Il momento angolare L è pertanto un vettore perpendicolare al piano individuato da r e v. Se i due momenti sono calcolati rispetto allo stesso punto vale la relazione:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \qquad (4)$$

Quindi se il momento delle forze M è nullo allora il momento angolare L è una costante del moto. Questo avviene se la particella è libera ($F = 0$), oppure quando la direzione della forza è parallela a quella di r, cioè ogni volta che la forza è una forza di tipo centrale. Questo è il caso sia del campo gravitazionale che di quello elettrico. Un pianeta che si muove attorno al Sole, per la conservazione del momento angolare, deve allora percorrere un'orbita piana. Per conoscere la forma di tale orbita, è sufficiente tenere presente che, una particella in moto sotto l'azione di forze centrali, descrive una sezione conica, cioè una circonferenza, un'ellisse, una parabola o un'iperbole, secondo il valore della sua energia totale. L'energia totale è la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale. In un sistema composto di due particelle, di cui una molto più massiva dell'altra, si ha che il centro di massa del sistema, coincide con la posizione della particella di massa maggiore. Nel caso, per esempio, del sistema Terra-Sole, l'energia posseduta dalla Terra è data da:

$$E_{tot} = \frac{1}{2}m_T v^2 - \frac{G \cdot m_S \cdot m_T}{r} \qquad (5)$$

dove m_T è la massa e v la velocità della Terra, m_S la massa del Sole ed r la distanza relativa. Alla distanza cui si trova la Terra, un corpo di massa trascurabile rispetto al Sole, segue un'orbita ellittica se ha una velocità inferiore a 42 km/s (e infatti la velocità orbitale della Terra è circa 30 km/s); se la velocità raggiunge i 42 km/s, allora l'orbita diviene parabolica ed il corpo si allontana all'infinito; se supera questo valore il corpo va verso l'infinito lungo un'orbita iperbolica. In realtà, ogni pianeta esercita un'attrazione sugli altri, sebbene molto minore di quella solare. Questo fa sì che le orbite non siano delle ellissi perfette, ma risentano delle perturbazioni gravitazionali degli altri pianeti.

La Seconda Legge afferma che la velocità areale è una costante del moto. Una particella che descrive una traiettoria curvilinea, si sposta in un intervallo di tempo dt da P a P', ed il raggio vettore spazza l'area tratteggiata corrispondente al triangolo OPP' (v. Fig. 4). L'area di tale triangolo è:

$$dA = areaOPP' = \frac{1}{2}r \cdot (rd\theta) = \frac{1}{2}r^2 d\theta \qquad (6)$$

L'area spazzata nell'unità di tempo è:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2 \frac{d\theta}{dt} \qquad (7)$$

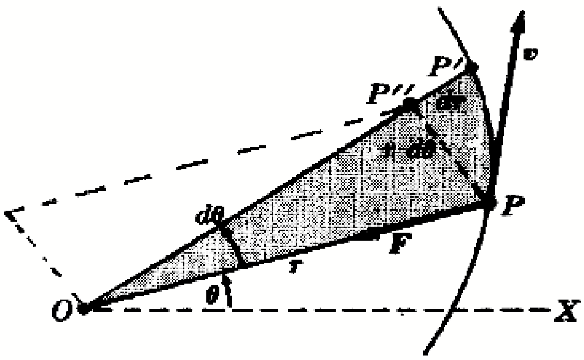

Figura 4: Area spazzata dal raggio vettore

Il momento angolare della particella è una costante essendo il campo di forze centrale:

$$L = mr^2 \frac{d\theta}{dt} = costante \qquad (8)$$

Confrontando le equazioni (7) e (8) si deduce che l'area spazzata dal raggio vettore della particella nell'unità di tempo è costante, che è quanto si voleva dimostrare. Tra l'altro, questo implica anche che la velocità del pianeta in prossimità del perielio è maggiore di quella all'afelio, cosa che poteva essere dedotta anche dalla conservazione dell'energia dell'equazione (5).

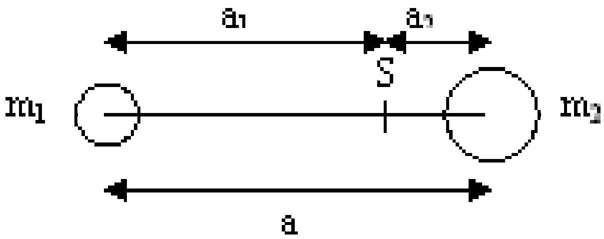

Figura 5: Baricentro del sistema

Per ricavare la Terza Legge di Keplero consideriamo il caso semplice di orbite circolari. Siano date due masse m_1 ed m_2 e siano a_1 ed a_2 le rispettive distanze dal comune baricentro S con $a = a_1 + a_2$ (v. Fig. 5).

Dalla definizione di baricentro si sa che:

$$m_1 a_1 = m_2 a_2 = \left(\frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}\right) \qquad (9)$$

