Convegno Nazionale
Matematica senza Frontiere
Lecce, 5-8 marzo 2003

La Matematica nelle Assicurazioni sulla Vita: Valutazione di Polizze Index-linked

Luca Anzilli

Dipartimento di Scienze Economiche e Matematico-Statistiche - Università di Lecce
anzilli@economia.unile.it

Sommario

La presente nota prende in esame le polizze assicurative *index-linked*, che si collocano all'interno dell'ampio panorama delle innovative forme di assicurazione sulla vita (a prestazioni flessibili) ad alto contenuto finanziario.

Le polizze *index-linked* sono contratti di assicurazione sulla vita in cui l'entità del capitale assicurato dipende dal valore di un indice azionario o di un altro valore di riferimento. Questi prodotti possono offrire delle garanzie (ad esempio un capitale minimo).

I particolari meccanismi di rivalutazione che caratterizzano tali forme assicurative determinano nella struttura finanziaria delle polizze stesse la presenza di opzioni (finanziarie) implicite.

Il calcolo del prezzo e della rischiosità delle opzioni implicite si rivela pertanto fondamentale ai fini della valutazione del portafoglio polizze di una compagnia di assicurazioni operante nel ramo vita e, più in generale, è uno strumento essenziale nell'analisi dell'utile e nelle politiche di asset-liability management assicurativo.

Nella nota è illustrato il modello matematico per la valutazione di una polizza index-linked mista con minimo garantito. È presentato inoltre un esempio numerico ed un codice scritto in Visual Basic per Microsoft Excel che permette di valutare con il metodo Monte Carlo il premio unico di mercato di una particolare polizza index-linked mista.

Parole chiave: Polizze index-linked, option pricing, simulazione Monte Carlo.

1 Polizze Index-linked

L'assicurazione sulla durata di vita è un contratto con cui l'assicuratore si impegna a erogare al beneficiario delle somme prefissate, o determinabili in modo prefissato, nel caso in cui si verifichino prestabiliti eventi inerenti la sopravvivenza dell'assicurato. Tali somme sono chiamate *benefici* o *prestazioni*.

A fronte dell'impegno assunto l'assicuratore riceve un *premio* che può essere versato in un'unica soluzione alla stipula del contratto (*premio unico*) oppure può essere rateizzato (*premi periodici*).

Nelle polizze **index-linked** l'entità del capitale assicurato dipende dal valore di un indice azionario o di un altro valore di riferimento. Questi prodotti possono offrire delle garanzie (ad esempio un capitale minimo).

Gli indici azionari o gli altri valori di riferimento (ad esempio un titolo strutturato) a cui possono essere collegate le prestazioni devono essere costruiti su strumenti finanziari quotati su mercati regolamentati (si veda [13]).

Nell'assicurazione *index-linked mista* la compagnia assicuratrice si impegna a versare un capitale al beneficiario alla scadenza del contratto, se l'assicurato è in vita a tale data, oppure all'epoca del decesso dell'assicurato se tale evento si verifica prima della scadenza stabilita.

Le prestazioni (capitale caso vita e capitale caso morte) sono determinate secondo un meccanismo di rivalutazione contrattualmente fissato.

2 Struttura della polizza index-linked

Nella presente sezione si prende in esame una polizza assicurativa *index-linked mista con minimo garantito.*

Scadenzario

Il riferimento temporale è rappresentato dalle scadenze $t = 0, 1, 2, \ldots, n$ dove l'epoca $t = 0$ è l'istante di stipulazione del contratto, x è l'età dell'assicurato all'epoca di ingresso in assicurazione (cioè all'epoca $t = 0$), n è la durata del contratto.

L'unità di misura fissata sullo scadenzario è l'anno.

Pertanto all'istante t, con $0 \leq t \leq n$, l'età dell'assicurato (se in vita) è $x + t$ e il tempo trascorso dall'ingresso in assicurazione (*antidurata*) è t.

Prestazioni

Al fine di descrivere il flusso delle prestazioni previste nel contratto di assicurazione, si introducono le seguenti notazioni:

- C_m, con $m = 1, 2, \ldots, n$, è il capitale corrisposto all'epoca $t = m$, in caso di decesso dell'assicurato tra le epoche $m - 1$ e m;

- $D_n = D$, è il capitale corrisposto alla scadenza n, in caso di vita a tale epoca.

Si osserva che la prestazione caso morte è pagata a fine anno.

Indice azionario di riferimento

Sia H l'indice azionario scelto come valore di riferimento per l'indicizzazione delle prestazioni (H è un portafoglio di titoli azionari quotati sui mercati finanziari, con composizione predeterminata). Inoltre

- H_t, con $t \geq 0$, è il valore di mercato dell'indice H all'istante t.

