

Metodi avanzati per la Fluidodinamica Numerica

Paola Cinnella

Dipartimento di Ingegneria dell'Innovazione - Università degli Studi di Lecce
paola.cinnella@unile.it

Introduzione

La Fluidodinamica Numerica è una disciplina “trasversale” che si situa al crocevia tra Matematica, Fisica, Ingegneria ed Informatica. Fra le attività di ricerca che ricadono sotto tale denominazione è possibile menzionare, da una parte, lo sviluppo di modelli matematici per la descrizione del moto dei fluidi, dall'altra, la messa a punto e l'implementazione di metodi numerici per la risoluzione di tali modelli e, infine, l'utilizzo dei codici di calcolo così costruiti per l'analisi di particolari condizioni di flusso e per la progettazione e verifica di applicazioni tecnologiche.

Il presente lavoro si prefigge di illustrare l'utilità, nell'ambito della Fluidodinamica Numerica, della costruzione di un codice numerico “ambiente”, che serva di supporto alle attività di ricerca sopra descritte. L'obiettivo perseguito è la messa a punto di un codice, di concezione quanto più possibile modulare, che permetta in modo semplice l'inserimento e la validazione di nuovi modelli matematici e metodi numerici e che possa essere utilizzato per lo studio di una gamma abbastanza vasta di flussi comprimibili. Tale codice è sinteticamente descritto nel paragrafo 1. Nel paragrafo 2 vengono illustrate, a titolo di esempio, alcune applicazioni nel campo dell'aeroelasticità non stazionaria e della fluidodinamica dei gas densi. Nel paragrafo 3, infine, si tirano le conclusioni e si presenta qualche prospettiva.

1 CODICE DI CALCOLO

1.1 Equazioni di governo

Il codice risolve le equazioni di Eulero comprimibili o le equazioni di Navier-Stokes comprimibili mediate alla Reynolds e chiuse da un modello di turbolenza. Le leggi di conservazione, scritte in forma integrale rispetto ad un volume di controllo variabile nel tempo, $\Omega(t)$, di frontiera $\Gamma(t)$, sono della forma:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} w \, d\Omega + \oint_{\Gamma(t)} \mathbf{f}(w) \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma = 0 \quad (1)$$

dove w rappresenta il vettore delle variabili conservative, $\mathbf{f}(w)$ la densità di flusso, che può essere decomposta in una componente inviscida, $\mathbf{f}^e - w\mathbf{s}$

—dove il secondo termine rappresenta il contributo alla densità di flusso dovuto allo spostamento della superficie di controllo ed \mathbf{s} rappresenta la velocità locale di tale superficie—, e una parte dissipativa, \mathbf{f}^v , ed \mathbf{n} rappresenta la normale esterna alla superficie di controllo. La parte viscosa del flusso comprende anche il contributo degli sforzi turbolenti. La forma scelta per le equazioni di controllo presenta un duplice vantaggio. Essa infatti si presta in modo naturale all'implementazione di un metodo di tipo Volumi Finiti, particolarmente adeguato per il calcolo di flussi caratterizzati da discontinuità come onde d'urto e discontinuità di contatto; essa consente inoltre di gestire in modo semplice griglie di calcolo deformabili, quindi di simulare flussi attorno a corpi in movimento.

Le equazioni del moto devono essere chiuse mediante l'aggiunta di una legge di stato e, per i flussi turbolenti, anche di un opportuno modello di turbolenza. Per quanto riguarda le equazioni di stato, oltre a quella dei gas perfetti politropici, sono al momento disponibili nel codice l'equazione di stato detta dei "gas rigidi" (*stiffened gas*) e l'equazione di van der Waals. Riguardo ai modelli di turbolenza, è possibile scegliere tra diversi modelli del tipo cosiddetto "a viscosità turbolenta", che ipotizzano un legame lineare tra il tensore degli sforzi di Reynolds ed il tensore velocità di deformazione, in analogia con quanto avviene per il tensore degli sforzi di Cauchy. Essi si differenziano tra loro per la modalità di calcolo del coefficiente di viscosità turbolenta, che può essere assegnato mediante un'espressione algebrica (modello algebrico di Baldwin e Lomax [1]), ovvero previa risoluzione di una o più equazioni differenziali alle derivate parziali aggiuntive, dette equazioni di trasporto della turbolenza (modello ad una equazione di Spalart e Allmaras [17], modelli a due equazioni " $k - \varepsilon$ " [12] e " $k - l$ " [16]). In alternativa, è possibile scegliere modelli più sofisticati [8],[4], che prevedono un legame non lineare tra sforzi turbolenti e velocità di deformazione e che risultano più accurati nella rappresentazione di flussi complessi, con forti gradienti di pressione, curvatura importante delle linee di corrente e distacco dello strato limite.