Per ciascuna massa la forza di attrazione gravitazionale deve uguagliare la forza centrifuga. Se P è il periodo orbitale del sistema, si ha per la massa a_1:

$$m_1 \cdot \omega^2 \cdot a_1 = m_1 \left(\frac{2\Pi}{P}\right)^2 a_1 = \frac{G m_1 m_2}{a^2} \qquad (10)$$

e sostituendo al posto di $m_1 a_1$ la (9), ed elidendo i termini simili, si ottiene la Terza Legge di Keplero in forma generalizzata:

$$\frac{a^3}{P^2} = \frac{G(m_1 + m_2)}{4\pi^2} \qquad (11)$$

In realtà, sia il Sole sia il pianeta ruotano attorno al baricentro comune, ma poiché il primo è molto più massiccio del secondo, il baricentro coincide quasi con il centro del Sole e quindi la sola rivoluzione evidente è quella del pianeta attorno ad esso.
Facendo uso di questa legge è stato relativamente facile ricavare le masse dei pianeti, studiando il moto dei loro satelliti o, in maniera ancora più accurata, utilizzando, dove questo è stato possibile, le masse note delle sonde spaziali.
Il trionfo della Meccanica di Newton si ebbe nel 1846, quando fu scoperto Nettuno, grazie ai calcoli di Adams e Le Verrier, che si erano basati unicamente sullo studio delle orbite di Giove e Saturno e sulle anomalie riscontrate nell'orbita di Urano. In tempi molto più recenti e con lo stesso approccio, è stato possibile inviare sonde spaziali, incontro ad asteroidi e comete, come la sonda NEAR che è addirittura atterrata sull'asteroide Eros, o la sonda Giotto che passò a soli 500 km dal nucleo della cometa di Halley.

Dopo aver mostrato l'aspetto fisico-matematico delle leggi precedenti, per facilitare la visualizzazione dei fenomeni ad esse connessi, sono stati inseriti nella presentazione alcuni video, realizzati con rigore matematico, in cui si vedeva una loro concreta applicazione.
È stato così possibile osservare la variazione della velocità orbitale della Stazione Spaziale Internazionale, (*clip* da cui è stato estratto il fotogramma in Fig. 6) al variare della sua distanza dalla Terra, la rotazione dei satelliti di Giove ed effettuare un sorvolo ravvicinato degli anelli di Saturno. Il viaggio nello Spazio si è concluso con una folle corsa attraverso il Sistema Solare, a bordo della cometa di Halley.

Figura 6: La ISS in orbita

In realtà l'osservazione del cielo stellato consente anche un viaggio nel Tempo. Per quanto possa risultare strano, è quanto realmente avviene a causa della velocità finita della luce, che costituisce il mezzo di trasmissione delle informazioni. Lo aveva intuito già Galilei, ma sarà necessario attendere le osservazioni di Roemer (1676) delle eclissi di Io e la scoperta dell'aberrazione della luce ad opera di Bradley (1726) per avere la prova decisiva. Oggi sappiamo che niente può muoversi più velocemente della luce, come imposto dal Secondo Postulato della Relatività Speciale di Einstein e verificato in moltissimi esperimenti. La conseguenza immediata è che la distanza si può tradurre in tempo-luce; così la Luna che si trova a 384000 km è anche a poco più di 1 secondo-luce, mentre il Sole è a circa 150 milioni di km, ossia 8 minuti-luce.

L'immagine in figura 7 ritrae uno dei gioielli del cielo invernale, la Grande Nebulosa di Orione. La luce di questa straordinaria regione di gas e polveri, registrata con la strumentazione del piccolo Osservatorio del Dipartimento di Fisica dell'Università di Lecce, è stata emessa 1950 anni fa, nel 50 d.c. Se trasformiamo questo valore negli usuali km verrebbe fuori un numero astronomico, tanto incomprensibile per la nostra capacità di visualizzazione, da sconsigliare questo calcolo. E siamo ancora dentro il cortile di casa. Da un posto buio, in autunno, è possibile percepire ad occhio nudo una piccola nubecola nella costellazione di Andromeda: si tratta di M31, la galassia compagna della nostra Via Lattea, che dista da noi circa 2 milioni di anni-luce. Un ipotetico osservatore di un pianeta di quella galassia, guardando nella nostra direzione in questo momento, vedrebbe la Via Lattea come era 2 milioni di anni fa. Se in primavera puntiamo i telescopi verso la Chioma di Berenice, allora lo sguardo si spinge verso le profondità del cosmo. I fotoni raccolti dai rivelatori sono stati emessi miliardi di anni fa, quando il

Figura 7: La Grande Nebulosa di Orione

Sistema Solare ancora non esisteva.
C'è da rimanere quanto meno disorientati davanti a simili constatazioni.
Ma quanto ci si può spingere indietro nel tempo?
Fin quasi all'origine dell'Universo, quando la materia e la radiazione si disaccoppiarono, poche centinaia di migliaia di anni dopo il Big-Bang. Ci sono una serie di indicazioni, che fanno pensare che le attuali teorie cosmologiche siano abbastanza attendibili fino a tempi infinitesimi dall'inizio del Tutto. Naturalmente sono delle teorie e come tali suscettibili di modifiche, quando non, addirittura, di essere accantonate in futuro. E tuttavia è innegabile che, se si riesce a coniugare, almeno a grandi linee, la componente fisico-matematica in esse contenuta con l'osservazione diretta degli astri, non si può non rimanere estasiati e gioire come un bambino sulla spiaggia, intento a "...raccogliere di quanto in quanto un ciottolo più liscio degli altri, o una conchiglia più bella, mentre il grande oceano della verità gli si estende davanti, immenso ed inesplorato" (Isaac Newton).

Riferimenti bibliografici

[1] S. Rosati: *Fisica generale*, Casa Editrice Ambrosiana

[2] Alonso/Finn: *Elementi di Fisica per l'Università*, Masson Italia Editori

[3] *General History of Astronomy*, Cambridge University Press

[4] N. Copernico: *De Revolutionibus Orbium coelestium*, Einaudi

[5] G. Galilei: *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo*, Einaudi

[6] G. Galilei: *Sidereus Nuncius*, Marsilio

[7] I. Newton: *Principi matematici della Filosofia naturale*, UTET

[8] A. Einstein: *Opere scelte*, Bollati Boringhieri

[9] *Astronomia - Alla scoperta del Cielo*, Curcio Editore

[10] Lucrezio: *La natura delle cose*, BUR

[11] Ovidio: *Le metamorfosi*, BUR