CAPITOLO 6

IL TEOREMA DI POSNER

Il Teorema di Posner può essere riguardato come una generalizzazione del teorema sugli anelli commutativi affermante che per ogni dominio d'integrità esiste, a meno di isomorfismi, un unico campo dei quozienti.
La dimostrazione originale del Teorema di Posner usa il Teorema di Goldie e la localizzazione non commutativa attraverso la condizione di Ore. Noi, invece, vedremo la dimostrazione data da L. H. Rowen che si basa su un suo teorema riguardante gli ideali di PI-algebre prime, su un teorema di Levitzki sugli ideali nil di PI-algebre prime e su un teorema di Amitsur sul radicale di Jacobson di anelli polinomiali.
Infine vedremo alcune applicazioni del Teorema di Posner alle PI-algebre e ai T-ideali dell'algebra libera.

6.1 Definizione. Un anello R è *primo* se e solo se, per ogni I, J ideali non nulli di R, si ha $IJ \neq 0$.
Analogamente una C-algebra R si dice *prima* se e solo se, per ogni I, J ideali non nulli di R, vale $IJ \neq 0$.
Un ideale I di R è un *ideale primo* se la struttura quoziente (anello o algebra) è prima.

Vediamo una caratterizzazione delle algebre prime:

6.2 Proposizione. *Sia R una C-algebra. R è un'algebra prima se e solo se*

$$\forall\, a, b \in R \qquad aRb = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ o } b = 0.$$

Dimostrazione. "$\Rightarrow$" Supponiamo che R sia algebra prima e siano $a, b \in R$ tali che $aRb = 0$. Allora $(RaR)(RbR) = 0$ e, poiché RaR e RbR sono ideali di R, dall'ipotesi segue che $RaR = 0$ oppure $RbR = 0$. Nel primo caso aR risulta un ideale bilatero di R e quindi $aR = 0$. Analogamente si ha $Ra = 0$

e quindi $\mathbb{Z}a$ è bilatero in R. Essendo $\mathbb{Z}aR = 0$ segue $a = 0$.
"$\Leftarrow$" Supponiamo che

$$\forall\, a, b \in R \qquad aRb = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ o } b = 0.$$

Siano I, J ideali non nulli di R e siano $a \in I - \{0\}$, $b \in J - \{0\}$. Allora dall'ipotesi segue che $aRb \neq 0$ e quindi, essendo $aRb \subseteq IJ$, si ha $IJ \neq 0$. Pertanto R è un'algebra prima.

□

La caratterizzazione precedente mostra che una C-algebra R è prima se e solo se lo è come anello.

6.3 Proposizione. *Sia R un anello primo che non sia dominio d'integrità. Allora esiste $s \in R$ tale che $s \neq 0$ e $s^2 = 0$.*

Dimostrazione. Siano $a, b \in R - \{0\}$ tali che $ab = 0$. Allora, per **(6.2)**, $bRa \neq 0$ e quindi esiste $r \in R$ tale che $bra \neq 0$. Posto $s := bra$ si ha che $s \in R$, $s \neq 0$ e

$$s^2 = (bra)^2 = (bra)(bra) = br(ab)ra = 0.$$

□

Nel caso commutativo la definizione di anello primo equivale alla definizione di dominio d'integrità in quanto vale la seguente proposizione:

6.4 Proposizione. *Sia R un anello primo. Allora ogni elemento del suo centro è regolare in R.*

Dimostrazione. Siano R un anello, $Z(R)$ il suo centro, $z \in Z(R)$ e $a \in R$ tali che $z \neq 0$ e $za = 0$. Allora $Rza = 0$ e quindi, essendo $z \in Z(R)$, $zRa = 0$. Poiché R è primo, da **(6.2)** segue che $a = 0$.

□

6.5 Osservazione. Ogni anello primitivo è primo. Infatti siano R un anello primitivo, M un R-modulo fedele irriducibile e I, J ideali non nulli di R. Allora JM è un sottomodulo di M ed è non nullo perché M è fedele. Dall'irriducibilità di M segue che $JM = M$ e quindi $IJM = IM$. Ma anche $IM \neq 0$ e così $IJM \neq 0$, cioè $IJ \neq 0$.

Si dimostra che ogni dominio d'integrità può essere riguardato come il centro di un anello primitivo.

6.6 Definizione. Sia R un anello primo tale che $Z(R) \neq 0$. Posto

$$S := \{(r, z) \mid r \in R, z \in Z(R) - \{0\}\},$$

definiamo su S la seguente relazione d'equivalenza:

$$\forall\, (r, z), (s, t) \in S \qquad (r, z) \sim (s, t) \Leftrightarrow tr = zs.$$

Sia $Q(R) := S / \sim$ e, per ogni $(s,t) \in S$, indichiamo con $t^{-1}s$ la classe di equivalenza di (s,t). Per ogni $z_1^{-1}a_1, z_2^{-1}a_2 \in Q(R)$, definiamo le operazioni di addizione e moltiplicazione in $Q(R)$ nel seguente modo:

$$z_1^{-1}a_1 + z_2^{-1}a_2 := (z_1z_2)^{-1}(z_2a_1 + z_1a_2)$$

$$(z_1^{-1}a_1)(z_2^{-1}a_2) := (z_1z_2)^{-1}a_1a_2.$$

Con tali operazioni $Q(R)$ risulta essere un anello detto *anello dei quozienti centrali di R*.
Naturalmente , se R è una C-algebra, anche $Q(R)$ è un'algebra su C con moltiplicazione definita nel seguente modo:

$$\forall\, \alpha \in C, z^{-1}r \in Q(R) \qquad \alpha(z^{-1}r) := z^{-1}(\alpha r).$$