1.2 Descrizione del metodo numerico

Discretizzazione spaziale

Il sistema di equazioni (1) è discretizzato mediante una metodologia del tipo Volumi Finiti. Il dominio fluido è suddiviso in celle (quadrangolari per problemi bidimensionali, ottaedriche in tre dimensioni) per mezzo di una griglia di calcolo di tipo strutturato. Come incognite del problema si scelgono i valori delle variabili conservative nei centroidi delle celle. Le equazioni di conservazione (1) vengono scritte per ogni cella della griglia:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_J(t)} w \, d\Omega + \sum_I \int_{\Gamma_{J_I}(t)} \mathbf{f}(w) \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma = 0 \quad (2)$$

dove il pedice J indica la generica cella e l rappresenta la l -esima faccia della cella stessa. A questo punto occorre stabilire delle approssimazioni per gli integrali di volume e di superficie che compaiono nella (2). Lo schema così ottenuto, nel quale resta ancora indeterminata la discretizzazione della derivata temporale, si dice *semidiscreto*, e le approssimazioni numeriche degli integrali di volume e di superficie costituiscono la *discretizzazione spaziale* scelta. Lo schema semidiscreto può essere scritto nella forma:

$$\frac{d}{dt}(w_J|\Omega_J|) + \sum_l (\mathbf{h}_l \cdot \mathbf{n}|\Gamma_{J_l}|) \quad (3)$$

dove il simbolo $|\cdot|$ indica una misura (volume o superficie) e dove il vettore \mathbf{h} , detto *flusso numerico*, dipende dall'approssimazione scelta, ed è quindi caratteristico dello schema considerato. Così come la densità di flusso fisica, anche il flusso numerico può essere scomposto in una parte inviscida, \mathbf{h}^e , ed una parte contenente gli effetti dissipativi, \mathbf{h}^v .

Per l'approssimazione dei termini inviscidi, il codice permettere di scegliere tra un metodo *upwind* accurato al second'ordine e un metodo centrato accurato al terz'ordine. La discretizzazione *upwind* si basa sul noto solutore approssimato di Riemann proposto da Roe nel 1981 [15]. L'accuratezza al second'ordine è ottenuta mediante estrapolazione MUSCL [18] delle variabili conservative e la formazione di oscillazioni spurie in prossimità di urti e discontinuità di contatto è prevenuta mediante l'applicazione di un limitatore di flusso. Al fine di selezionare l'unica soluzione debole fisicamente rilevante, il metodo prevede l'uso della correzione d'entropia proposta da Harten e Hyman [9].

Per alcune applicazioni può risultare più conveniente utilizzare uno schema numerico centrato, che non richiede una conoscenza dettagliata dei campi caratteristici del flusso e che, in generale, risulta meno costoso in termini di tempi di calcolo. Per questo il codice permette di selezionare, in alternativa alla discretizzazione *upwind*, uno schema centrato accurato al terz'ordine [10], ottenuto mediante correzione dell'errore principale dello schema centrato classico accurato al second'ordine. Lo schema corretto risulta accurato al quart'ordine. Onde prevenire la formazione di oscillazioni spurie, è però necessario aggiungere un termine di dissipazione numerica. La scelta ricade su una combinazione di derivate seconde e quarte del vettore w [11], che introduce un errore del terz'ordine lontano dalle discontinuità del flusso. Lo schema dissipativo risulta in definitiva accurato al terz'ordine nelle zone regolari del flusso. La formulazione è studiata in modo da tener conto delle irregolarità della griglia di calcolo, al fine di garantire un elevato ordine di accuratezza anche su griglie non cartesiane [14].

Per la parte viscosa del flusso è prevista un'approssimazione centrata classica, accurata al second'ordine.