Rivalutazione
Si suppone che il meccanismo di rivalutazione delle prestazioni previsto dal contratto di assicurazione sia il seguente:

- $C_m = \max\left\{C_0 \cdot \frac{H_m}{H_0}, G_m^M\right\}$, $m = 1, 2, \ldots, n$;
- $D = \max\left\{D_0 \cdot \frac{H_n}{H_0}, G_n^V\right\}$,

essendo il capitale iniziale caso morte C_0, il capitale iniziale caso vita D_0, i capitali minimi garantiti caso morte $G_1^M, G_2^M, \ldots, G_n^M$ ed il capitale minimo garantito caso vita G_n^V contrattualmente fissati.

Minimo garantito
Spesso la garanzia di minimo è espressa in termini di tasso annuo minimo di rendimento garantito i_{min}.

In tal caso si ha:

$$G_m^M = C_0 \cdot (1 + i_{min})^m \ ; \qquad G_n^V = D_0 \cdot (1 + i_{min})^n \ .$$

Risulta dunque

$$\begin{aligned} C_m &= \max\left\{C_0 \cdot \frac{H_m}{H_0}\,,\, C_0 \cdot (1 + i_{min})^m\right\} = C_0 \cdot \max\left\{\frac{H_m}{H_0}, (1 + i_{min})^m\right\} \ , \\ D &= \max\left\{D_0 \cdot \frac{H_n}{H_0}\,,\, D_0 \cdot (1 + i_{min})^n\right\} = D_0 \cdot \max\left\{\frac{H_n}{H_0}, (1 + i_{min})^n\right\} \ . \end{aligned}$$

Numero di quote assicurate
Definito $N^M = \frac{C_0}{H_0}$ e $N^V = \frac{D_0}{H_0}$ risulta:

$$C_m = \max\left\{N^M \cdot H_m, G_m^M\right\}$$

e inoltre

$$D = \max\left\{N^V \cdot H_n, G_n^V\right\} \ .$$

Le quantità N^M e N^V rappresentano il numero di "quote" dell'indice che saranno erogate dalla compagnia assicuratrice al beneficiario in caso, rispettivamente, di decesso o di vita a scadenza dell'assicurato.

Premi
Si suppone che il contratto di assicurazione preveda il pagamento di un premio unico. È il caso in cui il premio è versato dall'assicurato in un'unica soluzione al momento della stipula del contratto (ingresso in assicurazione).

Il premio unico sarà indicato con U.

3 Tavole di Sopravvivenza

Ai fini della valutazione di una polizza assicurativa occorre assegnare la struttura probabilistica che descrive l'incertezza legata alla durata della vita umana.

Ciò può essere realizzato assegnando una Tavola di Sopravvivenza[1].

La Tavola di Sopravvivenza è una tabella, costruita su base statistica, relativa ad una determinata popolazione e ad un determinato intervallo di tempo.

In particolare, nella Tavola di Sopravvivenza è riportato, per ogni età x, il valore l_x, che rappresenta il numero di coloro che sono in vita all'età x, rispetto ad un campione teorico di $l_0 = 100.000$ individui nati vivi.

Riesce, naturalmente, $l_0 > l_1 > \cdots > l_\omega > 0$, dove ω è la *vita estrema* relativa alla Tavola di Sopravvivenza (cioè $l_\omega > 0$ e $l_{\omega+1} = 0$).

Seguendo l'approccio attuariale standard[2], con riferimento ad un soggetto di età x, si introduce la seguente simbologia:

$$ {}_m p_x = \frac{l_{x+m}}{l_x} $$

(" p con x differito m") rappresenta la probabilità che il soggetto di età x raggiunga l'età $x+m$; inoltre

$$ {}_m q_x = 1 - {}_m p_x = \frac{l_x - l_{x+m}}{l_x} $$

(" q con x temporaneo m") è la probabilità dell'evento contrario.

Si indica con

$$ {}_{m/h} q_x = \frac{l_{x+m} - l_{x+m+h}}{l_x} $$

(" q con x differito m temporaneo h") la probabilità che un soggetto di età x sia in vita all'età $x+m$ e deceda entro h anni (cioè non raggiunga l'età $x+m+h$).

Risulta

$$ {}_{m/h} q_x = \frac{l_{x+m}}{l_x} \cdot \frac{l_{x+m} - l_{x+m+h}}{l_{x+m}} = {}_m p_x \cdot {}_h q_{x+m} \, . $$

Nell'esempio numerico presentato più avanti si impiegano le Tavole di Sopravvivenza, Italia, Maschi, 1992.

