CAPITOLO 4

SPAZI DI FUNZIONI HÖLDERIANE

Nel corso di questa seconda parte il nostro studio è rivolto al problema di Dirichlet associato ad un operatore differenziale uniformemente ellittico del secondo ordine con coefficienti α-hölderiani. L'intento è quello di provare che sotto opportune ipotesi di regolarità dell'aperto, in corrispondenza di un dato di classe $C^{0,\alpha}$ esiste ed è unica la soluzione del problema di Dirichlet di classe $C^{2,\alpha}$ (si ha dunque regolarità massimale).

Prima di procedere, abbiamo bisogno di alcuni risultati preliminari. Cominciamo col presentare nella sezione che segue alcune informazioni utili sulle funzioni hölderiane.

4.1 PROPRIETÀ ELEMENTARI DELLE FUNZIONI HÖLDERIANE

Definizione 4.1.1 *Siano Ω aperto di $\mathbb{R}^N$ e $0 < \alpha \leq 1$. Se $u : \Omega \to \mathbb{R}$, definiamo* **modulo di α-hölderianità** *di u la quantità*

$$[u]_\alpha = \sup_{\substack{x \neq y \\ x,y \in \Omega}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

Denotata con $C_b(\Omega)$ la classe delle funzioni continue e limitate in Ω, chiamiamo spazio delle funzioni α-hölderiane l'insieme

$$C^{0,\alpha}(\Omega) = \{u \in C_b(\Omega) : [u]_\alpha < +\infty\}.$$

In particolare $C^{0,1}(\Omega)$ è lo spazio delle funzioni lipschitziane in Ω.

La restrizione su α non è casuale dato che se Ω è connesso le uniche funzioni u per cui $[u]_\alpha < +\infty$ con $\alpha > 1$ sono le costanti (vd Esercizio 4.1.16).

Se $[u]_\alpha < +\infty$ allora $[u]_\alpha$ è la più piccola costante c tale che $|u(x) - u(y)| \leq c|x-y|^\alpha$, per ogni $x, y \in \Omega$.

E' immediato verificare che $[\cdot]_\alpha$ definisce una seminorma in $C^{0,\alpha}(\Omega)$ ($[u]_\alpha = 0$ per ogni funzione costante u). Invece $\|u\|_\alpha := \|u\|_\infty + [u]_\alpha$ è una norma e lo spazio $(C^{0,\alpha}(\Omega), \|\cdot\|_\alpha)$ è completo (vd Esercizio 4.1.17).

Osservazione 4.1.2 Se $u \in C_b(\Omega)$ verifica

$$|u(x) - u(y)| \leq c\,|x-y|^\alpha, \qquad |x-y| \leq \varrho_0,\ x, y \in \Omega$$

per qualche $\varrho_0 > 0$, allora $[u]_\alpha < +\infty$.

Infatti se $|x-y| \geq \varrho_0$, risulta

$$|u(x) - u(y)| \leq 2\|u\|_\infty \frac{|x-y|^\alpha}{|x-y|^\alpha} \leq \frac{2\|u\|_\infty}{\varrho_0^\alpha}|x-y|^\alpha,$$

per cui $[u]_\alpha \leq \max\left\{c, \frac{2\|u\|_\infty}{\varrho_0^\alpha}\right\}$.

L'osservazione appena fatta consente di stabilire una relazione d'inclusione tra spazi di funzioni hölderiane con diversi esponenti.

Proposizione 4.1.3 *Se $\beta < \alpha$ allora $C^{0,\alpha}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\beta}(\Omega)$.*

DIM. Sia $u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$. Essendo $\beta < \alpha$, risulta

$$|u(x) - u(y)| \leq [u]_\alpha |x-y|^\alpha \leq [u]_\alpha |x-y|^\beta$$

se $x, y \in \Omega$, $|x-y| \leq 1$. L'osservazione precedente implica la tesi. $\square$

Direttamente dalla definizione discende che ogni funzione hölderiana è uniformemente continua e come tale prolungabile con continuità al bordo del suo insieme di definizione. Pertanto

$$C^{0,\alpha}(\Omega) = C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}).$$