Integrazione temporale

Una volta effettuata la discretizzazione spaziale, il sistema di leggi di conservazione si riduce ad un sistema di equazioni differenziali ordinarie, della forma:

$$\frac{dw}{dt} + \mathcal{L}(w) = 0, \quad (4)$$

dove \mathcal{L} rappresenta l'operatore discretizzazione spaziale. Il metodo scelto per l'integrazione numerica del sistema (4) dipende dal tipo di flusso in esame.

Se il flusso considerato è stazionario, il sistema (4) è approssimato mediante un metodo di Runge–Kutta a quattro passi [11]. Dal momento che si è interessati alla sola soluzione stazionaria, l'accuratezza dell'integrazione temporale scelta è ininfluente, mentre è importante, per ragioni di efficienza, convergere il più rapidamente possibile verso lo stato stazionario. Si possono allora utilizzare tutta una serie di tecniche che permettono di accelerare la convergenza verso lo stato stazionario a scapito dell'accuratezza temporale. Il transitorio numerico così calcolato non ha un significato fisico (ragion per cui si parla di "falso transitorio"), ma è da interpretarsi come una successione di approssimazioni della soluzione stazionaria cercata. Fra le tecniche di accelerazione della convergenza previste citiamo l'uso di un passo d'integrazione locale, variabile da cella a cella (*local time stepping*), la redistribuzione implicita dei residui (*implicit residual smoothing*) e il multigrid.

Se il flusso considerato è instazionario, il sistema (4) viene integrato mediante schemi *multistep* impliciti retrogradi, accurati al secondo o al terz'ordine. Il sistema totalmente discreto è della forma:

$$\frac{\mathcal{D}w^{n+1}}{\Delta t} + \mathcal{L}(w^{n+1}) = 0, \quad (5)$$

dove \mathcal{D} rappresenta la formula di discretizzazione retrograda prescelta, Δt rappresenta il passo di integrazione temporale (costante e uguale per tutte le celle) e l'apice n è utilizzato per designare la soluzione numerica calcolata all'istante $t^n = n\Delta t$. La soluzione del sistema non lineare di equazioni algebriche (5) è calcolata, ad ogni nuovo livello temporale, mediante una tecnica iterativa nota come "metodo del doppio passo d'integrazione temporale" (*Dual Time Stepping*). Tale tecnica consiste nell'aggiungere al sistema (5) una derivata rispetto ad una variabile temporale fittizia, τ , ottenendo così il nuovo sistema di equazioni differenziali ordinarie:

$$\frac{dw}{d\tau} + \mathcal{L}^*(w) = 0, \quad (6)$$

con $\mathcal{L}^*(w) = \mathcal{L}(w) + \frac{\mathcal{D}w}{\Delta t}$, e nel calcolare la soluzione del sistema (5), coincidendo con lo stato stazionario del sistema (6), risolvendo un falso transitorio rispetto al tempo fittizio τ . La convergenza di quest'ultimo può essere

accelerata mediante l'uso di tutte le tecniche tipiche dei flussi stazionari precedentemente illustrate.

Per maggiori dettagli si rinvia al riferimento bibliografico [7].

2 APPLICAZIONI

2.1 Aeroelasticità non stazionaria

L'aeroelasticità è la disciplina che studia le interazioni che intercorrono tra una struttura e il mezzo fluido in moto in cui essa è immersa. In particolare, l'aeroelasticità non stazionaria studia i carichi aerodinamici applicati e i modi di vibrazione per una struttura che interagisca con un flusso variabile nel tempo. Il lavoro qui presentato si indirizza in particolar modo all'analisi aeroelastica di palettature di turbomacchina. Tale analisi risulta cruciale per lo sviluppo dei fan e compressori aeronautici di ultima generazione e per gli stadi di bassa pressione delle turbine che, per via dell'esiguo numero di palette utilizzate (per motivi di peso) si trovano sottoposti a forti carichi aerodinamici. A questo si aggiunge la flessibilità dei materiali utilizzati (tipicamente, sempre per motivi di peso, leghe e compositi leggeri). In queste condizioni il flusso, che si sviluppa in regime transonico e può dunque essere caratterizzato dalla presenza di onde d'urto, interazioni urto/strato limite e distacchi di vena, è fortemente instazionario e agisce da forzante sulle strutture, che entrano in vibrazione. Le strutture possono per altro entrare in vibrazione per cause non fluidodinamiche ed eccitare i modi propri del flusso, che può rispondere smorzando le vibrazioni della struttura o amplificandole.

