CAPITOLO 4

IL TEOREMA DI KAPLANSKY

Dimostrato nel 1948, il teorema di Kaplansky è il primo significativo risultato ottenuto nell'ambito della teoria delle PI-algebre ed è sicuramente uno dei più importanti teoremi di struttura.
Per la sua dimostrazione è necessario studiare prima alcuni risultati riguardanti i sottocampi massimali di un corpo.

4.1 Definizione. Siano D un corpo e K un sottocampo di D. K è un *sottocampo massimale* di D se, per ogni H sottocampo di D, risulta

$$K \subseteq H \subseteq D \Rightarrow K = H.$$

4.2 Proposizione. *Siano D un corpo e K un sottocampo di D. Allora K è un sottocampo massimale di D se e solo se $C_D(K) = K$, dove $C_D(K)$ è il centralizzante in D di K.*

Dimostrazione. "$\Rightarrow$" Supponiamo che K sia un sottocampo massimale di D e sia $a \in C_D(K)$. Allora $K \subseteq K(a)$ e $K(a)$ è un sottocampo di D. Dalla massimalità di K in D segue che $a \in K$ e quindi $C_D(K) \subseteq K$. Essendo K commutativo, ovviamente $K \subseteq C_D(K)$ e quindi $C_D(K) = K$.
"$\Leftarrow$" Supponiamo che $C_D(K) = K$ e sia L un sottocampo di D tale che $K \subseteq L \subseteq D$. Allora, per ogni $a \in L$ e per ogni $k \in K$, si ha $ak = ka$ e quindi $a \in C_D(K) = K$. Pertanto $L \subseteq K$ e così $L = K$.

□

4.3 Teorema. *Siano F un campo, A una F-algebra centrale e semplice e B una F-algebra semplice. Allora $A \bigotimes_F B$ è una F-algebra semplice.*

Dimostrazione. Poniamo $R := A \bigotimes_F B$ e siano $1_A, 1_B$ le unità di A e B rispettivamente.
Sia Y una base di B su F. Allora, per ogni $r \in R - \{0\}$, esistono $n \in \mathbb{N}$,

$y_1, \ldots, y_n \in Y, a_1, \ldots, a_n \in A - \{0\}$ tali che r si scriva in modo unico nel seguente modo:

$$r = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes y_i.$$

Definiamo *lunghezza di* r il numero di addendi di quella sommatoria.
Sia I un ideale bilatero di R e sia $s \in I - \{0\}$ un elemento di lunghezza minima in I. Allora esistono $n \in \mathbb{N}, y_1, \ldots, y_n \in Y, a_1, \ldots, a_n \in A - \{0\}$ tali che

$$s = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes y_i.$$

Poiché $a_1 \neq 0$, Aa_1A è un ideale bilatero di A non nullo e quindi, dalla semplicità di A, segue che $Aa_1A = A$. Allora $1_A \in Aa_1A$ e quindi esistono $m \in \mathbb{N}, r_1, \ldots, r_m, s_1, \ldots, s_m \in A$ tali che

$$1_A = \sum_{j=1}^{m} r_j a_1 s_j.$$

Segue che

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m}(r_j \otimes 1_B)s(s_j \otimes 1_B) &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} r_j a_i s_j\right) \otimes y_i = \\
&= 1_A \otimes y_1 + \sum_{i=2}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} r_j a_i s_j\right) \otimes y_i =: w.
\end{aligned}$$

Poiché $\sum_{j=1}^{m}(r_j \otimes 1_B)s(s_j \otimes 1_B) \in I$, allora $w \in I$. Inoltre $w \neq 0$ perché $y_1, \ldots, y_n$ sono linearmente indipendenti e nell'espressione di w c'è almeno un elemento di A, l'unità 1_A, che è non nullo.
Sia, ora, $a \in A$. Allora, posto, per ogni $i \in \underline{n}\rfloor - \{1\}$, $\overline{a}_i := \sum_{j=1}^{m} r_j a_i s_j$, si ha

$$(a \otimes 1_B)w - w(a \otimes 1_B) = \sum_{i=2}^{n}(a\overline{a}_i - \overline{a}_i a) \otimes y_i = 0.$$

Infatti $(a\otimes 1_B)w - w(a\otimes 1_B) \in I$ perché I è bilatero e, poichè s ha lunghezza minima in I, ogni elemento di lunghezza minore deve essere nullo. Dalla lineare indipendenza di $y_2, \ldots, y_n$ segue che

$$\forall\, i \in \underline{n}\rfloor - \{1\} \qquad a\overline{a}_i = \overline{a}_i a.$$