Proposizione 4.1.4 *Se Ω è limitato allora l'inclusione $C^{0,\alpha}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$ è compatta, per ogni $0 < \alpha \leq 1$.*

DIM. E' stato già osservato che ogni $u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ appartiene a $C(\overline{\Omega})$ essendo in particolare uniformemente continua. Resta quindi da provare che l'inclusione è compatta. Sia $(u_n) \subset C^{0,\alpha}(\Omega)$ tale che $[u_n]_\alpha \leq 1$ e $\|u_n\|_\infty \leq 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora, se $\delta > 0$, si ha

$$\omega(u_n, \delta) \leq [u_n]_\alpha \delta^\alpha \leq \delta^\alpha \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

dove $\omega(u_n, \delta) = \sup\{|u_n(x) - u_n(y)| : |x-y| \leq \delta\}$ è il modulo di continuità della funzione u_n. Pertanto la successione (u_n) è equicontinua e equilimitata. Per il teorema di Ascoli-Arzelà esiste una sottosuccessione (u_{n_k}) che converge uniformemente in $\overline{\Omega}$. $\square$

Proposizione 4.1.5 *Sia* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C^{0,\alpha}(\Omega)$ *tale che* u_n *converge uniformemente a una data* u *e* $[u_n]_\alpha \leq C$*, per qualche costante* $C > 0$*. Allora* $u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ *e* $[u]_\alpha \leq C$ *(cioè la palla di* $C^{0,\alpha}(\Omega)$ *è chiusa nella norma* $\|\cdot\|_\infty$*).*

DIM. Chiaramente $u \in C_b(\Omega)$. Per ogni $x, y \in \Omega$ risulta

$$|u_n(x) - u_n(y)| \leq C|x-y|^\alpha.$$

Passando al limite puntualmente si ha quanto richiesto. □

Definizione 4.1.6 *Se* $k \in \mathbb{N}$ *e* $\alpha \in (0,1]$*, definiamo*

$$C^{k,\alpha}(\Omega) := \{u \in C_b^k(\Omega) : D^\beta u \in C^{0,\alpha}(\Omega) \,\textit{per ogni}\ \beta \ \textit{con}\ |\beta| = k\},$$

dove $C_b^k(\Omega)$ *è lo spazio delle funzioni derivabili con continuità* k *volte e limitate in* Ω *con tutte le derivate. Posto*

$$\|u\|_{k,\alpha} := \sum_{|\beta|\leq k} \|D^\beta u\|_\infty + \sum_{|\beta|=k} [D^\beta u]_\alpha$$

con $u \in C^{k,\alpha}(\Omega)$*, risulta che* $(C^{k,\alpha}(\Omega), \|\cdot\|_{k,\alpha})$ *è spazio di Banach.*

Osserviamo che l'hölderianità delle derivate non implica in generale quella della funzione. Ciò dipende dalla natura geometrica dell'aperto Ω: come vedremo, se questo risulta regolare in qualche senso, l'inclusione $C^{k,\alpha}(\Omega) \hookrightarrow C^{k-1,\alpha}(\Omega)$ risulta verificata per ogni k.

Un problema simile legato alle proprietà geometriche di Ω è rappresentato dall'immersione $C_b^1(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\Omega)$.

Proposizione 4.1.7 *Se* Ω *è un aperto convesso di* $\mathbb{R}^N$*, allora per ogni* $\alpha \in (0,1]$ *risulta che* $C_b^1(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\Omega)$*.*

DIM. Sia $u \in C_b^1(\Omega)$. Fissati $x, y \in \Omega$, per il teorema di Lagrange, esiste $\xi \in \Omega$ tale che

$$u(x) - u(y) = \nabla u(\xi) \cdot (y - x).$$

Pertanto

$$|u(x) - u(y)| \leq \|\nabla u\|_\infty |x-y|.$$

Ciò implica che u appartiene a $C^{0,1}(\Omega)$ e quindi, per la Proposizione 4.1.3, ad ogni $C^{0,\alpha}(\Omega)$. □

In particolare, se $\Omega = \mathbb{R}^N$, $C_b^1(\mathbb{R}^N)$ è incluso in $C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)$. Osserviamo comunque che $C_b^1(\mathbb{R}^N)$ non è denso in $C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ (vd Esercizio 4.1.18).