Nel seguito del paragrafo si illustra un esempio di applicazione del codice fluidodinamico sopra descritto all'analisi aeroelastica di una schiera piana di palette di turbina vibranti nel primo modo di flessione [6]. Il flusso in turbina è transonico (Mach isentropico di uscita pari a 0.99), turbolento (numero di Reynolds basato sulla corda della pala e condizioni in ingresso alla schiera pari a 1.2×10^6) e caratterizzato da una bolla di separazione al bordo d'attacco, causata dalla forte incidenza (34°) del flusso in ingresso. Le pale vibrano sinusoidalmente in direzione normale alla corda, con un'ampiezza di vibrazione pari allo 0.35% della corda e una frequenza ridotta (basata sulle condizioni di uscita e la semi-corda) pari a 0.1545. Si suppone inoltre che due pale successive vibrino in opposizione di fase. I risultati qui presentati sono stati ottenuti utilizzando una discretizzazione *upwind* per i termini inviscidi e il modello di Spalart e Allmaras per la descrizione degli sforzi turbolenti. In figura 1 si mostra la distribuzione mediata nel tempo delle linee isobare nella schiera; la figura 2 illustra l'andamento delle linee di corrente in prossimità del bordo d'attacco; in figura 3 è rappresentata la distribuzione (mediata nel tempo) del numero di Mach isentropico a parete ottenuta risolvendo diversi modelli matematici (equazioni di Eulero, equazioni di Navier–Stokes mediate più modello di Baldwin e Lomax,

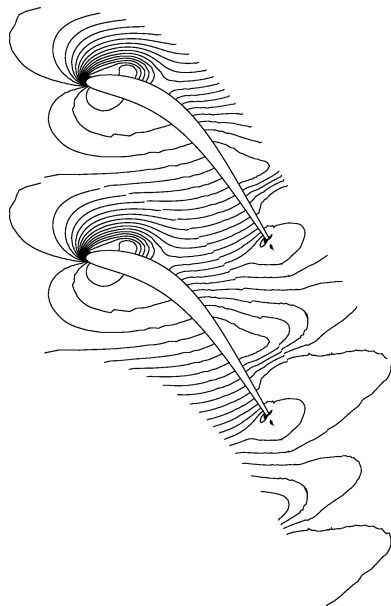


Figura 1: Flusso transonico in turbina. Linee isobare ($\Delta C_p = 0.075$).

equazioni di Navier–Stokes mediate più modello di Spalart e Allmaras) e si effettua un confronto con i dati sperimentali disponibili [3]. La figura 4 mostra la distribuzione a parete dell’ampiezza e della fase della prima armonica del coefficiente di pressione per diversi modelli e presentano un confronto con i dati sperimentali. Dall’analisi dei risultati emerge l’importanza di tenere adeguatamente conto degli effetti viscosi al fine di ottenere un buon accordo con i dati sperimentali. I risultati migliori si ottengono risolvendo le equazioni di Navier–Stokes mediate chiuse dal modello ad un’equazione di trasporto di Spalart e Allmaras.

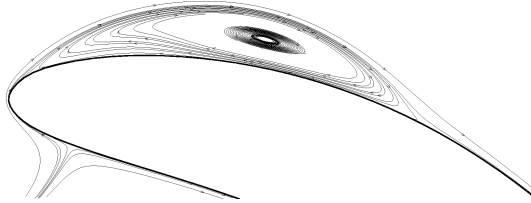


Figura 2: Linee di corrente.

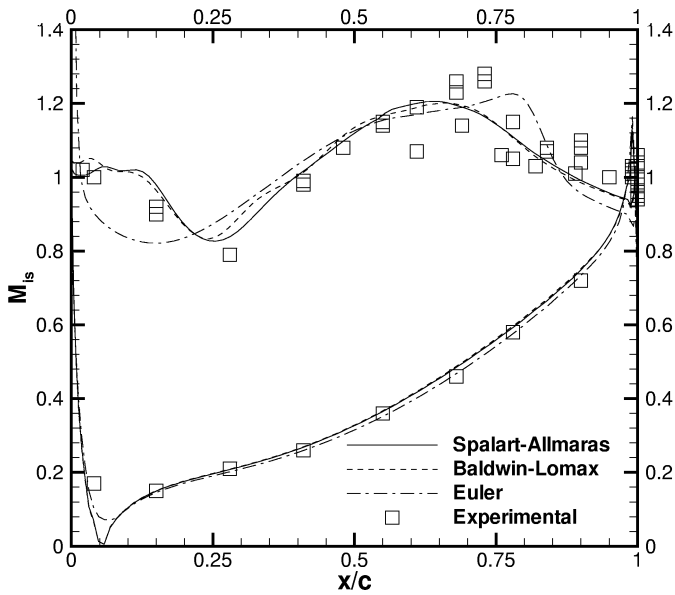


Figura 3: Distribuzione media del numero di Mach isentropico a parete.