[1]Le Tavole di Sopravvivenza adottate possono essere di primo ordine (o *prudenziali*, cioè favorevoli all'assicuratore) o di secondo ordine (realistiche).

[2]Si può consultare, ad esempio, [16].

4 Il modello di valutazione

Al fine di ottenere una corretta valutazione del portafoglio polizze di una compagnia di assicurazione operante nel ramo vita, in [9] è proposto un modello di valutazione a valori di mercato (mark-to-market) che si inserisce nell'ambito dell'asset-liability management assicurativo.

In questa sezione si introducono le ipotesi del modello di valutazione della polizza assicurativa.

Una prima assunzione è che sia possibile scambiare titoli in ogni istante (*continuous trading*).
Inoltre si suppone che siano verificate le seguenti ipotesi:

- Indipendenza stocastica tra incertezza attuariale ed incertezza finanziaria;

- Principio di non-arbitraggio (o principio di assenza di arbitraggi non rischiosi)[3];

- Mercati prefetti[4].

<u>Tasso di interesse del mercato</u>
Si assume che il tasso di interesse di mercato per gli investimenti non rischiosi è noto e costante nel tempo.

Sia i il tasso annuo di interesse (di mercato) relativo agli investimenti non rischiosi (tasso *risk-free*).

Sia inoltre $r = \log(1 + i)$ il tasso istantaneo di interesse (*spot rate*) risk-free. Si osservi che riesce $i = e^r - 1$.

<u>Valore di mercato</u>
Si indicherà con $M(t, X_s)$ il *valore di mercato* al tempo t di un contratto che fornisce l'importo aleatorio X_s al tempo $s \geq t$.

In un mercato perfetto e in assenza di arbitraggi non rischiosi sussiste la seguente proprietà di linearità:

$$M(t, aX_s + bX'_s) = aM(t, X_s) + bM(t, X'_s)\,. \tag{1}$$

Per l'ipotesi introdotta in relazione al tasso di mercato, il valore di mercato al tempo t di una posta monetaria certa X_s (il cui importo, cioè, è noto all'epoca t) esigibile al tempo s, è dato da

$$M(t, X_s) \;=\; X_s \cdot (1 + i)^{-(s-t)} \tag{2}$$

(si ricordi che l'unità di misura adottata per lo scadenzario è l'anno).

<u>Dinamica dell'indice di mercato</u>

[3] Non è possibile costruire una strategia che non richiede alcun esborso di danaro e che garantisce un profitto sicuro.

[4] Assenza di costi di transazione e di gravami fiscali, infinita divisibilità dei titoli, nessuna limitazione alle vendite allo scoperto, l'agente di mercato non può influenzare il prezzo (*price taker*).

Si considera un modello alla Black e Scholes ([4]).

Si suppone che la dinamica dell'indice azionario di riferimento (in assenza di dividendi) sia descritta dalla seguente equazione differenziale stocastica[5]:

$$dH_t \;=\; \mu\, H_t\, dt \;+\; \sigma\, H_t\, dZ_t\,, \tag{4}$$

dove μ è il coefficiente di drift (tasso istantaneo di rendimento atteso), $\sigma > 0$ il coefficiente di volatilità (scarto quadratico medio del tasso di rendimento istantaneo dell'indice) e Z_t un moto browniano standard (o processo di Wiener)[6].

5 Valutazione di mercato del premio unico puro

Il premio unico di mercato (fair value) di una polizza index-linked mista è:

$$U = \sum_{m=1}^{n} M(0, C_m)\ {}_{m-1/1}q_x \;+\; M(0, D)\ {}_{n}p_x\,.$$

Il problema è calcolare i prezzi $M(0, C_m)$ e $M(0, D)$.

Si osservi che non è possibile l'impiego della (2) in quanto gli importi C_m e D non sono noti in $t = 0$.

L'idea chiave è dovuta a Brennan e Schwartz [5].

Si osserva che per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ risulta

- $\max\{x, y\} = y + \max\{x - y, 0\} = x + \max\{y - x, 0\}$;
- $\max\{kx, ky\} = k \max\{x, y\}$ per ogni $k \geq 0$.

Pertanto si ha

$$C_m = \max\left\{N^M \cdot H_m, G_m^M\right\} = G_m^M \;+\; \max\left\{N^M \cdot H_m \;-\; G_m^M, 0\right\}$$

e quindi

$$C_m \;=\; G_m^M \;+\; N^M \cdot \max\left\{H_m \;-\; \frac{G_m^M}{N^M}, 0\right\}\,. \tag{5}$$

[5]L'equazione differenziale stocastica (4) ha soluzione

$$H_t = H_0\, \exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma Z_t\right\}\,. \tag{3}$$

Inoltre, al tempo $t = 0$, il valore atteso per H_t è: $E_0\,[H_t] = H_0\, e^{\mu t}$.

