to (T, \delta)$, $g : (T, \delta) \to (S, \sigma)$ sono continue, allora

$$g \circ f : (X, \tau) \to (S, \sigma)$$

è continua; infatti $\forall B \in L^S$ si ha

$$\sigma(B) \leq \delta\big(g_L^{\leftarrow}(B)\big) \leq \tau\big(f_L^{\leftarrow}\big(g_L^{\leftarrow}(B)\big)\big) = \tau\big((g \circ f)_L^{\leftarrow}(B)\big).$$

DEFINIZIONE 6.3.5. *Indichiamo con*

$$(L, M)\text{-}\mathbf{Top}$$

*la categoria concreta avente per oggetti gli $(L, M)$-spazi topologici e per morfismi fra due oggetti le applicazioni continue fra essi.*

## 6.4. Reticoli Strutturati e Categorie Ground di $L$-insiemi

DEFINIZIONE 6.4.1. *Un* ***reticolo strutturato*** *è una coppia*

$$(L, \Phi)$$

*in cui $L$ è un reticolo completo e $\Phi = \{\varphi_a\}_{a \neq \bot}$ è una famiglia di morfismi di semireticoli $\bigwedge$-completi*

$$\varphi_a : L \to [\bot, a], \quad \forall a \in L, \ a \neq \bot.$$

$\forall \varphi_a \in \Phi$, l'aggiunta a sinistra di $\varphi_a$,

$$\varphi_a^{\dashv} : [\bot, a] \to L,$$

è, ovviamente, un morfismo di semireticoli $\bigvee$-completi.

DEFINIZIONE 6.4.2. *Sia* $Y \in L^X$.
*L'intervallo*

$$[\bot_X, Y] = \{A \in L^X | A \leq Y\}$$

*si chiama* ***powerset*** *dell'L-insieme* $Y$ *e si indica con*

$$\mathcal{S}_Y = [\bot_X, Y].$$

OSSERVAZIONE 6.4.3. *Se si considera* $L^X$ *come una categoria ordinata e* $Y$ *come suo oggetto, allora* $\mathcal{S}_Y$ *risulta essere l'insieme di tutti e soli i sottooggetti di* $Y$.

DEFINIZIONE 6.4.4. *Siano* $(L, \Phi)$ *un reticolo strutturato e* $B$ *un L-insieme,* $B \in L^X$.

*L'****operatore compressione*** *sul powerset* $\mathcal{S}_B$ *di* $B$ *(o semplicemente su* $B$*), è l'applicazione*

$$p_B : L^X \to \mathcal{S}_B$$

*definita,* $\forall A \in L^X$, $\forall x \in X$ *da*

$$p_B(A)(x) = \begin{cases} \varphi_{B(x)}\big(A(x)\big) & \text{se } x \in B_\bot \\ \bot & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

*L'****operatore sollevamento*** *dal powerset* $\mathcal{S}_B$ *di* $B$ *(o semplicemente da* $B$*), è l'applicazione*

$$l_B : \mathcal{S}_B \to L^X$$

*definita,* $\forall C \in \mathcal{S}_B$, $\forall x \in X$ *da*

$$l_B(C)(x) = \begin{cases} \varphi^{\dashv}_{B(x)}\big(C(x)\big) & \text{se } x \in B_\bot \\ \bot & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

OSSERVAZIONE 6.4.5. $\forall x \in X$, con $x \notin C_\bot$, si ha $l_B(C)(x) = \bot$: se $x \notin B_\bot$ la tesi segue dalla definizione dell'operatore sollevamento, se invece $x \in B_\bot$, allora l'affermazione segue dal fatto che $\varphi^{\dashv}_{B(x)}$ conserva $\bigvee$.

PROPOSIZIONE 6.4.6. *Se* $(L, \Phi)$ *è un reticolo strutturato e* $B$ *è un L-insieme,* $B \in L^X$, *allora valgono le seguenti proprietà:*

(1) $p_B$ *è un morfismo di semireticoli* $\bigwedge$*-completi.*
(2) $l_B$ *è un morfismo di semireticoli* $\bigvee$*-completi.*
(3) $l_B \dashv p_B$.