Se viene meno l'ipotesi di convessità di Ω, il risultato precedente è falso in generale, come mostrano i due controesempi seguenti.

Esempio 4.1.8 Sia Ω un quadrato aperto privato di un segmento, per esempio

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 < x < 1,\ 0 < y < 1;\ y \notin \left]\frac{1}{2}, 1\right[\ \text{se } x = \frac{1}{2}\right\}.$$

Prendiamo una funzione u che sia limitata insieme alle derivate parziali prime in Ω e che valga identicamente 0 e 1 da parti opposte rispetto al segmento mancante. In tal modo u non è in $C^{0,\alpha}$ per alcun α: su due punti arbitrariamente vicini in Ω ma separati dal segmento mancante, la differenza dei valori di u è costantemente uguale a 1.

Esempio 4.1.9 Siano $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 < 1,\ y < 2|x|^{\frac{1}{2}}\}$ e u la funzione così definita

$$u(x,y) = \begin{cases} (sign\, x)y^\beta & \text{se } y > 0 \\ 0 & \text{se } y \le 0 \end{cases}$$

con $1 < \beta < 2$.

Chiaramente $u \in C_b^1(\Omega)$. Presi per $x > 0$ punti del tipo $(x, |x|^{\frac{1}{2}})$ e $(-x, |x|^{\frac{1}{2}})$ a distanza $2x$, risulta

$$u(x, |x|^{\frac{1}{2}}) = x^{\frac{\beta}{2}}, \quad u(-x, |x|^{\frac{1}{2}}) = -x^{\frac{\beta}{2}}.$$

Se $\frac{\beta}{2} < \alpha$ allora u non è α-hölderiana in Ω, pur essendo in $C_b^1(\Omega)$.

In entrambi i controesempi appena mostrati, l'inclusione di $C_b^1(\Omega)$ in $C^{0,\alpha}(\Omega)$ fallisce perchè la distanza euclidea utilizzata nella definizione di $C^{0,\alpha}(\Omega)$ non tiene conto della geometria dell'aperto considerato. Per questo è opportuno introdurre la nozione di distanza geodetica.

Definizione 4.1.10 *Sia Ω aperto connesso di $\mathbb{R}^N$ e siano $x, y \in \Omega$. Definiamo* **distanza geodetica** *tra x e y in Ω la quantità*

$$d_\Omega(x,y) = \inf\{l(\gamma) : \gamma \text{ curva } C^1 \text{ a tratti congiungente } x \text{ e } y \text{ in } \Omega\},$$

essendo $l(\gamma)$ la lunghezza di γ.

Naturalmente $d_\Omega(x,y) \ge |x-y|$. Se Ω è convesso allora d_Ω coincide con la distanza euclidea.

Definizione 4.1.11 *Ω si dice* **di tipo** *α, con $0 < \alpha \le 1$, se esiste $M > 0$ tale che*

$$d_\Omega(x,y) \le M|x-y|^\alpha \qquad \forall\, x, y \in \Omega.$$

Ω si dice **regolare** *se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $d_\Omega(x,y) \le \varepsilon$ per ogni $x, y \in \Omega$ con $|x-y| < \delta$.*

Chiaramente se Ω è di tipo α per qualche α allora è regolare. Inoltre si dimostra che se $\partial\Omega$ è lipschitziano allora Ω è di tipo 1.

L'interesse verso questi aperti è giustificato dalla seguente proposizione che indebolisce l'ipotesi di convessità della Proposizione 4.1.7.

Proposizione 4.1.12 *(a) Se Ω è di tipo α, con $0 < \alpha \leq 1$, allora $C_b^1(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\Omega)$ e $C^{k,\alpha}(\Omega) \hookrightarrow C^{k-1,\alpha}(\Omega)$, per ogni $k \in \mathbb{N}$.*

(b) Se Ω è regolare allora $C_b^1(\Omega) \hookrightarrow BUC(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$, dove $BUC(\Omega)$ indica la classe delle funzioni limitate e uniformemente continue in Ω.