[6]Il moto browniano standard Z_t è un processo stocastico che gode delle seguenti proprietà:

- $Z_0 = 0$ quasi certamente, cioè $P(Z_0 = 0) = 1$;
- l'incremento $Z_t - Z_s$, con $t > s \geq 0$, ha distribuzione normale con media 0 e varianza $(t - s)$;
- per ogni $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k$ le variabili aleatorie $Z_0, Z_{t_1} - Z_0, Z_{t_2} - Z_{t_1}, \ldots, Z_{t_k} - Z_{t_{k-1}}$ sono indipendenti;
- le traiettorie del processo Z_t sono continue.

La prestazione C_m risulta quindi essere la somma di:

- un contratto che paga al tempo $t = m$ l'importo certo G_m^M;
- un numero N^M di contratti che pagano al tempo $t = m$ l'importo aleatorio $Y_m = \max\left\{H_m - \dfrac{G_m^M}{N^M}, 0\right\}$.

Applicando la proprietà di linearità (1), il valore di mercato al tempo $t = 0$ della prestazione C_m esigibile in $t = m$ è dato dal valore di mercato al tempo $t = 0$ dell'importo noto (in quanto contrattualmente fissato) G_m^M più il valore di mercato al tempo $t = 0$ di N^M contratti che prevedono il pagamento in $t = m$ della somma Y_m (aleatoria, poiché agganciata all'andamento dell'indice azionario H). In termini formali:

$$\begin{aligned} M(0, C_m) &= M\left(0, G_m^M + N^M \cdot \max\left\{H_m - \frac{G_m^M}{N^M}, 0\right\}\right) \\ &= M\left(0, G_m^M\right) + N^M \cdot M\left(0, \max\left\{H_m - \frac{G_m^M}{N^M}, 0\right\}\right) \\ &= M\left(0, G_m^M\right) + N^M \cdot M\left(0, Y_m\right) . \end{aligned}$$

L'importo G_m è noto all'epoca di emissione della polizza (istante $t = 0$); pertanto applicando la (2) risulta:

$$M\left(0, G_m^M\right) = G_m^M \cdot (1+i)^{-m} .$$

Per quanto riguarda la valutazione di $M(0, Y_m)$ si osserva che il payoff a scadenza $Y_m = \max\left\{H_m - \dfrac{G_m^M}{N^M}, 0\right\}$ è il valore finale di un contratto di *opzione call di tipo europeo*[7] scritta sull'indice azionario H con:

- prezzo di esercizio $X = \dfrac{G_m^M}{N^M}$,
- scadenza $T = m$.

Pertanto il valore $M(0, Y_m)$ è pari al prezzo $c_0\left(H_0, m, \dfrac{G_m^M}{N^M}\right)$, al tempo $t = 0$, di una opzione call europea scritta sull'indice H, con scadenza m e prezzo di esercizio $\dfrac{G_m^M}{N^M}$:

$$M(0, Y_m) = c_0\left(H_0, m, \frac{G_m^M}{N^M}\right) .$$

[7] Una opzione finanziaria call di tipo europeo è un titolo (derivato) che conferisce il diritto di acquistare una unità del bene sottostante a un prezzo X prestabilito (detto *prezzo di esercizio* o *strike price*) e a una prefissata scadenza T (*data di esercizio*).

Per tale motivo la (5) è detta *scomposizione call.*

Analogamente

$$D = \max\left\{N^V \cdot H_n, G_n^V\right\} = G_n^V \,+\, N^V \cdot \max\left\{H_n \,-\, \frac{G_n^V}{N^V}, 0\right\}$$

da cui

$$M(0, D) \,=\, M\left(0\,,\, G_n^V\right) \,+\, N^V \cdot M\left(0\,,\, \max\left\{H_n \,-\, \frac{G_n^V}{N^V}, 0\right\}\right)\,.$$

Pertanto

$$M\left(0\,,\, G_n^V\right) \,=\, G_n^V \cdot (1+i)^{-n}\,,$$

e inoltre

$$M\left(0\,,\, \max\left\{H_n \,-\, \frac{G_n^V}{N^V}, 0\right\}\right) = c_0\left(H_0, n, \frac{G_n^V}{N^V}\right)\,.$$