DIMOSTRAZIONE. (1) Siano $\{A_j\}_{j\in J} \subseteq L^X$ e $x \in X$. Se $x \in B_\perp$, allora

$$\begin{aligned}
\left(p_B\left(\bigwedge_{j\in J} A_j\right)\right)(x) &= \varphi_{B(x)}\left(\left(\bigwedge_{j\in J} A_j\right)(x)\right)\\
&= \varphi_{B(x)}\left(\bigwedge_{j\in J} A_j(x)\right)\\
&= \bigwedge_{j\in J} \varphi_{B(x)}\big(A_j(x)\big)\\
&= \bigwedge_{j\in J} \big(p_B(A_j)(x)\big)\\
&= \left(\bigwedge_{j\in J} p_B(A_j)\right)(x).
\end{aligned}$$

Se $x \notin B_\perp$, risulta

$$\left(p_B\left(\bigwedge_{j\in J} A_j\right)\right)(x) = \perp = \left(\bigwedge_{j\in J} p_B(A_j)\right)(x).$$

(2) La dimostrazione è analoga a quella del punto (1) e comunque è conseguenza delle verifiche dei punti (1) e (3) per il Teorema del Funtore Aggiunto.

(3) Per ottenere la tesi verifichiamo che valgono le disuguaglianze di aggiunzione.

Siano $C \in \mathcal{S}_B$ e $x \in X$.

Se $x \in B_\perp$ allora

$$\begin{aligned}
(p_B \circ l_B)(C)(x) &= p_B\big(l_B(C)\big)(x)\\
&= \varphi_{B(x)}\big(\varphi^{\dashv}_{B(x)}(C(x))\big)\\
&= \varphi_{B(x)} \circ \varphi^{\dashv}_{B(x)}\big(C(x)\big)
\end{aligned}$$

e poiché $\varphi^{\dashv}_{B(x)} \dashv \varphi_{B(x)}$ si ha

$$C(x) \leq \varphi_{B(x)} \circ \varphi^{\dashv}_{B(x)}\big(C(x)\big)$$

quindi segue

$$C(x) \leq (p_B \circ l_B)(C)(x).$$

Se $x \notin B_\perp$, allora $x \notin C_\perp$ e quindi

$$(p_B \circ l_B)(C)(x) = \perp = C(x).$$

Siano, ora, $A \in L^X$ e $x \in X$. Se $x \in B_\perp$, $\varphi^{\dashv}_{B(x)} \dashv \varphi_{B(x)}$ e quindi

$$\begin{aligned}(l_B \circ p_B)(A)(x) &= l_B\big(p_B(A)\big)(x) \\ &= \varphi^{\dashv}_{B(x)} \circ \varphi_{B(x)}\big(A(x)\big) \leq A(x).\end{aligned}$$

Se, invece, $x \notin B_\perp$ risulta

$$l_B \circ p_B(A)(x) = \perp \leq A(x).$$

□

DEFINIZIONE 6.4.7. *Sia* $(L, \Phi)$ *un reticolo strutturato. Se* $Y \in L^X$, $Z \in L^T$ *sono due L-insiemi ed*

$$f : X \to T$$

*è un'applicazione fra i loro rispettivi sostegni si definiscono* ***operatore powerset diretto*** *di* $f$ *relativo ad* $Y$ *e* $Z$ *rispetto ad* $(L, \Phi)$

$$f^{\rightarrow}_{(L,\Phi)(Y,Z)} : \mathcal{S}_Y \to \mathcal{S}_Z$$

*ed* ***operatore powerset inverso*** *di* $f$ *relativo ad* $Y$ *e* $Z$ *rispetto ad* $(L, \Phi)$

$$f^{\leftarrow}_{(L,\Phi)(Y,Z)} : \mathcal{S}_Z \to \mathcal{S}_Y$$

*le applicazioni definite, rispettivamente, da*

$$f^{\rightarrow}_{(L,\Phi)(Y,Z)} = p_Z \circ f^{\rightarrow}_L \circ l_Y$$

*ed*

$$f^{\leftarrow}_{(L,\Phi)(Y,Z)} = p_Y \circ f^{\leftarrow}_L \circ l_Z.$$

Tali operatori sono, evidentemente, delle applicazioni isotone.