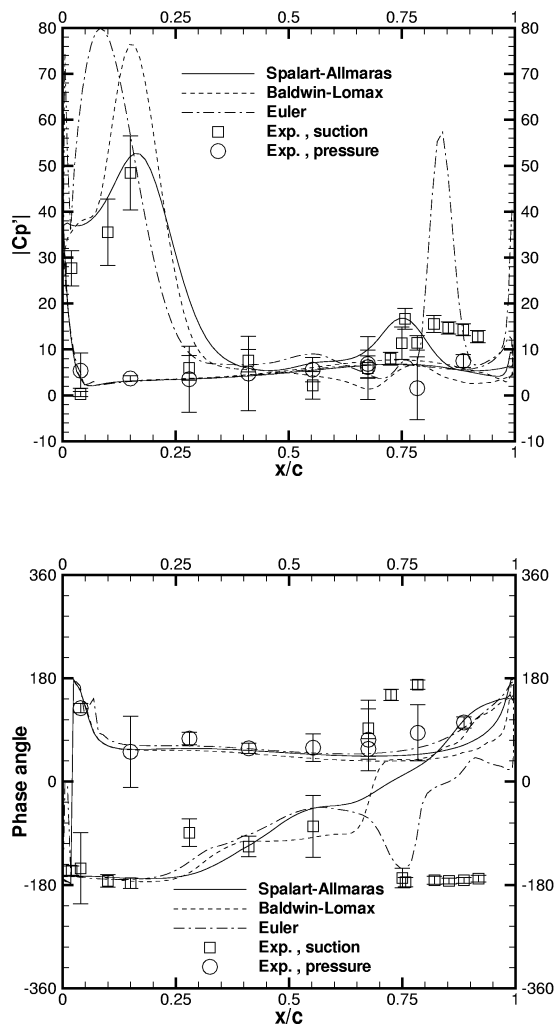


Figura 4: Ampiezza (sopra) e fase (sotto) della prima armonica del coefficiente di pressione lungo la pala.

2.2 Dinamica dei gas densi

La denominazione “dinamica dei gas densi” indica lo studio di flussi monofase di gas soprasaturi, in condizioni di temperatura e pressione dell’ordine del punto critico liquido/vapore. Tra i gas densi, particolarmente interessanti risultano i cosiddetti gas di Bethe–Zel’dovich–Thompson (o BZT, così denominati dal nome dei tre ricercatori che per primi ne postularono l’esistenza), fluidi dotati di elevati calori specifici e grande complessità molecolare, che presentano un comportamento non lineare “anomalo” in regime transonico e supersonico con condizioni termodinamiche prossime alla curva limite superiore. Tale anomalia può essere spiegata utilizzando le note relazioni di Rankine-Hugoniot e il secondo principio della Termodinamica. Si dimostra infatti [2] che il salto di entropia attraverso un’onda d’urto può essere espresso come:

$$\Delta s = - \left(\frac{\partial^2 p}{\partial v^2} \right)_s \frac{(\Delta v)^3}{12T} + \mathcal{O}((\Delta v)^4), \quad (7)$$

dove s è l’entropia specifica, p la pressione del fluido, v il volume specifico, T la temperatura assoluta e dove il simbolo Δ sta ad indicare il salto della quantità considerata attraverso l’urto. Si vede allora come il segno del salto di entropia dipenda dalla concavità delle linee isentropiche nel piano di Amagat ($p - v$). Tale concavità risulta, per la grande maggioranza dei gas, dappertutto positiva. Nel caso dei fluidi BZT, tuttavia, esiste una zona più o meno estesa del piano di Amagat, situata immediatamente al di sopra della curva limite superiore, in cui la concavità risulta negativa. Tale zona viene prende il nome di “zona d’inversione”. In figura 5 sono illustrate la curva limite superiore, le linee isentropiche, isoterme e il confine della zona d’inversione per un gas di van der Waals politropico avente un rapporto tra calori specifici pari a 1.0125. La quantità indicata sul diagramma con il simbolo Γ è una versione adimensionale della derivata seconda $\left(\frac{\partial^2 p}{\partial v^2} \right)_s$.