DIM. (a) Siano $u \in C_b^1(\Omega)$ e $\varepsilon > 0$. Siano $x, y \in \Omega$ e γ una curva C^1 a tratti contenuta in Ω tale che $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$ e $l(\gamma) \leq d_\Omega(x, y) + \varepsilon$. Posto $v(t) := u(\gamma(t))$, risulta

$$u(y) - u(x) = v(1) - v(0) = \int_0^1 v'(t)dt = \int_0^1 \nabla u(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)dt,$$

da cui

$$|u(y) - u(x)| \leq \|\nabla u\|_\infty \int_0^1 |\dot{\gamma}(t)|dt = \|\nabla u\|_\infty l(\gamma) \leq \|\nabla u\|_\infty (d_\Omega(x, y) + \varepsilon).$$

Mandando $\varepsilon \to 0$ e usando che Ω è di tipo α otteniamo che $u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$. Per la seconda parte di (a) basta applicare quanto appena provato alle derivate di ordine $k - 1$ di un'arbitraria funzione di $C^{k,\alpha}(\Omega)$.

(b) Si procede esattamente come in (a). □

Spesso è utile saper prolungare una funzione $u \in C^{k,\alpha}(\Omega)$ ad una funzione $\widetilde{u} \in C^{k,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ al fine di trasferire a u delle proprietà valide in $\mathbb{R}^N$. Naturalmente quest'estensione non si può costruire sempre, ma è possibile per aperti sufficientemente regolari.

Ricordando la Definizione 1.0.1, un aperto Ω è di classe $C^{k,\alpha}$ se le trasformazioni H, J sono di classe $C^{k,\alpha}$ nei rispettivi domini.

Teorema 4.1.13 *Sia Ω un aperto limitato con bordo $\partial\Omega$ di classe $C^{k,\alpha}$. Allora esiste*

$$E : C^{k,\alpha}(\Omega) \to C^{k,\alpha}(\mathbb{R}^N)$$

operatore lineare tale che per ogni $u \in C^{k,\alpha}(\Omega)$ risulta

(1) $Eu = u$ in Ω,

(2) $\|Eu\|_{C^{r,\alpha}(\mathbb{R}^N)} \leq K \|u\|_{C^{r,\alpha}(\Omega)}$ per ogni $r \leq k$.

Omettiamo la dimostrazione di questo risultato generale mentre sottoliniamo con il seguente corollario ciò che sarà utile per i nostri interessi.

Corollario 4.1.14 *Se Ω è un aperto limitato con bordo di classe $C^{k,\alpha}$ allora $C^{k,\alpha}(\Omega) \hookrightarrow C^{k-1,\alpha}(\Omega)$ per ogni $0 < \alpha \leq 1$.*

DIM. Se $u \in C^{k,\alpha}(\Omega)$ allora $Eu \in C^{k,\alpha}(\mathbb{R}^N)$. Siccome $\mathbb{R}^N$ è convesso, per la Proposizione 4.1.7 si ha $Eu \in C^{k-1,\alpha}(\mathbb{R}^N)$. In particolare $u = Eu|_\Omega \in C^{k-1,\alpha}(\Omega)$. □

Esercizio 4.1.15 Provare che la funzione $f(x) = |x|^\alpha$, con $0 < \alpha \leq 1$, è α-hölderiana.

Esercizio 4.1.16 Siano Ω un aperto connesso di $\mathbb{R}^N$ e $\alpha > 1$. Se $u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$, allora u è costante (basta provare che esiste ∇u e che $\nabla u \equiv 0$).

Esercizio 4.1.17 Provare che $\|\cdot\|_\alpha = \|\cdot\|_\infty + [\cdot]_\alpha$ è una norma in $C^{0,\alpha}(\Omega)$ e che lo spazio $(C^{0,\alpha}(\Omega), \|\cdot\|_\alpha)$ è completo.

Esercizio 4.1.18 Provare che

$$\overline{C_b^1(\mathbb{R}^N)}^{\|\cdot\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)}} = \left\{ u \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N) \ : \ \lim_{\delta \to 0} \sup_{0<|x-y|<\delta} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} = 0 \right\}$$

(Suggerimento: usare convoluzioni).