6.7 Proposizione. *Sia R un anello primo con centro non nullo. Allora R e $Q(R)$ soddisfano le stesse identità polinomiali a coefficienti in $Z(R)$.*

Dimostrazione. Ovviamente R soddisfa tutte le identità polinomiali di $Q(R)$ perché R può essere riguardato come un sottoanello di $Q(R)$. Dimostriamo che vale il viceversa.
Se $Z(R)$ è finito allora è un campo in quanto, per **(6.4)**, $Z(R)$ è un dominio d'integrità finito. Allora $Q(R) \cong R$ e la tesi è banalmente vera.
Supponiamo, ora, che $Z(R)$ sia infinito. Allora, essendo privo di divisori dello zero in R, $Z(R)$ soddisfa la condizione di regolarità. Analogamente a quanto fatto per **(2.18)**, usando l'argomento di Vandermonde si prova che ogni identità polinomiale per R è multiomogenea.
Dimostriamo, ora, che ogni identità polinomiale per R multiomogenea è un'identità polinomiale anche per $Q(R)$. Proviamo ciò per induzione sullo ordine lessicografico del multigrado dell'identità multiomogenea considerata.
Osserviamo innanzitutto che

$$Q(R) \cong R \bigotimes_{Z(R)} Q(Z(R)) \qquad (\star)$$

e quindi, se f è un'identità polinomiale multilineare per R, da **(3.2)** segue che f è un'identità polinomiale anche per $Q(R)$.
Sia $n \in \mathbb{N}$ e sia $f(x_1, \ldots, x_n) \in (Z(R))\langle X\rangle$ un'identità polinomiale multiomogenea per R.
Supponiamo vera la tesi per ogni identità polinomiale multiomogenea avente multigrado minore di quello di f nell'ordine lessicografico.
Per ogni $i \in \underline{n}\rfloor$ tale che $deg^i(f) > 1$, sia $k_i \in \mathbb{N}$ e poniamo $g_i := \Delta_{i,k_i}(f)$. Allora g_i è multiomogeneo ed ha multigrado minore rispetto a f. Inoltre, per **(2.25(1))**, g_i è un'identità polinomiale per R e quindi, per l'ipotesi induttiva, g_i è un'identità polinomiale per $Q(R)$.

Allora, per ogni $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1} \in Q(R)$, $g_i(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}) = 0$ e quindi $f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + a_{n+1}, a_{i+1}, \ldots, a_n) =$

$$= f(a_1, \ldots, a_n) + f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{n+1}, a_{i+1}, \ldots, a_n) \qquad (\star\star)$$

Siano $c_1, \ldots, c_n \in Q(R)$. Allora, per $(\star)$, per ogni $j \in \underline{n}\rfloor$, esistono $r_j \in \mathbb{N}$, $i_j \in \underline{r_j}\rfloor$, $a_{i_j}^{(j)} \in R$ e $b_{i_j}^{(j)} \in Q(Z(R))$ tali che

$$c_j = \sum_{i_j=1}^{r_j} a_{i_j}^{(j)} \otimes b_{i_j}^{(j)}.$$

Pertanto da $(\star\star)$ segue

$$f(c_1, \ldots, c_n) = \sum_{i_1, \ldots, i_n = 1}^{r_1, \ldots, r_n} f\left(a_{i_1}^{(1)} \otimes b_{i_1}^{(1)}, \ldots, a_{i_n}^{(n)} \otimes b_{i_n}^{(n)}\right).$$

Poiché f è multiomogeneo e i $b_{i_j}^{(j)}$ commutano, esistono $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{N}$ tali che

$$f(c_1, \ldots, c_n) = \sum_{i_1, \ldots, i_n = 1}^{r_1, \ldots, r_n} \left(f\left(a_{i_1}^{(1)}, \ldots, a_{i_n}^{(n)}\right) \otimes \left(b_{i_1}^{(1)}\right)^{m_1} \cdots \left(b_{i_n}^{(n)}\right)^{m_n}\right).$$

Ma f è un'identità polinomiale per R e quindi $f\left(a_{i_1}^{(1)}, \ldots, a_{i_n}^{(n)}\right) = 0$. Pertanto $f(c_1, \ldots, c_n) = 0$ e, per l'arbitrarietà di $c_1, \ldots, c_n$ in $Q(R)$, f è un'identità polinomiale per $Q(R)$.

□

La procedura seguita nella dimostrazione precedente prova che:

6.8 Proposizione. *Siano F un campo infinito e R una F-algebra. Se K è un'estensione di F allora R e $R \bigotimes_F K$ soddisfano le stesse identità polinomiali.*

Dimostrazione. Sia $f \in F\langle X\rangle$ un'identità polinomiale per R. Da **(2.30(1))** segue che f è equivalente alle sue componenti multiomogenee e quindi, senza perdere di generalità, possiamo supporre che f sia multiomogeneo.
Procedendo in modo analogo a quanto fatto per **(6.7)**, si dimostra che f è un'identità polinomiale per $R \bigotimes_F K$.
Infine, essendo K-algebra unitaria, R può essere riguardata come sottoalgebra di $R \bigotimes_F K$ e quindi R soddisfa tutte le identità polinomiali di $R \bigotimes_F K$.
□

6.9 Corollario. *Siano $n \in \mathbb{N}$ e A un'algebra semplice di dimensione n^2 sul suo centro F. Allora A e $M_n(F)$ soddisfano le stesse identità polinomiali.*