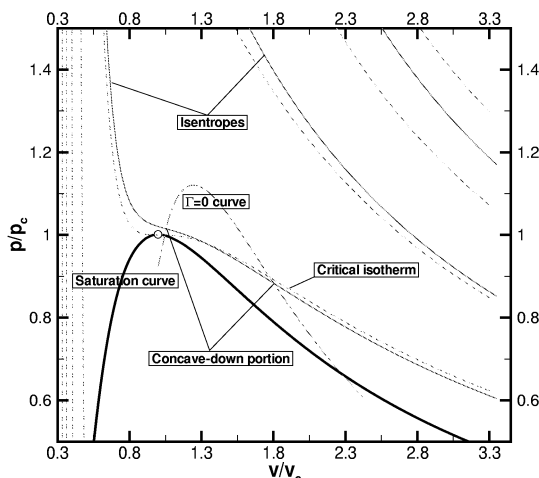


Figura 5: Diagramma di Amagat e zona d'inversione per un gas di van der Waals avente $c_p/c_v = 1.0125$).

La presenza della zona d'inversione è la causa del comportamento anomalo dei fluidi BZT, al cui seno è possibile la formazione di urti di espansione, onde miste (combinazioni urto/fan) urti sonici (o di Chapman-Jouguet) e doppiamente sonici. Tale comportamento, che può avere importanti ricadute tecnologiche, è tutt'ora solo parzialmente conosciuto e compreso e richiede ulteriori approfondimenti. A titolo illustrativo, si presentano qui di seguito alcuni risultati recenti [5] relativi alla simulazione numerica di un flusso transonico non viscoso di fluido BZT attorno ad un profilo alare NACA0012. Il numero di Mach della corrente libera è pari a 0.998, l'incidenza è nulla e le condizioni termodinamiche all'infinito sono scelte in modo da cadere all'interno della zona d'inversione (pressione ridotta pari a 0.944 e densità ridotta pari a 0.6). Il comportamento termodinamico del gas è modellizzato mediante l'equazione di stato di van der Waals ed il gas è supposto politropico. I risultati qui presentati sono stati calcolati utilizzando una discretizzazione centrata del flusso inviscido. In figura 6 sono rappresentate le linee isobare del flusso. Si può notare la formazione di un urto staccato davanti al profilo, in un flusso con condizioni all'infinito subsoniche. Ciò è dovuto alla diminuzione della velocità del suono all'aumentare della pressione per valori negativi di Γ . Si può ancora notare, a valle dell'urto staccato, la coalescenza delle linee caratteristiche in una zona in cui il flusso si sta espandendo (in un gas perfetto o comunque non BZT le caratteristiche tendono ad aprirsi quando il flusso si espande), con successiva formazione di un urto di espansione, sonico a monte, che allontanandosi dalla parete va ad interagire con il precedente urto staccato di compressione provocandone la disintegrazione. Si noti infine la formazione, al bordo di fuga del profilo,

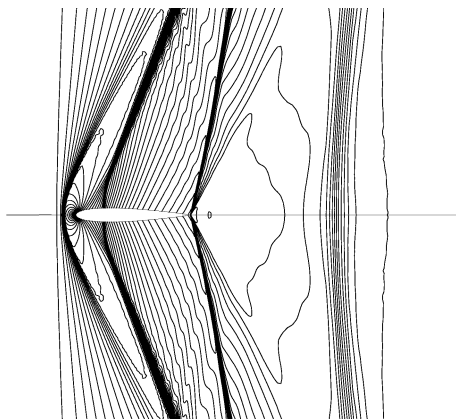


Figura 6: Flusso transonico di fluido BZT attorno ad un profilo. Linee isobare ($\Delta C_p = 0.05$).

di un'onda mista composta da un urto di compressione seguito da un fan di compressione e, da ultimo, la presenza di un urto di espansione a circa una corda e mezzo di distanza a valle del bordo di fuga del profilo.