DEFINIZIONE 6.4.8. *Sia* $(L, \Phi)$ *un reticolo strutturato.*

*Una* ***categoria ground*** *su* $(L, \Phi)$ *è una categoria concreta* $\mathbf{C}$ *avente per oggetti L-insiemi e per morfismi* $f \in \mathbf{C}(Y, Z)$, *con* $Y, Z \in |\mathbf{C}|$, $Y \in L^X$ *e* $Z \in L^T$, *le applicazioni*

$$f : X \to T$$

*tali che*

$$f^{\leftarrow}_{(L,\Phi)(Y,Z)} \in \mathbf{CLat}(\mathcal{S}_Z, \mathcal{S}_Y)$$

*ed*

$$f^{\rightarrow}_{(L,\Phi)(Y,Z)} \dashv f^{\leftarrow}_{(L,\Phi)(Y,Z)}.$$

Dal Teorema del Funtore Aggiunto segue che l'operatore powerset diretto associato ad un morfismo in una categoria ground è un morfismo di semireticoli $\bigvee$-completi.

E' abbastanza immediato verificare che se $\mathbf{C}$ è una categoria ground ed $\mathcal{A} \subseteq \mathbf{C}$ è una sua sottocategoria allora anche $\mathcal{A}$ è una categoria ground.

DEFINIZIONE 6.4.9. *Sia* $(L, \Phi)$ *un reticolo strutturato. La* ***categoria ground standard*** *su* $(L, \Phi)$, *se esiste, è una categoria ground* $\mathbf{D}$ *su* $(L, \Phi)$ *che contiene come sottocategoria ogni categoria ground* $\mathbf{C}$ *su* $(L, \Phi)$.

PROPOSIZIONE 6.4.10. *Se $(L, \Phi)$ è un reticolo strutturato, valgono le seguenti proprietà:*

(1) *Esiste una categoria ground avente per oggetti tutti gli $L$-insiemi se e solo se $\varphi_a$ è suriettiva, $\forall a \in L$, $a \neq \perp$.*
(2) *Se $\varphi_a$ è suriettiva, $\forall a \in L$, $a \neq \perp$, allora la possibile categoria ground standard deve contenere come oggetti tutti gli $L$-insiemi.*

DIMOSTRAZIONE. (1) Se $Y \in L^X$ è un $L$-insieme, allora

$$(i_X)^{\rightarrow}_{(L,\Phi)(Y,Y)} = p_Y \circ l_Y = (i_X)^{\leftarrow}_{(L,\Phi)(Y,Y)}.$$

La categoria concreta avente per oggetti tutti gli $L$-insiemi e per morfismi le funzioni identiche è una categoria ground se e solo se $p_Y \circ l_Y$ è un morfismo di reticoli completi ed è autoaggiunto, o, equivalentemente, autoinverso, per ogni $L$-insieme $Y \in L^X$.

Se vale la condizione $p_Y \circ l_Y \circ p_Y \circ l_Y = i_{\mathcal{S}_Y}$, $\forall Y \in L^X$ o, equivalentemente, $\varphi_a \circ (\varphi_a^{\dashv} \circ \varphi_a \circ \varphi_a^{\dashv}) = i_{[\perp,a]}$, $\forall a \in L$, $a \neq \perp$, allora ciò porta a dire che $\varphi_a$ è suriettiva, $\forall a \in L$, $a \neq \perp$.

Viceversa dalla suriettività di $\varphi_a$ segue che $\varphi_a \circ \varphi_a^{\dashv} = i_{[\perp,a]}$ e quindi $p_Y \circ l_Y = i_{\mathcal{S}_Y}$ è un morfismo di reticoli completi ed è autoaggiunto.

Da ciò segue la tesi.