Esercizio 4.1.19 Sia $(u_n) \subseteq C^{0,\alpha}(\Omega)$, $\|u_n\|_\alpha \leq C$. Provare che esiste (u_{n_k}) sottosuccessione di (u_n) convergente uniformemente sui compatti ad una funzione $u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ con $\|u\|_\alpha \leq C$.

4.2 ALCUNE DISUGUAGLIANZE INTERPOLATIVE

Definizione 4.2.1 *Siano X, Y e Z spazi di Banach tali che $Z \hookrightarrow Y \hookrightarrow X$. Scriveremo che $Y \in J_\theta(X, Z)$, con $0 \leq \theta \leq 1$, se esiste una costante $c > 0$ tale che*

$$\|z\|_Y \leq c\,\|z\|_X^{1-\theta}\|z\|_Z^\theta \qquad\qquad z \in Z. \tag{4.1}$$

Osserviamo che la stima (4.1) implica per ogni $\eta > 0$ esiste $c_\eta > 0$ tale che

$$\|z\|_Y \leq \eta\|z\|_Z + c_\eta\|z\|_X. \tag{4.2}$$

Infatti, per la disuguaglianza di Young risulta per ogni $\varepsilon > 0$

$$\|z\|_Y \leq c\,(\|z\|_X^{1-\theta}\,\varepsilon^{-1})(\|z\|_Z^\theta\,\varepsilon) \leq c\left(\theta\,\|z\|_Z\varepsilon^{\frac{1}{\theta}} + (1-\theta)\|z\|_X\varepsilon^{\frac{1}{\theta-1}}\right),$$

che è la (4.2). Da notare che si può scegliere in modo arbitrario di rendere piccolo il contributo di $\|z\|_X$ o di $\|z\|_Z$ (dipende da ciò che si riesce a controllare meglio).

Viceversa, a partire da (4.2) si può ottenere (4.1) conoscendo la dipendenza di c_η da η. Basta infatti minimizzare rispetto a η la quantità a secondo membro di (4.2).

In questo linguaggio la stima (a) della Proposizione 1.2.1 del primo capitolo dicono che $H^1(\mathbb{R}^N) \in J_{\frac{1}{2}}(L^2(\mathbb{R}^N), H^2(\mathbb{R}^N))$.

Esempio 4.2.2 Sia Ω un aperto di misura finita e siano $r \le p \le q$. Allora è noto che $L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$. Sia ora $\theta \in [0,1]$ tale che $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{q} + \frac{\theta}{r}$. Per la disuguaglianza di Hölder si ha che

$$\|f\|_p \le \|f\|_q^{1-\theta} \|f\|_r^{\theta} \qquad \forall f \in L^q(\Omega)$$

cioè $L^p(\Omega) \in J_{1-\theta}(L^r(\Omega), L^q(\Omega))$.

Se $\beta \in \mathbb{R}^+$ scriviamo $\beta = k + \alpha$, dove $k = [\beta] \in \mathbb{N}$ è la parte intera di β. Definiamo quindi

$$C^\beta(\Omega) := C^{k,\alpha}(\Omega),$$

se $\alpha > 0$ e

$$C^\beta(\Omega) = C_b^k(\Omega)$$

se $\alpha = 0$.

Enunciamo a questo punto il teorema più importante di questa sezione.

Teorema 4.2.3 *Siano α, β e γ numeri reali tali che $0 \le \alpha \le \beta \le \gamma$. Allora*

$$C^\beta(\mathbb{R}^N) \in J_{\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}}\left(C^\alpha(\mathbb{R}^N), C^\gamma(\mathbb{R}^N)\right). \tag{4.3}$$

DIM. Dimostriamo il teorema solo in alcuni casi particolari (che sono poi quelli che useremo più spesso).

(a) $C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N) \in J_\alpha(C_b(\mathbb{R}^N), C_b^1(\mathbb{R}^N))$, $0 < \alpha < 1$.

Occorre provare che $\|u\|_\alpha \le c\|u\|_0^{1-\alpha}\|u\|_1^\alpha$, per ogni $u \in C_b^1(\mathbb{R}^N)$ con $\|u\|_1 = \|u\|_\infty + \|\nabla u\|_\infty$. Stimiamo separatamente $\|u\|_\infty$ e $[u]_\alpha$.