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che per **(4.7)** $dim_F A$ è un quadrato.
Per il Teorema di Wedderburn-Artin, esistono $r \in \mathbb{N}$ e un corpo D tali che $A \cong M_r(D)$. Inoltre, per **(4.7)**, esiste $t \in \mathbb{N}$ tale che $t^2 = dim_F D$ e $n = rt$.
Se F è un campo finito, allora D è un corpo finito perché spazio vettoriale di dimensione finita su F. Allora D è commutativo e quindi $D = F$. Segue che $t = 1$ e così $n = r$. Pertanto $A \cong M_r(D) = M_n(F)$ e quindi A e $M_n(F)$ soddisfano le stesse identità polinomiali.
Supponiamo, ora, che F sia infinito e sia K un sottocampo massimale di D. Allora, essendo K commutativo e F infinito, per **(6.8)**, $A \bigotimes_F K$ soddisfa le stesse identità polinomiali di A. Inoltre

$$\begin{aligned} A \bigotimes_F K &\cong M_r(D) \bigotimes_F K \cong M_r(F) \bigotimes_F \left(D \bigotimes_F K \right) \cong \\ &\cong M_r(F) \bigotimes_F M_t(K) \cong M_{rt}(K) \cong M_{rt}(F) \bigotimes_F K. \end{aligned}$$

Per **(6.8)**, $M_{rt}(F) \bigotimes_F K$ soddisfa le stesse identità polinomiali di $M_{rt}(F)$ e quindi $A \bigotimes_F K$ soddisfa le stesse identità polinomiali di $M_{rt}(F) = M_n(F)$. □

6.10 Corollario. *Siano $n \in \mathbb{N}$ e A un'algebra semplice di dimensione n^2 sul suo centro F. Allora ogni polinomio centrale per $M_n(F)$ è centrale anche per A.*

Enunciamo, ora, il Teorema di Posner:

6.11 Teorema. ***(Teorema di Posner [15])***
Sia R una C-algebra prima soddisfacente un'identità polinomiale propria in $C\langle X\rangle$. Allora

(1) $Z(R) \neq 0$;

(2) *L'anello dei quozienti centrali $Q(R)$ è un'algebra semplice di dimensione finita sul suo centro e il centro è il campo dei quozienti $Q(Z(R))$ del centro di R;*

(3) *R e $Q(R)$ soddisfano le stesse identità polinomiali in $C\langle X\rangle$.*

Come già accennato all'inizio del capitolo, per la dimostrazione di tale teorema sfrutteremo tre risultati dovuti ad Amitsur, Levitzki e Rowen.
Prima di enunciare il teorema di Amitsur è necessario introdurre i concetti di radicale primo, di radicale di Jacobson e di elemento quasi regolare:

6.12 Definizione. Sia R un anello. Si dice *radicale primo di R* il seguente ideale:

$$P(R) := \bigcap_{\substack{P \text{ ideale} \\ \text{primo di } R}} P.$$

Se non esistono ideali primi in R allora $P(R) := R$.

6.13 Proposizione. *Il radicale primo di un anello R è un ideale nil.*

Dimostrazione. Se R è un anello nil la conclusione è ovvia. Pertanto, sia $a \in R$ un elemento non nilpotente e poniamo

$$S := \{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

$$T := \{J \mid J \text{ ideale di } R, J \cap S = \emptyset\}.$$

Sicuramente $T \neq \emptyset$ perché l'ideale nullo appartiene a T. Inoltre T è ordinato per inclusione e quindi, per il Lemma di Zorn, esiste $I \in T$ elemento massimale in T. Dimostriamo che I è un ideale primo di R.
Siano $\overline{I}_1, \overline{I}_2$ ideali di R/I tali che $\overline{I}_1\overline{I}_2 = 0$. Per il Teorema di corrispondenza per gli anelli, esistono I_1 e I_2 ideali di R contenenti I e tali che $I_1 I_2 \subseteq I$. Allora, poiché I è massimale in T, si ha che $I_1 = I$ oppure $I_1 \cap S = \emptyset$ e $I_2 = I$ oppure $I_2 \cap S = \emptyset$. Supponiamo che $I \subsetneqq I_1$ e $I \subsetneqq I_2$ e siano $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tali che $a^{n_1} \in I_1$ e $a^{n_2} \in I_2$. Allora

$$a^{n_1+n_2} \in I_1 I_2 \subseteq I$$

e ciò è impossibile perché $I \in T$. Pertanto $I_1 = I$ oppure $I_2 = I$e quindi R/I è un anello primo. Segue che I è un ideale primo e, in particolare, che $P(R) \subseteq I$.
Poiché $I \cap S = \emptyset$, si ha che $a \notin I$ e $a \notin P(R)$. Quindi, per l'arbitrarietà di a come elemento non nilpotente di R, $P(R)$ può contenere solo elementi nilpotenti, cioè $P(R)$ è un ideale nil. □

6.14 Definizione. Sia R un anello. Si dice *radicale di Jacobson di R* il seguente ideale:

$$J(R) := \bigcap_{\substack{M \ R-\text{modulo} \\ \text{irriducibile}}} Ann_R(M).$$

Se non esistono R-moduli irriducibili allora $J(R) := R$.

6.15 Osservazione. Se R è un anello commutativo unitario allora

$$J(R) = \bigcap_{\substack{I \text{ ideale} \\ \text{massimale} \\ \text{di } R}} I.$$

6.16 Definizione. Un anello R si dice *semisemplice* (o *semiprimitivo*) se e solo se $J(R) = 0$.

6.17 Definizione. Siano R un anello e $a \in R$. a si dice *quasi regolare a sinistra* se e solo se esiste $b \in R$ tale che $a + b + ba = 0$. b è il *quasi inverso sinistro* di a.
Analogamente, si dice che a è *quasi regolare a destra* se e solo se esiste $c \in R$ tale che $a + c + ac = 0$ e c si dice *quasi inverso destro* di a.
Infine, a è *quasi regolare* se è quasi regolare a sinistra e a destra.