L'arbitrarietà di $a \in A$ implica che $\overline{a}_i \in Z(A) = F$ e quindi

$$w = 1_A \otimes y_1 + \sum_{i=2}^{n} \overline{a}_i \otimes y_i = 1_A \otimes \left(y_1 + \sum_{i=2}^{n} \overline{a}_i y_i\right).$$

Posto $b := y_1+\sum_{i=2}^{n} \overline{a}_i y_i$ segue che $w = 1_A \otimes b$ e $b \neq 0$ essendo $w \neq 0$. Poiché B è semplice, $BbB = B$ e quindi esistono $t \in \mathbb{N}, c_1, \ldots, c_t, d_1, \ldots, d_t \in B$ tali che

$$1_B = \sum_{i=1}^{t} c_i b d_i.$$

Allora

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{t}(1_A \otimes c_i)w(1_A \otimes d_i) &= \sum_{i=1}^{t}(1_A \otimes c_i)(1_A \otimes b)(1_A \otimes d_i) = \\ &= 1_A \otimes \left(\sum_{i=1}^{t} c_i b d_i\right) = 1_A \otimes 1_B = 1_R.\end{aligned}$$

Ma $w \in I$ e quindi, essendo I bilatero, $\sum_{i=1}^{t}(1_A \otimes c_i)w(1_A \otimes d_i) \in I$, cioè $1_R \in I$. Pertanto $I = R$ e quindi R è semplice.

□

4.4 Corollario. *Sia F un campo e siano A, B F-algebre centrali e semplici. Allora $A \bigotimes_F B$ è una F-algebra centrale e semplice.*

4.5 Proposizione. *Siano D un corpo, K un sottocampo massimale e poniamo $F := Z(D)$. Allora $D \bigotimes_F K$ è un anello denso di trasformazioni K-lineari su D.*

Dimostrazione. Per ogni $a \in D$ consideriamo la moltiplicazione a sinistra in D:

$$l_a : D \to D, \qquad x \mapsto ax$$

e la moltiplicazione a destra in D:

$$\sigma_a : D \to D, \qquad x \mapsto xa.$$

Allora, riguardando D come un gruppo abeliano, si ha che $l_a, \sigma_a \in End(D)$. Posto $R := D \bigotimes_F K$, possiamo costruire la seguente applicazione:

$$f : R \to End(D), \qquad a \otimes c \mapsto l_a \circ \sigma_c$$

che risulta essere ben posta per la proprietà universale dei prodotti tensoriali. Allora f è un omomorfismo di anelli e $f(1_D \otimes 1_D) = id_D$.
Poiché tutti i corpi e i campi sono semplici, D è un'algebra centrale semplice su F e K è semplice. Per **(4.3)**, R è una F-algebra semplice e così $ker f = 0$ perché $ker f$ è un ideale bilatero di R. Essendo f non nullo, segue che D è un R-modulo fedele.
Inoltre, per ogni $a, x \in D$ e per ogni $c \in K$ si ha

$$(a \otimes c)\, x = f(a \otimes c)(x) = (l_a \circ \sigma_c)(x) = axc$$

e quindi D è irriducibile come R-modulo perché se $x \neq 0$ allora, per ogni $y \in D$, esiste $d \in D$ tale che $y = dx$.
Osserviamo, infine, che la moltiplicazione è non banale in quanto

$$(1_D \otimes 1_D)\, x = x \neq 0.$$

Pertanto R è primitivo e D è l'R-modulo fedele e irriducibile.
Vediamo, ora, com'è fatto $End_R(D)$:
$End_R(D) = \{g | g : D \to D\ F-\text{lineare}, g(axb) = ag(x)b\ \forall\, a, x \in D, b \in K\}$.
Pertanto dobbiamo studiare le applicazioni che soddisfano la seguente proprietà:

$$\forall\, a, x \in D, b \in K \qquad g(axb) = ag(x)b \tag{$\star$}$$

Innanzitutto osserviamo che g è una moltiplicazione a destra, infatti basta porre $x := 1_D$ e $b := 1_D$ e si ottiene:

$$\forall\, a \in D \qquad g(a) = ag(1_D).$$

Allora, posto $c := g(1_D)$,

$$\forall\, a \in D \qquad g(a) = ac$$

e quindi dalla $(\star)$ segue:

$$\forall\, a, x \in D, b \in K \qquad axbc = axcb.$$

Se poniamo $a := 1_D$ e $x := 1_D$ allora:

$$\forall\, b \in K \qquad bc = cb,$$

cioè $c \in C_D(K)$. Poiché K è massimale, da **(4.2)** segue che $C_D(K) = K$ e così $c \in K$. Pertanto $End_R(D) = \{\sigma_c \,|\, c \in K\}$.
Per il Teorema di Densità di Jacobson (cfr.**(1.11)**), R è un anello denso di trasformazioni lineari di D su $End_R(D) = \{\sigma_c \,|\, c \in K\} \cong K$ e l'azione di K su D è proprio per moltiplicazione a destra.