Siccome $\|u\|_\infty \le \|u\|_1$ segue subito che $\|u\|_\infty \le \|u\|_\infty^{1-\alpha}\|u\|_1^\alpha$. Inoltre valgono

$$\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} \le \|\nabla u\|_\infty |x-y|^{1-\alpha},$$

e

$$\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} \le 2\|u\|_\infty |x-y|^{-\alpha}.$$

Usando entrambe queste disuguaglianze abbiamo

$$\begin{aligned}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} &= \left[\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha}\right]^\alpha \left[\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha}\right]^{1-\alpha} \\ &\le \|\nabla u\|_\infty^\alpha |x-y|^{\alpha(1-\alpha)} (2\|u\|_\infty)^{1-\alpha} |x-y|^{-\alpha(1-\alpha)}\end{aligned}$$

da cui segue che $[u]_\alpha \le 2^{1-\alpha}\|u\|_\infty^{1-\alpha}\|\nabla u\|_\infty^\alpha \le 2^{1-\alpha}\|u\|_\infty^{1-\alpha}\|u\|_1^\alpha$.

(b) $C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^N) \in J_\alpha(C_b^1(\mathbb{R}^N), C_b^2(\mathbb{R}^N))$, $0<\alpha<1$.
Basta applicare (a) alle derivate parziali prime.

(c) $C_b^1(\mathbb{R}^N) \in J_{\frac{1}{2}}(C_b(\mathbb{R}^N), C_b^2(\mathbb{R}^N))$, $0<\alpha<1$.
Sia $u \in C_b^2(\mathbb{R}^N)$. Applicando la formula di Taylor, possiamo scrivere

$$u(x+th) = u(x) + \nabla u(x)\cdot th + \frac{1}{2}t^2(D^2u(\xi)h,h) \qquad |h|\le 1,\ t\in[0,1]$$

da cui segue

$$\nabla u(x)\cdot h = \frac{u(x+th)-u(x)}{t} + \frac{t}{2}(D^2u(\xi)h,h).$$

Prendendo l'estremo superiore su tutti i vettori h tali che $|h|\le 1$ si ha

$$\|\nabla u\|_\infty \le \frac{2}{t}\|u\|_\infty + \frac{t}{2}\|D^2u\|_\infty.$$

La tesi segue ora minimizzando il secondo membro dell'ultima disuguaglianza rispetto a t.

(d) $C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^N) \in J_{\frac{1+\alpha}{2}}(C_b(\mathbb{R}^N), C_b^2(\mathbb{R}^N))$, $0<\alpha<1$.
E' sufficiente applicare i primi due casi dimostrati:

$$\|u\|_{1,\alpha} \le c\,\|u\|_2^\alpha\|u\|_1^{1-\alpha} \le c_1\|u\|_2^\alpha\|u\|_\infty^{\frac{1-\alpha}{2}}\|u\|_2^{\frac{1-\alpha}{2}} = c_1\|u\|_2^{\frac{1+\alpha}{2}}\|u\|_\infty^{\frac{1-\alpha}{2}}.$$

(e) $C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N) \in J_{\frac{\alpha}{2}}(C_b(\mathbb{R}^N), C_b^2(\mathbb{R}^N))$, $0<\alpha<1$.
Applicando il primo caso e poi il terzo al termine $\|u\|_1^\alpha$ si ha

$$\|u\|_\alpha \le c\,\|u\|_\infty^{1-\alpha}\|u\|_1^\alpha \le c_1\|u\|_\infty^{1-\alpha}\|u\|_\infty^{\frac{\alpha}{2}}\|u\|_2^{\frac{\alpha}{2}} = c_1\|u\|_\infty^{1-\frac{\alpha}{2}}\|u\|_2^{\frac{\alpha}{2}}.$$