Se L è un ideale (destro, sinistro o bilatero) di R, L è un *ideale quasi regolare a sinistra* se ogni suo elemento è quasi regolare a sinistra. Analogamente si definiscono gli ideali quasi regolari a destra e quelli quasi regolari.

6.18 Osservazione. Siano R un anello e L un ideale sinistro di R quasi regolare a sinistra. Allora $L \subseteq J(R)$.
Infatti sia M un R-modulo irriducibile e dimostriamo che $LM = 0$. Supponiamo che $LM \neq 0$. Allora esiste $v \in M$ tale che $Lv \neq 0$, cioè Lv è un sottomodulo non nullo di M. Dall'irriducibilità di M segue che $Lv = M$ e quindi esiste $a \in L$ tale che $av = -v$. Per l'ipotesi su L, a è quasi regolare a sinistra e sia $b \in R$ il quasi inverso sinistro di a. Allora $0 = (a+b+ba)v = -v$ che è impossibile perché altrimenti $Lv = 0$. Pertanto $LM = 0$ e quindi $L \subseteq J(R)$.

6.19 Proposizione. *Sia R un anello. Allora*

(1) *$J(R)$ è un ideale quasi regolare di R;*

(2) *$J(R)$ è l'intersezione di tutti gli ideali sinistri (o destri) di R quasi regolari a sinistra (a destra).*

Segue che $J(R)$ è il più grande ideale quasi regolare a sinistra (e a destra).

6.20 Osservazione. Siano R un anello unitario e $a \in R$. a è quasi regolare se e solo se $1 + a$ è invertibile in R. In particolare se b è il quasi inverso di a allora l'inverso di $1 + a$ è $1 + b$.

6.21 Proposizione. *Siano R un anello commutativo, $f \in R[x]$ e $a_0, \ldots, a_n \in R$ tali che $f = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$. Se f è quasi regolare in $R[x]$ allora a_0 è quasi regolare in R e $a_1, \ldots, a_n$ sono nilpotenti.*

Dimostrazione. Sia $g := b_0 + b_1x + \ldots + b_nx^n \in R[x]$ il quasi inverso di f. Allora $f + g + gf = 0$ e $f + g + fg = 0$ e quindi $a_0 + b_0 + b_0a_0 = 0$ e $a_0 + b_0 + a_0b_0 = 0$, cioè a_0 è quasi regolare in R.
Se $P(R) = R$ allora, per **(6.13)**, ogni elemento di R è nilpotente. Pertanto, sia $P \neq R$ un ideale primo di R e poniamo

$$\forall i \in \underline{n}\rfloor \cup \{0\} \qquad \overline{a}_i := a_i + P$$

e

$$\overline{f} := \overline{a}_0 + \overline{a}_1x + \ldots + \overline{a}_nx^n \in (R/P)[x].$$

Se F è il campo dei quozienti di R/P, poiché f è quasi regolare in $R[x]$, $\overline{f}$ è quasi regolare in $(R/P)[x] \subseteq F[x]$. Allora da **(6.20)** segue che $1 + \overline{f}$ è invertibile in $F[x]$. Ma un polinomio a coefficienti in un campo è invertibile se e solo se è un elemento non nullo del campo e quindi $1 + \overline{f} = 1 + \overline{a}_0$, $1 + \overline{a}_0$ è invertibile in F e, per ogni $i \in \underline{n}\rfloor$, $\overline{a}_i = 0$. Allora, per ogni $i \in \underline{n}\rfloor$, $a_i \in P$ e così

$$\forall i \in \underline{n}\rfloor \qquad a_i \in \bigcap_{\substack{J \text{ ideale} \\ \text{primo di } R}} J = P(R)$$

Ma $P(R)$ è un ideale nil di R e quindi $a_1, \ldots, a_n$ sono nilpotenti.

□

6.22 Proposizione. *Siano R un anello, $f = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n \in R[x]$ quasi regolare in $R[x]$ e $g = b_0+b_1x+\ldots+b_nx^n \in R[x]$ il quasi inverso di f in $R[x]$. Allora $b_1, \ldots, b_n$ appartengono al sottoanello generato da $a_0, a_1, \ldots, a_n$ e da b_0.*

Dimostrazione. Per ipotesi $f+g+gf=0$ e $f+g+fg=0$. Per ogni $k \in \underline{n}\rfloor$, il coefficiente di x^k in $f+g+gf$ è $a_k + b_k + \sum_{i=1}^{k} a_ib_{k-i} + a_0b_k$ e quindi

$$b_k + a_0b_k = -a_k - \sum_{i=1}^{k} a_ib_{k-i}.$$

Dalla quasi regolarità di a_0 segue:

$$b_k = -a_k - \sum_{i=1}^{k} a_ib_{k-i} + b_0\left(-a_k - \sum_{i=1}^{k} a_ib_{k-i}\right).$$

Procedendo per induzione su k si ottiene la tesi.

□

6.23 Teorema. ***(Amitsur [1])***
Sia R un anello privo di nil ideali non nulli e sia $J(R[t])$ il radicale di Jacobson dell'anello dei polinomi $R[t]$. Allora $J(R[t]) = 0$, cioè $R[t]$ è semisemplice.