(2) E' ovvia conseguenza della parte (1) e della Definizione 6.4.8. □

Se $(L, \Phi)$ è un reticolo strutturato la relazione di **mapping to** su $L$ è definita nel modo seguente.

DEFINIZIONE 6.4.11. *Siano $a, b \in L$. Si dice che $a$ **maps to** $b$, in simboli*

$$a \nearrow b,$$

*se $a = \perp$ o $a \neq \perp \neq b$ e*

$$\varphi_a \circ \varphi_b^{\dashv}(b) = a.$$

PROPOSIZIONE 6.4.12. *$\nearrow$ è una relazione di pre-ordine.*

DIMOSTRAZIONE. - $\nearrow$ è riflessiva: infatti poiché, $\forall a \in L$, $a \neq \perp$, $\varphi_a^{\dashv} \dashv \varphi_a$ e $\varphi_a^{\rightarrow}(L) \subseteq [\perp, a]$, allora $a \leq \varphi_a \circ \varphi_a^{\dashv}(a) \leq a$.

- $\nearrow$ è transitiva: infatti se $a \nearrow b$ e $b \nearrow c$, con $a, b, c \in L$, allora se $a = \perp$ risulta ovviamente $a \nearrow c$. Se $a \neq \perp$, allora $b \neq \perp \neq c$ e dalle ipotesi e dall'aggiunzione $\varphi_b^{\dashv} \dashv \varphi_b$ segue che

$$\begin{aligned} a &= \varphi_a \circ \varphi_b^{\dashv}(b) \\ &= \varphi_a \circ \varphi_b^{\dashv}(\varphi_b \circ \varphi_c^{\dashv}(c)) \\ &= \varphi_a(\varphi_b^{\dashv} \circ \varphi_b(\varphi_c^{\dashv}(c))) \\ &\leq \varphi_a(\varphi_c^{\dashv}(c)) \leq a \end{aligned}$$

cioè $a \nearrow c$.

□

Il fatto che $\nearrow$ sia una relazione di pre-ordine permette di definire la seguente categoria:

DEFINIZIONE 6.4.13. *Se* $(L, \Phi)$ *è un reticolo strutturato allora indichiamo con* $(L, \Phi)$-**Set** *la categoria avente per oggetti tutti gli* $L$*-insiemi e per morfismi fra due ogetti* $Y \in L^X$ *e* $Z \in L^T$ *le applicazioni*

$$f : X \to T$$

*che soddisfano la seguente condizione*

$$Y(x) \nearrow Z(f(x)), \ \forall x \in X.$$

*Composizione ed identità sono le medesime di* **Set**.

La relazione di mapping to svolge il ruolo di selezionare tutti i possibili morfismi da mettere in una categoria ground su un reticolo strutturato, come mostra la seguente proprietà:

TEOREMA 6.4.14. *Sia* $(L, \Phi)$ *un reticolo strutturato. Ogni categoria ground su* $(L, \Phi)$ *è una sottocategoria di* $(L, \Phi)$-**Set**.

DIMOSTRAZIONE. Se $\mathbf{C}$ è una categoria ground su $(L, \Phi)$ allora, ovviamente, $|\mathbf{C}| \subseteq |(L, \Phi)\text{-}\mathbf{Set}|$.

Se $f \in \mathbf{C}(Y, Z)$, con $Y \in L^X$ e $Z \in L^T$ allora, poiché $\mathbf{C}$ è una categoria ground su $(L, \Phi)$, risulta che $f^{\leftarrow}_{(L,\Phi)(Y,Z)}$ è un morfismo di reticoli completi.