Il premio unico è quindi

$$\begin{aligned} U \;\;&=\;\; \sum_{m=1}^{n}\left[G_m^M \cdot (1+i)^{-m} + N^M \cdot c_0\left(H_0, m, \frac{G_m^M}{N^M}\right)\right]\; {}_{m-1/1}q_x \;+ \\ &\quad + \left[G_n^V \cdot (1+i)^{-n} \,+\, N^V \cdot c_0\left(H_0, n, \frac{G_n^V}{N^V}\right)\right]\; {}_n p_x\,. \end{aligned} \tag{6}$$

I prezzi delle opzioni di tipo europeo possono essere calcolati con la formula di Black e Scholes[8] (7). Risulta quindi

$$c_0\left(H_0, m, \frac{G_m^M}{N^M}\right) = H_0 \cdot \Phi\left(d_m^1\right) \,-\, \frac{G_m^M}{N^M} \cdot (1+i)^{-m} \cdot \Phi\left(d_m^2\right)$$

[8] Black e Scholes hanno provato, nelle ipotesi introdotte nella sezione (4), che il prezzo al tempo t di una opzione call europea scritta sull'indice azionario S (che non paga dividendi) la cui dinamica è descritta dall'equazione differenziale stocastica

$$dS_t \,=\, \mu\, S_t\, dt \,+\, \sigma\, S_t\, dZ_t\,,$$

è dato dalla formula:

$$c_t\left(S_t, T, X\right) = S_t \cdot \Phi\left(d^1\right) \,-\, X \cdot e^{-r(T-t)} \cdot \Phi\left(d^1 - \sigma \cdot \sqrt{T-t}\right)\,, \tag{7}$$

dove

$$d^1 = \frac{\log\left(\frac{S_t}{X}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right) \cdot (T-t)}{\sigma \cdot \sqrt{T-t}}$$

e Φ è la funzione di ripartizione della distribuzione normale standardizzata:

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-u^2/2}\, du\,.$$

(si osservi che $e^{-rm} = (1+i)^{-m}$), dove

$$\begin{aligned} d_m^1 &= \frac{\log\left(\dfrac{N^M \cdot H_0}{G_m^M}\right) + \left(r + \dfrac{1}{2}\sigma^2\right) \cdot m}{\sigma \cdot \sqrt{m}}, \\ d_m^2 &= d_m^1 - \sigma \cdot \sqrt{m}\,. \end{aligned}$$

Inoltre

$$c_0\left(H_0, n, \frac{G_n^V}{N^V}\right) = H_0 \cdot \Phi\left(h_n^1\right) - \frac{G_n^V}{N^V} \cdot (1+i)^{-n} \cdot \Phi\left(h_n^2\right),$$

dove

$$\begin{aligned} h_n^1 &= \frac{\log\left(\dfrac{N^V \cdot H_0}{G_n^V}\right) + \left(r + \dfrac{1}{2}\sigma^2\right) \cdot n}{\sigma \cdot \sqrt{n}}, \\ h_n^2 &= h_n^1 - \sigma \cdot \sqrt{n}\,. \end{aligned}$$

6 Un caso particolare

Un caso che merita particolare attenzione si ha quando il capitale iniziale caso morte C_0 è uguale al capitale iniziale caso vita D_0.

In questo caso riesce $N^M = N^V$, $G_n^M = G_n^V$ e $C_n = D$.

È conveniente definire $N = N^M = N^V$ e $G_m = G_m^M$ per ogni $m = 1, 2, \ldots, n$.

Risulta

$$N = \frac{C_0}{H_0}$$

e, per ogni $m = 1, 2, \ldots, n$,

$$G_m = C_0 \cdot (1 + i_{min})^m\,.$$

La prestazione C_m, per $m = 1, 2, \ldots, n$, è[9]:

$$C_m = \max\left\{C_0 \cdot \frac{H_m}{H_0}\,,\, C_0 \cdot (1 + i_{min})^m\right\}.$$

[9]**Esempio.** Si consideri una polizza assicurativa index-linked mista con minimo garantito, stipulata da un individuo di età $x = 40$ anni. La durata della polizza è $n = 10$ anni. Sia $C_0 = 15.000$ euro il capitale iniziale assicurato. Le prestazioni della polizza siano agganciate all'indice azionario H secondo la seguente regola di rivalutazione:

$$C_m = \max\left\{C_0 \cdot \frac{H_m}{H_0}\,,\, C_0 \cdot (1 + i_{min})^m\right\} \quad \text{per ogni } m = 1, 2, \ldots, 10.$$

Il tasso annuo minimo garantito sia fissato al livello $1,50\%$, cioè $i_{min} = 0,015$, e sia $H_0 = 100$.