Dimostrazione. Sia $f \in J(R[t]) - \{0\}$ con supporto di ordine minimo in $J(R[t])$, cioè f ha il minor numero di coefficienti non nulli tra i polinomi di $J(R[t])$. Siano $n \in \mathbb{N}, a_0, a_1, \ldots, a_n \in R$ tali che $a_n \neq 0$ e

$$f = a_0 + a_1t + \ldots + a_nt^n.$$

Siano $i, j \in \underline{n}\rfloor$ tali che $a_i \neq 0$ e $a_j \neq 0$. Allora

$$C_R(a_i) = C_R(a_j), \qquad (\star\star\star)$$

cioè i centralizzanti in R di a_i e di a_j coincidono. Infatti, se $b \in C_R(a_i)$, $bf - fb \in J(R[t])$ e, per la minimalità del supporto di f in $J(R[t]) - \{0\}$, si ha $bf - fb = 0$, cioè $bf = fb$. Pertanto $ba_j = a_jb$ e così $b \in C_R(a_j)$. Analogamente si dimostra che $C_R(a_j) \subseteq C_R(a_i)$ e quindi $C_R(a_i) = C_R(a_j)$. Per **(6.19(1))**, $J(R[t])$ è quasi regolare e quindi f è quasi regolare. Sia $g \in R[t]$ il quasi inverso di f. Se R_0 è il sottoanello generato dai coefficienti di f e dal termine noto di g, allora, per **(6.22)**, esistono $b_0, b_1, \ldots, b_n \in R_0$ tali che $g = b_0 + b_1t + \ldots + b_nt^n$.
Da $(\star\star\star)$ segue che R_0 è commutativo e quindi, poichè $f \in R_0[t]$, da **(6.21)** segue che a_0 è quasi regolare in R_0 mentre $a_1, \ldots, a_n$ sono nilpotenti.

Supponiamo $n > 0$ e sia I l'ideale generato da a_n in R. Se $v \in I$, esistono $m \in \mathbb{N}$, $r, s, r_1, s_1, \ldots, r_m, s_m \in R, u \in \mathbb{Z}$ tali che

$$v = ra_n + a_n s + \sum_{i=1}^{m} r_i a_n s_i + ua_n.$$

Posto

$$h := rf + fs + \sum_{i=1}^{m} r_i f s_i + uf \in J(R[t]),$$

si ha che il numero dei coefficienti non nulli di h è non superiore al numero dei coefficienti non nulli di f. Inoltre v è il coefficiente di t^n in h e quindi, se $v \neq 0$, v è nilpotente perché h risulta avere supporto di ordine minimo. Pertanto I è nil e quindi dalle ipotesi segue $n = 0$.
Allora ogni polinomio di $J(R[t])$ con supporto di ordine minimo è costante e quindi $f = a_0$. Segue che, per ogni $b \in R$, $fbt = a_0 bt \in J(R[t])$ e, poiché deve essere un polinomio costante, $a_0 bt = 0$, cioè $a_0 b = 0$. Analogamente si dimostra che

$$\forall b \in R \qquad ba_0 = 0.$$

Segue che lo $\mathbb{Z}$-modulo $\mathbb{Z}a_0$ generato da a_0 è un ideale bilatero nil di R e quindi è nullo per l'ipotesi su R. Ma ciò è impossibile perché $0 \neq a_0 \in \mathbb{Z}a_0$ e pertanto $J(R[t]) = 0$.

□

6.24 Teorema. ***(Levitzki [14])***
Se R è una C-algebra prima soddisfacente un'identità polinomiale propria, allora R è privo di nil ideali non nulli.

Dimostrazione. Sia $\overline{f} \in C\langle X \rangle$ un'identità polinomiale propria per R. Applicando il metodo di multilinearizzazione si ottiene una nuova identità polinomiale multilineare f di R e, per **(2.24(2))**, f è propria. Allora sia $c \in C$ un coefficiente di f tale che $cR \neq 0$ e sia $n \in \mathbb{N}$ tale che $deg(f) = n$. Per ogni $\pi \in \overline{S}_n := S_n - \{id_{\underline{n}|}\}$, sia $\alpha_\pi \in C$ tale che

$$f(x_1, \ldots, x_n) = cx_1 \ldots x_n + \sum_{\pi \in \overline{S}_n} \alpha_\pi x_{\pi(1)} \ldots x_{\pi(n)}.$$

Dimostriamo il teorema per induzione sul grado n di f.
Se $n = 1$ allora $f = cx_1$. Ma f è un'identità polinomiale per R e quindi $cR = 0$ che è una contraddizione.
Supponiamo, ora, vera la tesi per ogni anello primo soddisfacente un'identità polinomiale di grado $n - 1$ e proviamola per n. Sia I un nil ideale di R non nullo e sia $a \in I - \{0\}$ tale che $a^2 = 0$.
Posto $L := Ra$ e $R_1 := L/(L \cap Ann_d(L))$, si ha che R_1 è un anello primo.
Inoltre $cR_1 \neq 0$ perché altrimenti $cRa \subseteq Ann_d(L)$ e perciò $RacRa = 0$. Ma $c \in C$ e quindi $cRaRa = 0$. Poiché R è primo e $a \neq 0$, si ha $cRa = 0$ e

così $cRRa = 0$. Sempre perché R è primo e $a \neq 0$, segue $cR = 0$ che è impossibile in quanto contraddice l'ipotesi su c. Pertanto $cR_1 \neq 0$.
Siano $g \in C\langle X\rangle$ tale che $deg^1(g) = 0$ e

$$h := \sum_{\substack{\pi \in \overline{S}_n \\ \pi(1)\neq 1}} \alpha_\pi x_{\pi(1)} \dots x_{\pi(n)}$$

tali che $f = x_1 g(x_2, \dots, x_n) + h(x_1, x_2, \dots, x_n)$.
Per ogni $r_1, r_2, \dots, r_n \in R$ si ha:

$$\begin{aligned} 0 &= f(ar_1, r_2a, r_3a, \dots, r_na) = \\ &= ar_1 g(r_2a, \dots, r_na) + h(ar_1, r_2a, r_3a, \dots, r_na). \end{aligned}$$