In particolare si ha

$$f^{\leftarrow}_{(L,\Phi)(Y,Z)}(\bot_T) = \bot_X \text{ e } f^{\leftarrow}_{(L,\Phi)(Y,Z)}(Z) = Y.$$

Ne segue che $\forall x \in Y_\bot$ si ha $\varphi_{Y(x)}(\bot) = \bot$; infatti:

$$\begin{aligned} \bot &= \bot_X(x) \\ &= p_Y\big(f^{\leftarrow}_L\big(l_Z(\bot_T)\big)\big)(x) \\ &= p_Y\big(f^{\leftarrow}_L(\bot_T)\big)(x) \\ &= \varphi_{Y(x)}\big(\bot_T(f(x))\big) \\ &= \varphi_{Y(x)}(\bot). \end{aligned}$$

Da ciò segue che $f(x) \in Z_\bot$, infatti se così non fosse, ovvero se $f(x) \notin Z_\bot$, si avrebbe

$$\begin{aligned} \bot \neq Y(x) &= p_Y\big(f^{\leftarrow}_L\big(l_Z(Z)\big)\big)(x) \\ &= \varphi_{Y(x)}\big(l_Z(Z)(f(x))\big) \\ &= \varphi_{Y(x)}(\bot) = \bot, \end{aligned}$$

che è assurdo.

Ora, $\forall x \in Y_\perp$ si ha

$$\begin{aligned} Y(x) &= f^{\leftarrow}_{(L,\Phi)(Y,Z)}(Z)(x) \\ &= p_Y \circ f^{\leftarrow}_L \circ l_Z(Z)(x) \\ &= \varphi_{Y(x)}\big(f^{\leftarrow}_L(l_Z(Z))(x)\big) \\ &= \varphi_{Y(x)}\big(l_Z(Z)(f(x))\big) \\ &= \varphi_{Y(x)} \circ \varphi^{\dashv}_{Z(f(x))}\big(Z(f(x))\big). \end{aligned}$$

Pertanto, $\forall x \in X$ si ha che $Y(x) \nearrow Z\big(f(x)\big)$. Da ciò segue che $f \in (L,\Phi)$-**Set**$(Y,Z)$ e quindi, per l'arbitrarietà di $f$, **C** è una sottocategoria di $(L,\Phi)$-**Set**. □

COROLLARIO 6.4.15. *Sia $(L,\Phi)$ un reticolo strutturato.*

*Se $(L,\Phi)$-**Set** è una categoria ground su $(L,\Phi)$, allora $(L,\Phi)$-**Set** è una categoria ground standard su $(L,\Phi)$.*

□

ESEMPIO 6.4.16. Se $L$ è un frame, $\forall a \in L$, $a \neq \perp$ sia

$$\varphi_a = a \wedge * : L \to [\perp, a]$$

l'applicazione definita $\forall x \in L$ da

$$\varphi_a(x) = a \wedge x.$$

La coppia $(L, \mathcal{A} = \{a \wedge *\}_{a \neq \perp})$ è un reticolo strutturato.

Il morfismo aggiunto a sinistra di $\varphi_a$

$$\varphi^{\dashv}_a : [\perp, a] \to L,$$

è dato $\forall x \in [\perp, a]$ da

$$\varphi^{\dashv}_a(x) = \bigwedge \{y \in L | x \leq \varphi_a(y)\} = x$$

ovvero esso è la funzione inclusione.

Se $B \in L^X$ è un $L$-insieme allora si verifica facilmente che l'operatore compressione su $B$ e l'operatore sollevamento da $B$ sono definiti rispettivamente da

$$p_B(A) = B \wedge A, \ \forall A \in L^X$$

e

$$l_B(C) = C, \quad \forall C \in \mathcal{S}_B.$$

La relazione di mapping to in tale reticolo coincide con la relazione d'ordine $\leq$ del reticolo $L$. Infatti $\perp \nearrow b$ e $\perp \leq b$, $\forall b \in L$ e se $a \neq \perp$,

$$\begin{aligned} a \nearrow b &\Leftrightarrow \ \varphi_a(\varphi^{\dashv}_b(b)) = a \\ &\Leftrightarrow \ b \wedge a = a \\ &\Leftrightarrow \ a \leq b. \end{aligned}$$

La categoria $(L,\mathcal{A})$-**Set** risulta una categoria ground standard su $(L,\mathcal{A})$; la verifica di tale proprietà è analoga alla dimostrazione del Teorema 6.4.14.