Il premio unico è dato da:

$$U = \sum_{m=1}^{n} \left[G_m \cdot (1+i)^{-m} + N \cdot c_0 \left(H_0, m, \frac{G_m}{N} \right) \right] \alpha_m \, , \tag{8}$$

dove

$$\alpha_m = \begin{cases} {}_{m-1/1}q_x = \dfrac{l_{x+m-1} - l_{x+m}}{l_x} & \text{per } m = 1, 2, \ldots, n-1 \, , \\ \\ {}_{n-1/1}q_x + {}_n p_x = \dfrac{l_{x+n-1}}{l_x} & \text{per } m = n \, . \end{cases}$$

È immediato verificare che $\sum_{m=1}^{n} \alpha_m = 1$.

7 Un esempio numerico

Si consideri la polizza index-linked mista con minimo garantito presentata nella sezione 6.

Si supponga $H_0 = 100$, $x = 30$, $C_0 = 20.000$, $i = 0,03$, $n = 10$.

Nella Tabella è riportato il valore del premio unico, calcolato in base alla (8), in corrispondenza di alcuni valori di i_{min} e σ.

$i_{min} \setminus \sigma$	10%	15%	20%	25%	30%
0,00%	20.511	21.308	22.211	23.144	24.075
0,25%	20.598	21.443	22.378	23.336	24.288
0,50%	20.695	21.588	22.556	23.538	24.509
0,75%	20.805	21.744	22.743	23.749	24.740
1,00%	20.929	21.912	22.941	23.970	24.980
1,25%	21.066	22.092	23.149	24.201	25.230
1,50%	21.219	22.285	23.369	24.442	25.489

Si supponga che l'assicurato sia in vita alla scadenza della polizza (cioè dopo 10 anni, all'età di 50 anni) e che, a tale epoca, la quotazione dell'indice sia $H_{10} = 133$.

La compagnia di assicurazioni dovrà erogare l'importo

$$C_{10} = \max \left\{ C_0 \cdot \frac{H_{10}}{H_0} \, , \, C_0 \cdot (1 + i_{min})^{10} \right\} = \max \{19.950, 17.408\} = 19.950 \text{ euro.}$$

Si osservi che il tasso di rendimento dell'indice nel periodo $[0, 10]$ è pari al 33%

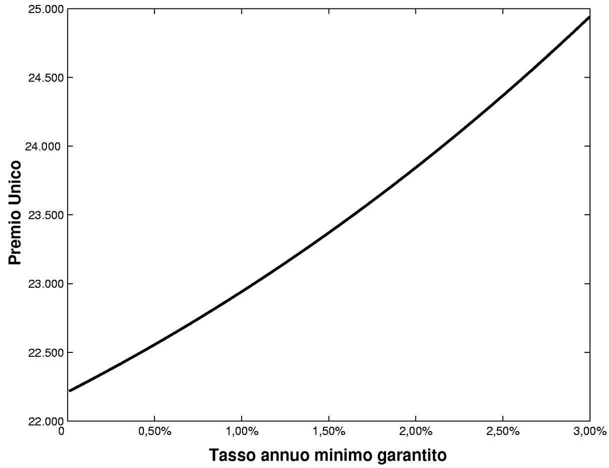
$$\frac{H_{10} - H_0}{H_0} = \frac{133 - 100}{100} = 0,33$$

che corrisponde ad un tasso annuo del $2,89\%$ (maggiore del tasso annuo minimo garantito)

$$\sqrt[10]{1 + 0,33} \; - \; 1 \; = \; 0,0289 \, .$$

Per i calcoli sono state impiegate le Tavole di Sopravvivenza, Italia, Maschi, 1992.

In figura è riportato l'andamento del premio unico in funzione di i_{min} per $H_0 = 100$, $x = 30$, $C_0 = 20.000$, $i = 0,03$, $\sigma = 0,2$, $n = 10$.



8 Un differente meccanismo di rivalutazione

Si consideri la polizza index-linked mista introdotta nella sezione 6, ma con un differente meccanismo di rivalutazione.