(f) $C_b^2(\mathbb{R}^N) \in J_{\frac{1}{1+\alpha}}(C_b^1(\mathbb{R}^N), C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^N))$, $0<\alpha<1$.
Ricorriamo di nuovo allo sviluppo di Taylor e scriviamo

$$\begin{aligned} u(x+th)-u(x) &= th\cdot\nabla u(x) + \frac{1}{2}t^2[(D^2u(\xi)h,h) + (D^2u(x)h,h) \\ &\quad -(D^2u(x)h,h)] \end{aligned}$$

con $|h|\le 1$ e $t\in[0,1]$. Quindi

$$(D^2u(x)h,h) = 2\frac{u(x+th)-u(x)}{t^2} - \frac{2}{t}h\cdot\nabla u(x) + ((D^2u(x)-D^2u(\xi))h,h).$$

Applicando il teorema di Lagrange si ha

$$(D^2u(x)h,h) = 2\frac{\nabla u(\eta)\cdot h}{t} - \frac{2}{t}h\cdot\nabla u(x) + (D^2u(x)-D^2u(\xi)h,h),$$

per qualche η tra x e $x+th$. Allora

$$|(D^2u(x)h,h)| \le \frac{4}{t}\|\nabla u\|_\infty + [D^2u]_\alpha t^\alpha,$$

avendo tenuto conto che $|x-\xi|<t$. Prendendo l'estremo superiore su tutti gli h con $|h|\le 1$ si ha in definitiva

$$\|D^2u\|_\infty \le \frac{4}{t}\|\nabla u\|_\infty + [D^2u]_\alpha t^\alpha.$$

Minimizzando t si ottiene la tesi. □

Corollario 4.2.4 *Sia Ω aperto limitato di classe C^γ. Allora*

$$C^\beta(\Omega) \in J_{\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}}\left(C^\alpha(\Omega), C^\gamma(\Omega)\right) \tag{4.4}$$

con $0\le\alpha\le\beta\le\gamma$.

DIM. Data la regolarità di Ω esiste E operatore di estensione tale che $\|Eu\|_{C^r(\mathbb{R}^N)} \le K\,\|u\|_{C^r(\Omega)}$ per ogni $r\le\gamma$. Per ogni $u\in C^\gamma(\overline{\Omega})$ si ha dunque

$$\begin{aligned}\|u\|_{C^\beta(\Omega)} &= \|Eu\|_{C^\beta(\Omega)} \le \|Eu\|_{C^\beta(\mathbb{R}^N)} \le c\,\|Eu\|^{\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}}_{C^\alpha(\mathbb{R}^N)}\|Eu\|^{\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}}_{C^\gamma(\mathbb{R}^N)}\\ &\le c\,K\|u\|^{\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}}_{C^\alpha(\Omega)}\|u\|^{\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}}_{C^\gamma(\Omega)}\end{aligned}$$

grazie al teorema precedente. □

Corollario 4.2.5 *Sia Ω un aperto di classe $C^{2,\alpha}$. Allora per ogni $\varepsilon>0$ esiste $c_\varepsilon>0$ tale che*

$$\|u\|_\alpha, \|u\|_{1,\alpha}, \|u\|_2 \le \varepsilon\|u\|_{2,\alpha} + c_\varepsilon\|u\|_\infty \qquad \forall\, u\in C^{2,\alpha}(\Omega)$$

(dove la dipendenza di c_ε da ε cambia per le varie norme che compaiono nel primo membro della disuguaglianza precedente). In particolare se $u\in C^{2,\alpha}(\Omega)$ allora $\|\cdot\|_{2,\alpha}$ e $\|\cdot\|_\infty + [D^2\cdot]_\alpha$ sono norme equivalenti.

DIM. Ricordiamo che per definizione $\|u\|_{2,\alpha} = \|u\|_\infty + \|\nabla u\|_\infty + \|D^2u\|_\infty + [D^2u]_\alpha$. Per il corollario precedente $C^\beta(\Omega) \in J_{\frac{\beta-a}{\gamma-a}}\left(C^a(\Omega), C^\gamma(\Omega)\right)$. Se prendiamo $\gamma = 2+\alpha$ e $a=0$ per ogni $0\le\beta\le 2+\alpha$ otteniamo che $C^\beta(\Omega)\in J_{\frac{\beta}{2+\alpha}}\big(C_b(\Omega), C^{2+\alpha}(\Omega)\big)$. In particolare per $\beta=\alpha$, $\beta=1+\alpha$, $\beta=2$ si ottiene la prima parte dell'enunciato.