Per ogni $\pi \in \overline{S}_n$ tale che $\pi(1) \neq 1$, sia $j_\pi \in \underline{n}] - \{1\}$ tale che $\pi(j_\pi) = 1$. Allora

$$h(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\substack{\pi \in \overline{S}_n \\ \pi(1)\neq 1}} \alpha_\pi x_{\pi(1)} \dots x_{\pi(j_\pi - 1)} x_1 x_{\pi(j_\pi+1)} \dots x_{\pi(n)}$$

e quindi, essendo $a^2 = 0$,
$h(ar_1, r_2a, r_3a, \dots, r_na) =$

$$= \sum_{\substack{\pi \in \overline{S}_n \\ \pi(1)\neq 1}} \alpha_\pi (r_{\pi(1)}a) \dots (r_{\pi(j_\pi-1)}a)(ar_1)(r_{\pi(j_\pi+1)}a) \dots (r_{\pi(n)}a) = 0.$$

Pertanto $aRg(r_2a, \dots, r_na) = 0$ e così $g(r_2a, \dots, r_na) = 0$ in quanto R è primo e $a \neq 0$. Inoltre c è un coefficiente di g e quindi g è un'identità polinomiale multilineare propria per R_1 tale che $deg(g) = n-1$. Dall'ipotesi induttiva segue che R_1 è privo di nil ideali non nulli. Ma Ra è un nil ideale di R perché $Ra \subseteq I$. Allora R_1 è nil e quindi $R_1 = 0$.
Pertanto $Ra \subseteq Ann_d(Ra)$ e così $RaRa = 0$. Poiché R è primo $Ra = 0$, cioè $a = 0$ che è assurdo.
Segue che l'unico nil ideale di R è 0. □

6.25 Teorema. ***(Teorema di Rowen [20])***
Sia R una C-algebra prima soddisfacente un'identità polinomiale propria. Allora $I \cap Z(R) \neq 0$ per ogni I ideale bilatero non nullo di R.

Dimostrazione. Sia I un ideale bilatero non nullo di R e supponiamo dapprima che R sia primo e semisemplice. Allora $J(R) = 0$ e, se $\{P_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ è l'insieme di tutti gli ideali primitivi di R, da **(6.19(2))** segue che

$$\bigcap_{\gamma\in\Gamma} P_\gamma = 0.$$

Sia $f \in C\langle X\rangle$ un'identità polinomiale propria per R e sia $c \in C$ un coefficiente di f tale che $cR \neq 0$. Poniamo:

$$\Gamma_1 := \{\gamma \in \Gamma \,|\, cR \subseteq P_\gamma\}$$

$$\Gamma_2 := \Gamma - \Gamma_1 = \{\gamma \in \Gamma \,|\, cR \nsubseteq P_\gamma\}$$

$$I_1 := \bigcap_{\gamma \in \Gamma_1} P_\gamma$$

$$I_2 := \bigcap_{\gamma \in \Gamma_2} P_\gamma.$$

Ovviamente $I_1 \cap I_2 = J(R)$ e quindi $I_1 \cap I_2 = 0$. Poiché $I_1 I_2 \subseteq I_1 \cap I_2 = 0$ e R è primo, $I_1 = 0$ oppure $I_2 = 0$. Se fosse $I_1 = 0$ allora $cR \subseteq I_1 = 0$ e ciò è impossibile perché per ipotesi $cR \neq 0$. Pertanto $I_2 = 0$ e così, posto

$$\forall\, \gamma \in \Gamma_2 \qquad R_\gamma := R/P_\gamma,$$

si ha che R è prodotto sottodiretto degli R_γ. Allora, per ogni $\gamma \in \Gamma_2$, f è un'identità polinomiale propria per R_γ e R_γ è un anello primitivo perché P_γ è un ideale primitivo. Pertanto sono verificate tutte le ipotesi del teorema di Kaplansky e così esiste $n_\gamma \in \mathbb{N}$ tale che R_γ è un'algebra semplice di dimensione n_γ^2 sul suo centro (che è un campo). Il teorema di Kaplansky fornisce anche un limite per tale dimensione in quanto abbiamo provato che $2n_\gamma \leq deg(f)$. Sia π_γ la γ-esima proiezione canonica e, posto

$$\overline{n} := max\{n_\gamma \,|\, \pi_\gamma(I) \neq 0\},$$

sia g il polinomio centrale di Razmyslov per $M_{\overline{n}}(\mathbb{Q})$. Allora, per ogni $\gamma \in \Gamma_2$ tale che $n_\gamma = \overline{n}$, g è centrale per R_γ mentre, per ogni $\gamma \in \Gamma_2$ tale che $n_\gamma < \overline{n}$, dal Teorema di Kaplansky e da **(5.4)** segue che g è un'identità polinomiale per R_γ .

Per ogni $\gamma \in \Gamma_2$, $\pi_\gamma(I)$ è un ideale bilatero di R_γ che è un anello semplice. Allora $\pi_\gamma(I) = 0$ oppure $\pi_\gamma(I) = R_\gamma$ e sicuramente esiste $\overline{\gamma} \in \Gamma_2$ tale che $\pi_{\overline{\gamma}}(I) \neq 0$ perché altrimenti si avrebbe $I = 0$. Segue:

$$\pi_\gamma(g(I)) = g(\pi_\gamma(I)) = \begin{cases} g(0) & \text{se } \pi_\gamma(I) = 0 \\ g(R_\gamma) & \text{se } \pi_\gamma(I) = R_\gamma \end{cases}$$

e $g(R_\gamma) = 0$ se $n_\gamma < \overline{n}$ e $0 \neq g(R_\gamma) \subseteq Z(R_\gamma)$ se $n_\gamma = \overline{n}$.
Segue che