In particolare si supponga che sia previsto uno schema di indicizzazione *a medie storiche* con minimo garantito:

$$C_m = \max\left\{C_0 \cdot \frac{\overline{H}_m}{H_0}, G_m\right\}, \qquad m = 1, 2, \ldots, n,$$

dove il capitale iniziale C_0 è contrattualmente fissato e, per ogni $m = 1, 2, \ldots, n$

$$\overline{H}_m = \frac{H_1 + H_2 + \cdots + H_m}{m} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} H_j .$$

Si osservi che posto $N = \dfrac{C_0}{H_0}$ si ha

$$C_m = \max\left\{N \cdot \overline{H}_m, G_m\right\},$$

e quindi

$$C_m = G_m + N \cdot \max\left\{\overline{H}_m - \frac{G_m}{N^M}, 0\right\} .$$

Riesce pertanto

$$M(0,C_m) \;=\; M\,(0\,,\,G_m) \;+\; N\cdot M\left(0\,,\,\max\left\{\overline{H}_m \;-\; \frac{G_m}{N},0\right\}\right)\,.$$

Si osserva che l'importo $\overline{Y}_m = \max\left\{\overline{H}_m \;-\; \dfrac{G_m}{N^M},0\right\}$ è il payoff a scadenza di una opzione di tipo *average price call* con media aritmetica.

Pertanto $M\left(0\,,\,\overline{Y}_m\right)$ è pari al prezzo dell'opzione al tempo $t = 0$.

Per il calcolo del prezzo dell'opzione *average price call* con media aritmetica non si dispone di formule chiuse (del tipo (7)).

In questo caso, come illustrato nella sezione seguente, il prezzo può essere determinato via simulazione numerica impiegando il Metodo Monte Carlo.

Il premio unico è dato da:

$$U = \sum_{m=1}^{n}\left[G_m\cdot(1+i)^{-m} + N\cdot M\left(0\,,\,\overline{Y}_m\right)\right]\,\alpha_m\,. \tag{9}$$

9 Simulazione numerica

Consideriamo una assicurazione index-linked mista con minimo garantito, avente durata pari a 10 anni (n=10), con indicizzazione a medie storiche:

$$C_m = \max\left\{C_0\cdot\frac{\overline{H}_m}{H_0},G_m\right\}\,,\qquad m = 1,2,\ldots,10\,,$$

dove, per $m = 1,2,\ldots,10$,

$$\overline{H}_m \;=\; \frac{H_1+H_2+\cdots+H_m}{m} \;=\; \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}H_j\,.$$

Si è visto nella sezione precedente che il premio unico è dato da:

$$U = \sum_{m=1}^{10}\left[G_m\cdot(1+i)^{-m} + N\cdot M\left(0\,,\,\overline{Y}_m\right)\right]\,\alpha_m\,. \tag{10}$$

Considerato l'importo aleatorio, esigibile in $t = m$,

$$\overline{Y}_m \;=\; \max\left\{\overline{H}_m \;-\; \frac{G_m}{N^M},0\right\}\,,$$

il suo valore di mercato all'epoca $t = 0$ può essere determinato attraverso l'equazione di valutazione[10]:

$$M(0,\overline{Y}_m) \;=\; e^{-r\,m}\,\widehat{E}_0\left[\overline{Y}_m\right]\,,$$

[10] Si può consultare, ad esempio, [14].

dove $\widehat{E}_0[.]$ è l'operatore valore atteso secondo la probabilità aggiustata per il rischio[11].

Applicando il metodo Monte Carlo si *generano*, a partire dalla (3) (o dalla (4)), un numero opportuno di traiettorie dell'indice H *aggiustate* per il rischio, cioè con $\mu = r$.

Si calcola quindi, per ciscuna traiettoria, il payoff a scadenza e si determina poi la media aritmetica dei valori ottenuti.

Scontando infine il valore ottenuto al tasso risk-free r si ottiene una stima del prezzo $M(0, \overline{Y}_m)$.

Si presenta ora un codice in Visual Basic per Microsoft Excel che implementa la procedura descritta.

• Si introducono le grandezze contrattuali, rispettivamente x, i_{min}, C_0, H_0, i, σ, in

```
anni_assicurato
tasso_annuo_minimo_garantito
Capitale_iniziale_assicurato
H_0
tasso_annuo_non_rischioso
sigma
```

• Si stabilisce il numero di simulazioni (ad esempio 10.000) in

```
numero_simulazioni
```

• Si calcola N e r

```
Numero_quote = Capitale_iniziale_assicurato / H_0
r = Log(1 + tasso_annuo_non_rischioso)
```

• Si procede al calcolo dei capitali minimi garantiti $G_1, G_2, \ldots, G_m$

```
Dim G(11)
For m = 1 To 10
G(m) = Capitale_iniziale_assicurato *_
                            (1 + tasso_annuo_minimo_garantito) ^ m
Next m
```

• Si introducono i valori α_m, $m = 1, 2 \ldots, 10$, ricavati dalle Tavole di Sopravvivenza adottate, in

[11] In un mondo neutrale verso il rischio, il tasso di rendimento atteso di tutti i titoli è uguale al tasso privo di rischio r. Inoltre il valore attuale di ogni futuro pagamento può essere ottenuto attualizzandone il valore atteso al tasso privo di rischio.

```
alpha(1)
alpha(2)
........
alpha(10)
```