I morfismi da $Y \in L^X$ in $Z \in L^T$ in tale categoria sono evidentemente le funzioni

$$f : X \to T$$

che verificano la condizione

$$Y(x) \leq Z\big(f(x)\big), \ \forall x \in X.$$

Per una tale funzione si ha che

$$f_L^{\rightarrow}(A) \in \mathcal{S}_Z, \ \forall A \in \mathcal{S}_Y.$$

Infatti, $\forall t \in T$,

$$\begin{aligned} f_L^{\rightarrow}(A)(t) &= \bigvee \big\{A(x) | x \in X : f(x) = t\big\} \\ &\leq \bigvee \big\{Y(x) | x \in X : f(x) = t\big\} \\ &\leq Z(t). \end{aligned}$$

Ne segue che l'operatore powerset diretto di un tale morfismo è definito $\forall A \in \mathcal{S}_Y$ da

$$\begin{aligned} f_{(L,\mathcal{A})(Y,Z)}^{\rightarrow}(A) &= (p_Z \circ f_L^{\rightarrow} \circ l_Y)(A) \\ &= p_Z\big(f_L^{\rightarrow}(A)\big) \\ &= f_L^{\rightarrow}(A) \wedge Z \\ &= f_L^{\rightarrow}(A). \end{aligned}$$

L'operatore powerset inverso, invece, è definito $\forall B \in \mathcal{S}_Z$ da

$$\begin{aligned} f_{(L,\mathcal{A})(Y,Z)}^{\leftarrow}(B) &= (p_Y \circ f_L^{\leftarrow} \circ l_Z)(B) \\ &= p_Y\big(f_L^{\leftarrow}(B)\big) \\ &= f_L^{\leftarrow}(B) \wedge Y \\ &= (B \circ f) \wedge Y. \end{aligned}$$

ESEMPIO 6.4.17. Sia $I = [0, 1]$ l'intervallo unitario. Per ogni $0 < a \leq 1$, sia

$$\varphi_a = a \cdot * : I \to [0, a]$$

l'applicazione definita $\forall x \in I$ da

$$\varphi_a(x) = a \cdot x.$$

Si verifica facilmente che $\varphi_a$ è un isomorfismo di reticoli completi e quindi la sua aggiunta a sinistra è l'isomorfismo inverso

$$\begin{gathered} \varphi_a^{-1} : [0, a] \to I \\ x \mapsto \varphi_a^{-1}(x) = \frac{x}{a}. \end{gathered}$$

La coppia

$$\big(I, \mathcal{G} = \big\{a \cdot *\big\}_{a \neq 0}\big)$$

è un reticolo strutturato.

In questo caso, la relazione di mapping to non è una relazione d'ordine, infatti, $\forall a, b \in I$, $a \nearrow b$, eccetto nel caso in cui $b = 0$ e $a \neq 0$. Infatti $0 \leq b$ e $0 \nearrow b$, $\forall b \in I$ e, se $a \neq 0 \neq b$ si ha $\varphi_a \circ \varphi_b^{-1}(b) = \varphi_a(1) = a$.

Gli operatori compressione e sollevamento sono definiti rispettivamente da

$$p_B(A)(x) = A(x) \cdot B(x) = (A \cdot B)(x) \ \forall A, B \in I^X, \quad \forall x \in X$$

e

$$l_B(C)(x) = \frac{C(x)}{B(x)} \begin{cases} (C \div B)(x) & \text{se } x \in B_\perp \\ 0 & \text{se } x \notin B_\perp \end{cases} \qquad \forall B \in I^X, \quad \forall C \in \mathcal{S}_B.$$

Anche in questo caso, la categoria $(I, \mathcal{G})$-**Set** è una categoria ground standard su $(I, \mathcal{G})$.