$$\forall\, \gamma \in \Gamma_2 \qquad \pi_\gamma(g(I)) \subseteq Z(R_\gamma)$$

e quindi $g(I) \subseteq Z(R)$. Inoltre $g(I) \neq 0$. Infatti sia $\overline{\gamma} \in \Gamma_2$ tale che $n_{\overline{\gamma}} = \overline{n}$. Allora $\pi_{\overline{\gamma}}(I) = R_{\overline{\gamma}}$ e quindi

$$\pi_{\overline{\gamma}}(g(I)) = g(\pi_{\overline{\gamma}}(I)) = g(R_{\overline{\gamma}}) \neq 0,$$

cioè $g(I) \neq 0$.
Infine $g(I) \subseteq I$ perché I è bilatero e g è privo di termine noto. Pertanto

$$0 \neq g(I) \subseteq I \cap Z(R).$$

Abbiamo così dimostrato il teorema nel caso in cui R sia primo e semisemplice. Supponiamo, ora, che R sia solo primo e sia $f \in C\langle X\rangle$ un'identità polinomiale propria per R. Possiamo assumere che f sia multilineare, così, per **(3.2)**, f è un'identità polinomiale propria anche per $R[t]$ che risulta essere un anello primo. Da **(6.23)** e **(6.24)** segue che $J(R[t]) = 0$, cioè $R[t]$ è semisemplice. Pertanto, essendo $I[t]$ un ideale bilatero di $R[t]$, dalla prima parte della dimostrazione segue che

$$0 \neq I[t] \cap Z(R[t]) = I[t] \cap (Z(R))[t] = (I \cap Z(R))[t]$$

e quindi $I \cap Z(R) \neq 0$.

□

Possediamo, ora, tutti gli elementi utili per dimostrare il Teorema di Posner:

Dimostrazione del Teorema di Posner.
Da **(6.25)** segue subito che $Z(R) \neq 0$.
Consideriamo l'anello dei quozienti centrali di R:

$$Q(R) = \{z^{-1}r \mid r \in R, z \in Z(R) - \{0\}\}.$$

Si vede subito che $Q(R)$ è un'algebra prima e che il suo centro $Z(Q(R))$ è il campo dei quozienti di $Z(R)$.
Sia $f \in C\langle X\rangle$ un'identità polinomiale propria per R e sia $z \in Z(R)$ tale che $z \neq 0$. Allora $zf \in (Z(R))\langle X\rangle$ e quindi zf è un'identità polinomiale per R a coefficienti in $Z(R)$. Per **(6.7)**, zf è un'identità polinomiale anche per $Q(R)$ ed è propria perché $zR \neq 0$ in quanto $Z(R)$ è privo di divisori dello zero in R.
Pertanto $Q(R)$ verifica tutte le ipotesi di **(6.25)** e quindi, se I è un ideale bilatero non nullo di $Q(R)$, si ha $I \cap Z(Q(R)) \neq 0$.
Sia $a \in I \cap Z(Q(R))$ tale che $a \neq 0$. Essendo $Z(Q(R))$ un campo e I un ideale, $1 = a^{-1}a \in I$ e quindi $I = Q(R)$. Pertanto $Q(R)$ è un'algebra semplice sul suo centro $Z(Q(R)) = Q(Z(R))$. Il fatto che la dimensione di $Q(R)$ sul centro sia finita segue dal Teorema di Kaplansky.
Infine, poiché il centro di un anello primo è privo di divisori dello zero nell'anello, da **(6.7)** segue che, per un fissato polinomio $f \in C\langle X\rangle$ e per $0 \neq z \in Z(R) \subseteq Z(Q(R))$, vale:

$$f \in T(R) \Leftrightarrow zf \in T(R) \Leftrightarrow zf \in T(Q(R)) \Leftrightarrow f \in T(Q(R))$$

□

Utilizzando il Teorema di Posner, possiamo dare, ora, una dimostrazione del seguente importante risultato dovuto ad Amitsur.

6.26 Teorema. ***(Amitsur [2])***
Sia R una PI-algebra su C. Allora esistono $m, d \in \mathbb{N}$ tali che R soddisfa $S_d(x_1, \ldots, x_d)^m$.

Prima di dimostrare il teorema facciamo alcune osservazioni. Innanzitutto ricordiamo la definizione di algebra con identità polinomiale data in **(2.6)**:

Definizione. Sia A una C-algebra. A è un'algebra con identità polinomiale se e solo se esiste $f \in C\langle X\rangle$ tale che f sia identità polinomiale per A e uno dei monomi di f di grado più alto abbia 1 come coefficiente.
Un'algebra con identità polinomiale si dice PI-algebra.

6.27 Osservazione. L'importanza della definizione precedente risiede soprattutto nel fatto che se A è una PI-algebra e f è un'identità polinomiale per A tale che uno dei monomi di f di grado più alto ha 1 come coefficiente, allora f continua ad essere una identità polinomiale propria anche per ogni quoziente di A mentre in generale ciò non è vero.

6.28 Osservazione. Siano F un campo, A una F-algebra e $f \in F\langle X\rangle$ tale che $f \neq 0$. Se f è un'identità polinomiale per A allora A è una PI-algebra. Infatti se $c \in F$ è un coefficiente di un monomio di f di grado più alto, allora $c^{-1}f$ è un'identità polinomiale per A e quindi A è una PI-algebra.

6.29 Osservazione. Se A è una C-algebra prima e $f \in C\langle X\rangle$ è un'identità polinomiale propria per A allora A è una PI-algebra. Infatti, per il Teorema di Posner, $Q(A)$ è un'algebra semplice di dimensione finita sul centro F. Pertanto per **(6.9)** esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $Q(A)$ e $M_n(F)$ soddisfano le stesse identità. Allora, per il Teorema di Amitsur-Levitzki, il polinomio standard $S_{2n}(x_1, \dots, x_{2n})$ è un'identità polinomiale per $Q(A)$ ed ha come coefficienti 1 e -1. Per **(6.11(3))**, A soddisfa $S_{2n}(x_1, \dots, x_{2n})$ e quindi A è una PI-algebra.