• Si procede ora al calcolo del premio unico (`Premio_Unico_Stimato`)

```
Function phi()
phi = Application.NormSInv(Rnd())
End Function

Premio_Unico_Stimato = 0

Dim H(11)
Dim Media_storica_H(11)
Dim Somma_payoff(11)
Dim prezzo_call_stimato(11)

For simulazione = 1 To numero_simulazioni
  H(0) = H_0
  For m = 1 To 10
  H(m) = H(m - 1) * Exp(r - sigma ^ 2 / 2 + sigma * phi)
  Next m
  For m = 1 To 10
  Somma_H = 0
      For k = 1 To m
      Somma_H = Somma_H + H(k)
      Next k
  Media_storica_H(m) = Somma_H / m
  X = G(m) / Numero_quote
  payoff = Application.Max(Media_storica_H(m) - X, 0)
  Somma_payoff(m) = Somma_payoff(m) + payoff
  Next m
Next simulazione

For m = 1 To 10
prezzo_call_stimato(m) =
 Exp(-r*m)*Somma_payoff(m)/numero_simulazioni
Premio_Unico_Stimato=Premio_Unico_Stimato +_
 (G(m)*Exp(-r*m)+ Numero_quote*prezzo_call_stimato(m))*alpha(m)
Next m
```

Riferimenti bibliografici

[1] K. K. Aase, S.-A. Persson (1994): *Pricing of Unit-linked Life Insurance Policies*, Scandinavian Actuarial Journal **1**, 26-52.

[2] L. Anzilli (2002): *Sull'utile generato da polizze Index-linked*, Quaderni del Dipartimento di Scienze Economiche e Matematico-Statistiche, Università di Lecce, n. **25/5**.

[3] T. Björk (1998): *Arbitrage Theory in Continuous Time*, Oxford University Press, New York.

[4] F. Black and M. Scholes (1973): *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, Journal of Political Economy **81**, 637-654.

[5] M. J. Brennan, E. S. Schwartz (1976): *The Pricing of Equity-linked Life Insurance Policies with an Asset Value Guarantee*, Journal of Financial Economics **3**, 195-213.

[6] D. M. Cifarelli, L. Peccati (1998): *Equazioni Differenziali Stocastiche con Applicazioni Economiche e Finanziarie*, E.G.E.A., Milano.

[7] Decreto Legislativo 17 marzo 1995, n. 174, *Attuazione della direttiva 92/96/CEE in materia di assicurazione diretta sulla vita.*

[8] M. De Felice, F. Moriconi (1991): *La teoria dell'immunizzazione finanziaria. Modelli e strategie*, Il Mulino, Bologna.

[9] M. De Felice, F. Moriconi (2001): *Finanza dell'assicurazione sulla vita. Principî per l'asset-liability management e per la misurazione dell'embedded value*, Gruppo di ricerca su "Modelli per la finanza matematica", Working paper n. 40, giugno.

[10] M. De Felice, F. Moriconi (2002): *L'embedded value delle assicurazioni sulla vita. Definizione, tecniche di misurazione e controllo per le polizze index-linked*, Associazione Amici della Scuola Normale Superiore, Pisa.

[11] J. Hull (1997): *Opzioni, Futures e altri derivati*, Prentice Hall.

[12] ISVAP (1998): *Contratti di assicurazione sulla vita e di capitalizzazione con prestazioni direttamente collegate a fondi di investimento o ad indici azionari o altri valori di riferimento (art. 30, d.lgs. 17 marzo 1995, n.174)*, Circolare n. 332/D del 25 maggio.

[13] ISVAP (2001): *Polizze con prestazioni direttamente collegate ad un indice azionario o altro valore di riferimento (art. 30, comma 2, d.lgs. 17 marzo 1995, n.174). Disposizioni in materia di costituzione del margine di solvibilitá per i contratti inclusi nel ramo III di cui al punto A) della tabella allegata al d.lgs. 17 marzo 1995, n. 174*, Roma, Circolare n. 451/D del 24 luglio.

[14] I. Nelken (ed.) (1996): *The Handbook of Exotic Options: instruments, analysis and applications*, McGraw-Hill.

[15] P. Pianca (2000): *Elementi di teoria delle opzioni finanziarie*, Giappichelli Editore, Torino.

[16] E. Pitacco (2000): *Matematica e Tecnica Attuariale delle Assicurazioni sulla Durata di Vita*, LINT, Trieste.

[17] P. Wilmott (2000): *Derivatives. The theory and practice of financial engineering*, John Wiley & Sons.