3 CONCLUSIONI

Il codice di calcolo qui brevemente descritto costituisce uno strumento di ricerca duttile, efficiente ed accurato che permette:

- lo studio di nuovi modelli matematici per flussi comprimibili;
- lo sviluppo e la validazione di nuovi metodi numerici;
- la simulazione numerica di un'ampia gamma di condizioni di flusso in svariate geometrie bi- e tridimensionali a supporto o in alternativa agli esperimenti di laboratorio (“galleria del vento” numerica).

La modularità del codice permette un facile inserimento di nuove funzionalità ed assicura un'efficienza di calcolo ottimale. Nel prossimo futuro è previsto l'inserimento nel codice di una nuova equazione di stato, l'equazione di Martin e Hou [13], che permetterà una descrizione più realistica, rispetto all'equazione di van der Waals, del comportamento termodinamico dei gas densi. Si prospetta inoltre l'interfacciamento del codice fluidodinamico con algoritmi finalizzati all'ottimizzazione di forma.

Riferimenti bibliografici

- [1] B.S. Baldwin and H. Lomax: "Thin Layer Approximation and Algebraic Model for Separated Turbulent Flows" *AIAA Paper*, 78-257, 1978.
- [2] H. Bethe: "The theory of shock waves for an arbitrary equation of state" *Technical Report 545, Office of Scientific Research and Development*, 1942.
- [3] Bölcs and Fransson: Aeroelasticity in turbomachines - comparison of theoretical and experimental cascade results. *Technical Report 13, Laboratoire de Thermique Appliquée et de Turbomachines, EPFL, Lausanne, Switzerland*, 1986
- [4] P. Cinnella: "Numerical simulation of transonic shock/boundary layer interaction on an oscillating airfoil using a third-order scheme and non-linear turbulence models. In *Computational Fluid Dynamics 2000, Proceeding of the 1st ICCFD*, Lecture Series in Physics, page 157, Springer, 2000
- [5] P.Cinnella: "Numerical simulation of transonic flows of bethezel'dovich-thomson fluids". In *Fifth EuroMech Fluid Mechanics Conference*, August 2003. Toulouse, France.
- [6] P. Cinnella, P. De Palma, G. Pascazio and M. Napolitano: "A numerical method for turbomachinery aeroelasticity". *AMSE Paper GT-2002-30321*
- [7] P. Cinnella and A. Lerat: "A fully implicit third-order scheme in time and space for unsteady turbulent compressible flow simulation. In *Proceedings of ECCOMAS 2000*, September 2000. Barcelona, Spain
- [8] T.B. Gatski and C. G. Speziale: "On explicit algebraic stress models for complex turbulent flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 254:59-78,1993
- [9] A. Harten and J.M. Hyman: "Self adjusting grid method for one-dimensional hyperbolic conservation laws" *J. Comput. Phys.*, 50:235, 1983
- [10] Y. Huang, P. Cinnella and A. Lerat: "A third-order accurate centered scheme for turbulent compressible flow calculations in aerodynamics" In *Numer. Meth. Fluid Dynamics*, volume VI, pages 355-361, 1998. ICFD '98, Oxford, UK, April 1998
- [11] A. Jameson, W. Schmidt and E. Turkel: "Numerical Solutions of the Euler Equations by Finite Volume Methods Using Runge-Kutta Time Stepping" *AIAA Paper* 81-1259, 1981.

- [12] W.P. Jones and B.E. Launder: "The calculation of Low-Reynolds Number Phenomena with a Two-Equation Model of Turbulence" *J. of Heat and Mass Transfer*, 16:1119-1130, 1973
- [13] J.J. Martin and Y.C. Hou: "Development of an equation of state for gases" *AIChE Journal*, 1:142-151, 1951
- [14] A. Rezgui, P. Cinnella and A. Lerat: "Third-order finite volume schemes for euler computations on curvilinear meshes" *Computers and Fluids* 30:875-901, 2001
- [15] P.L. Roe: "Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors and Difference Schemes" *J. Comput. Phys.*, 43:357-372, 1981.
- [16] B.R. Smith: "A near-wall model for the k-l two equation turbulence model" *AIAA Paper* 84-2386
- [17] S.R. Spalart and S.R. Allmaras: "A one-equation turbulence model for aerodynamic flows" *AIAA Paper* 92-0439
- [18] B. Van Leer: "Towards the ultimate conservative difference scheme, V.A second-order sequel to Godunov's method" *J. Comput. Phys.*, 32:101-136, 1979