Dimostrazione di (6.26).
Sia $T(R)$ il T-ideale delle identità polinomiali di R in $C\langle X\rangle$ e poniamo $\overline{R} := C\langle X\rangle / T(R)$.
Come mostrato nella proposizione **(2.16)**, si ha $T(R) = T(\overline{R})$, cioè R e $\overline{R}$ sono PI-equivalenti.
In particolare $\overline{R}$ è una PI-algebra perché lo è R e quindi soddisfa un'identità polinomiale f avente 1 come coefficiente di uno dei suoi monomi di grado massimo.
Supponiamo ora $P(\overline{R}) \neq \overline{R}$, e sia P un ideale primo di $\overline{R}$. Allora $\overline{R}/P$ è un'algebra prima e, per **(6.27)**, soddisfa f. Per il Teorema di Posner, $Q(\overline{R}/P)$ soddisfa f ed è un'algebra centrale e semplice di dimensione finita sul suo centro F. Siano $n, d \in \mathbb{N}$ tali che $dim_F Q(\overline{R}/P) = n^2$ e $deg(f) = d$. Allora, per il corollario **(6.9)** e per il Teorema di Amitsur-Levitzki, $Q(\overline{R}/P)$ soddisfa $S_{2n}(x_1, \dots, x_{2n})$ e inoltre $2n \leq d$. Pertanto $Q(\overline{R}/P)$ soddisfa anche $S_d(x_1, \dots, x_d)$ e in particolare,

$$\forall r_1, \dots, r_d \in \overline{R} \qquad S_d(r_1, \dots, r_d) \in P.$$

Per l'arbitrarietà di P si ha

$$\forall r_1,\dots,r_d \in \overline{R} \qquad S_d(r_1,\dots,r_d) \in \bigcap_{\substack{P \text{ ideale} \\ \text{primo di } \overline{R}}} P = P(\overline{R}) \qquad (\diamond)$$

Ma $P(\overline{R})$ è un ideale nil di $\overline{R}$. Poiché

$$S_d(x_1,\dots,x_d) + T(R) = S_d(x_1 + T(R),\dots,x_d + T(R)),$$

da $(\diamond)$ segue che $S_d(x_1,\dots,x_d) + T(R)$ è nilpotente in $\overline{R}$. Pertanto esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $S_d(x_1,\dots,x_d)^m \in T(R)$, cioè R soddisfa una potenza del polinomio standard.

□

Vediamo, ora, un'applicazione del Teorema di Posner ai T-ideali primi.

6.30 Proposizione. *Siano K un campo infinito e I un T-ideale primo di $K\langle X\rangle$. Allora esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $I = T(M_n(K))$.*

Dimostrazione. Posto $R := K\langle X\rangle / I$, si ha che R è una PI-algebra prima e $T(R) = I$.
Dal Teorema di Posner segue che $T(R) = T(Q(R))$ e che esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $Q(R)$ è un'algebra centrale semplice di dimensione n^2 sul proprio centro L.
Per **(6.9)**, $T(Q(R)) = T(M_n(L))$ in $L\langle X\rangle$ e, poiché $K \subseteq L$ e

$$M_n(L) \cong L \bigotimes_K M_n(K),$$

da **(3.2)** segue che $T(M_n(L))) = T(M_n(K))$ in $K\langle X\rangle$.
Pertanto $T(R) = T(M_n(K))$ in $K\langle X\rangle$ e quindi $I = T(M_n(K))$.

□

6.31 Osservazione. Se K è un campo infinito, allora i T-ideali primi di $K\langle X\rangle$ costituiscono una catena discendente di T-ideali. Infatti, per **(2.38)**, $T(M_n(K)) \supset T(M_{n+1}(K))$ e quindi

$$T(M_1(K)) \supset T(M_n(K)) \supset \ldots \supset T(M_n(K)) \supset \ldots$$

Osserviamo che le inclusioni sono tutte strette in quanto, per il Teorema di Amitsur-Levitzki,

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad S_{2n}(x_1,\dots,x_{2n}) \in T(M_n(K)) - T(M_{n+1}(K)).$$

Da **(6.30)** segue la tesi.

6.32 Definizione. Sia K un campo di caratteristica zero e sia I un T-ideale di una K-algebra A. I è un *T-ideale T-primo* (o *K-primo* o *verbalmente primo*) di A se, per ogni I_1, I_2 T-ideali di A tali che $I_1 I_2 \subseteq I$ si ha $I_1 \subseteq I$ oppure $I_2 \subseteq I$.

6.33 Teorema. *(Kemer [11])*
Sia K un campo tale che $char(K) = 0$, sia $E = E_0 \bigoplus E_1$ l'algebra esterna su K generata da X e sia I un T-ideale di $K\langle X\rangle$. I è un T-ideale T-primo non banale di $K\langle X\rangle$ se e solo se si verifica una delle seguenti condizioni:

(1) *Esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $I = T(M_n(K))$;*

(2) *Esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $I = T(M_n(E))$;*

(3) *Esistono $k \in \mathbb{N}$, $l \in \underline{k}]$ tali che $I = T(M_{k,l}(E))$.*

dove con $M_{k,l}(E)$ si intende la sottoalgebra di $M_{k+l}(E)$ costituita dalle matrici a blocchi del seguente tipo:

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ D & F \end{pmatrix}$$

con $B \in M_k(E_0)$, $C, D \in M_{k\times l}(E_1)$ e $F \in M_l(E_0)$.