I morfismi da $Y \in I^X$ in $Z \in I^T$ in tale categoria sono tutte le funzioni

$$f : X \to T$$

che verificano la condizione

$$f^{\rightarrow}(Y_0) \subseteq Z_0.$$

Gli operatori powerset relativi a $(I, \mathcal{G})$ di una tale funzione sono definiti $\forall A \in \mathcal{S}_Y$, $\forall B \in \mathcal{S}_Z$, $\forall t \in T$, se $t \in Z_0$ da

$$\begin{aligned} f^{\rightarrow}_{(I,\mathcal{G})(Y,Z)}(A)(t) &= (p_Z \circ f_I^{\rightarrow} \circ l_Y(A))(t) \\ &= \varphi_{Z(t)} \left( \bigvee \left\{ l_Y(A)(x) | x \in X : f(x) = t \right\} \right) \\ &= \bigvee \left\{ l_Y(A)(x) \cdot Z(t) | x \in X : f(x) = t \right\} \\ &= \bigvee \left\{ l_Y(A)(x) \cdot Z(t) | x \in Y_0 : f(x) = t \right\} \\ &= \bigvee \left\{ \frac{Z(t)}{Y(x)} A(x) | x \in Y_0 : f(x) = t \right\} \end{aligned}$$

se $t \notin Z_0$ da

$$f^{\rightarrow}_{(I,\mathcal{G})(Y,Z)}(A)(t) = 0.$$

$\forall x \in X$, se $x \in Y_0$ si ha

$$\begin{aligned} f^{\leftarrow}_{(I,\mathcal{G})(Y,Z)}(B)(x) &= (p_Y \circ f_I^{\leftarrow} \circ l_Z(B))(x) \\ &= \varphi_{Y(x)} \big( l_Z(B)(f(x)) \big) \\ &= Y(x) \cdot \frac{B(f(x))}{Z(f(x))} = \frac{Y(x)}{Z(f(x))} \cdot B(f(x)) \end{aligned}$$

se $x \notin Y_0$ risulta

$$f^{\leftarrow}_{(I,\mathcal{G})(Y,Z)}(B)(x) = 0.$$

# Bibliografia


[1] J. Adámek, H. Herrlich, G. E. Strecker, *Abstract and concrete categories*, J. Wiley & Sons, New York, 1990.

[2] C. De Mitri, C. Guido, *Some remarks on fuzzy powerset operators*, Fuzzy Sets and System **126** (2002) 241-251.

[3] A. Frascella, *Spazi Topologici e Proprietà Topologiche su Insiemi Fuzzy*, Tesi di Laurea in Matematica, Università di Lecce, a.a. 2002-2003.

[4] A. Frascella, C. Guido, *Structured Lattices and Ground Categories of L-sets*, Preprint del Dipartimento di Matematica-Università di Lecce, n. 20/2004.

[5] G. Gierz, K. H. Hofmann, K. Keimel, J. D. Lawson, M. Mislove, D. S. Scott, *A Compendium of Continous Lattices,* Springer-Verlag, Berlin, 1980.

[6] G. Gierz, K. H. Hofmann, K. Keimel, J. D. Lawson, M. Mislove, D. S. Scott, *Continuous Lattices and Domains*, Encyclopedia of Mathematics Vol 93, Cambridge University Press, 2003.

[7] U. Höhle , S. E. Rodabaugh, *Mathenatics of Fuzzy Sets: Logic, Topology and Measure Theory*, The Handbooks of Fuzzy Sets Series, Vol 3 (1999), Kluwer Academic Publishers(Dordrecht).

[8] P. T. Johnstone, *Stone Spaces*, Cambrige Univ. Press, Cambridge, 1982.

[9] B. Laudando, *Topologie e Reticoli Completi*, Tesi di Laurea in Matematica, Università di Lecce, a.a. 2001-2002.

[10] S. MacLane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[11] G. N. Raney, *Completely distributive complete lattices*, Proc. Amer. Math. Soc. vol. 3 (1952), 677-680.

[12] G. N. Raney, *A subdirect-union representation for completely distributive complete lattice*, Proc. Amer. Math. Soc. vol. 4 (1953), 518-522.

[13] S. E. Rodabaugh and E. P. Klement, eds, *Topological and Algebraic Structures in Fuzzy Sets*, Kluwer Academic Publishers (Dordrecht/Boston/London) 2003.

Finito di stampare nel mese di aprile 2005
presso lo stabilimento tipolitografico della **TorGraf** di Galatina (Le) - Tel. 0836.561417