□

4.6 Proposizione. *Siano D un corpo, K un sottocampo massimale di D e F il centro di D. Se $dim_F D$ è finita allora esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $dim_F D = n^2$.*

Dimostrazione. $D \bigotimes_F K$ è denso nell'anello delle applicazioni lineari a destra $End(D)_K$ e quindi, poiché $dim_F D$ è finita, $D \bigotimes_F K \cong End(D)_K$. Posto $t := dim D_K$, si ha che

$$M_t(K) \cong End(D)_K \cong D \bigotimes_F K$$

e quindi $dim_F D = dim_F \Big(D \bigotimes_F K\Big) = t^2$.

□

4.7 Corollario. *Se A è un'algebra semplice di dimensione finita sul suo centro F allora esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $dim_F A = m^2$.*

Dimostrazione. Per il Teorema di Wedderburn-Artin esistono $n \in \mathbb{N}$ e un corpo D tali che $A \cong M_n(D)$. Allora

$$F = Z(A) \cong Z(M_n(D)) \cong Z(D).$$

Per **(4.6)**, esiste $t \in \mathbb{N}$ tale che $dim_F D = t^2$ e quindi

$$dim_F A = dim_F(M_n(D)) = dim_D(M_n(D)) dim_F D = n^2 t^2 = (nt)^2.$$

□

4.8 Teorema. ***(Teorema di Kaplansky [10])***
Ogni algebra primitiva soddisfacente un'identità polinomiale propria è un'algebra semplice di dimensione finita sul suo centro e tale dimensione è un quadrato.

Dimostrazione. Sia R una C-algebra primitiva e sia $f \in C\langle X \rangle$ un'identità polinomiale propria per R. Grazie a **(2.26)** possiamo supporre, senza perdere di generalità, che f sia multilineare e sia $d \in \mathbb{N}$ tale che $deg(f) = d$. Da **(1.15)** segue che esistono $n \in \mathbb{N}$ e un corpo D tali che $R \cong M_n(D)$ oppure, per ogni $n \in \mathbb{N}$, esistono un sottoanello S_n di R ed un epimorfismo φ_n da S_n su $M_n(D)$. Se si verificasse la seconda condizione, allora, posto $F := Z(D)$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ f sarebbe un'identità polinomiale per $M_n(F)$ e ciò è impossibile per la prima parte del Teorema di Amitsur-Levitzki. Pertanto $R \cong M_n(D)$ e quindi, essendo $Z(R) \cong F$, R è un'algebra semplice su F.
Resta da provare che la dimensione di R su F come spazio vettoriale è finita.
Ovviamente D soddisfa f in quanto D è contenuto in R a meno di isomorfismi. Se K è un sottocampo massimale di D, da **(3.2)** e dalla multilinearità di f segue che f è un'identità polinomiale per $A := D \bigotimes_F K$. Inoltre anche A è primitivo e così, in modo analogo a quanto visto sopra, da **(1.15)** segue che esistono $t \in \mathbb{N}$ e un corpo Δ tali che $A \cong M_t(\Delta)$. In particolare, $\Delta^{op} = End_A(M)$, dove M è un A-modulo fedele e irriducibile. Ma in **(4.5)** abbiamo dimostrato che D è un A-modulo fedele irriducibile e che $End_A(D) \cong K$. Allora $\Delta^{op} \cong K$ e quindi $\Delta \cong K$ essendo K un campo. Pertanto $A \cong M_t(K)$.

Poiché $R \cong M_n(D)$ e $M_n(D) \cong M_n(F) \otimes_F D$ segue:

$$\begin{aligned} R \bigotimes_F K &\cong M_n(D) \bigotimes_F K \cong \\ &\cong \left(M_n(F) \bigotimes_F D \right) \bigotimes_F K \cong \\ &\cong M_n(F) \bigotimes_F \left(D \bigotimes_F K \right) \cong \\ &\cong M_n(F) \bigotimes_F M_t(K) \cong M_{nt}(K). \end{aligned}$$

Allora

$$dim_F R = dim_K R \bigotimes_F K = (nt)^2.$$

Inoltre, da (**3.2**) segue che f è un'identità polinomiale per $R \otimes_F K$ e quindi per $M_{nt}(K)$. Allora, per il teorema di Amitsur-Levitzki, $2(nt) \leq d$ e così $dim_F R \leq [d/2]^2$.

□