Usando poi le stime corrispondenti ai casi $\beta=1$, $\beta=2$, possiamo scrivere per ogni $\varepsilon>0$

$$\begin{aligned}\|u\|_{2,\alpha} &= \|u\|_\infty + \|\nabla u\|_\infty + \|D^2u\|_\infty + [D^2u]_\alpha\\ &\le \|u\|_\infty + [D^2u]_\alpha + \varepsilon\|u\|_{2,\alpha} + c_\varepsilon\|u\|_\infty.\end{aligned}$$

Scegliendo $\varepsilon=\frac{1}{2}$ otteniamo

$$\|u\|_{2,\alpha} \le \widetilde{c}\,(\|u\|_\infty + [D^2u]_\alpha)$$

e questo conclude la dimostrazione. □

Esercizio 4.2.6 Provare che $C_b^1(\mathbb{R}^N) \in J_{\frac{1}{1+\alpha}}(C_b(\mathbb{R}^N), C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^N))$.

4.3 Caratterizzazione integrale delle funzioni hölderiane.

Siano Ω aperto limitato di $\mathbb{R}^N$, $x_0 \in \Omega$ e $\varrho > 0$. Poniamo $\Omega(x_0, \varrho) = \Omega \cap B_\varrho(x_0)$. Se $u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$, si vede facilmente che

$$\int_{\Omega(x_0,\varrho)} |u(x) - u(x_0)|^2 dx \leq \omega_N [u]_\alpha^2 \varrho^{N+2\alpha}, \tag{4.5}$$

dove ω_N è la misura di Lebesgue della palla unitaria di $\mathbb{R}^N$. La stima ottenuta è significativa per $\varrho \to 0$, poichè dà esplicitamente l'andamento dell'integrale a primo membro.

Se indeboliamo le ipotesi su u e richiediamo soltanto che u sia limitata, allora l'unica stima possibile è

$$\int_{\Omega(x_0,\varrho)} |u(x) - u(x_0)|^2 dx \leq 4\|u\|_\infty^2 \omega_N \varrho^N.$$

Assumendo u uniformemente continua invece

$$\int_{\Omega(x_0,\varrho)} |u(x) - u(x_0)|^2 dx \leq \omega^2(u, \varrho) \omega_N \varrho^N$$

dove $\omega(u, \varrho) \to 0$ se $\varrho \to 0$.

E' chiaro quindi che la convergenza a zero della quantità integrale considerata è tanto più veloce quanto più è regolare la funzione u. Se $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, evidentemente non ha senso fare valutazioni puntuali. In questo caso, sostituiamo $u(x_0)$ con la media integrale di u su $\Omega(x_0, \varrho)$. Definiamo

$$u_{x_0,\varrho} := \frac{1}{|\Omega(x_0, \varrho)|} \int_{\Omega(x_0,\varrho)} u(y) dy \tag{4.6}$$

dove $|\Omega(x_0, \varrho)|$ denota la misura di Lebesgue dell'insieme $\Omega(x_0, \varrho)$. Proviamo che se $u \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ allora una stima come (4.5) continua a valere sostituendo $u(x_0)$ con $u_{x_0,\varrho}$. Infatti

$$u(x_0) - u_{x_0,\varrho} = \frac{1}{|\Omega(x_0, \varrho)|} \int_{\Omega(x_0,\varrho)} (u(x_0) - u(y)) dy$$

da cui segue che

$$|u(x_0) - u_{x_0,\varrho}| \leq \frac{1}{|\Omega(x_0, \varrho)|} \int_{\Omega(x_0,\varrho)} |u(y) - u(x_0)| dy \leq [u]_\alpha \varrho^\alpha.$$

Applicando la disuguaglianza triangolare e la stima appena ricavata abbiamo

$$|u(x)-u_{x_0,\varrho}| \le |u(x)-u(x_0)|+|u(x_0)-u_{x_0,\varrho}| \le 2[u]_\alpha \varrho^\alpha \qquad \text{se } |x-x_0| \le \varrho.$$

Elevando al quadrato e integrando su $\Omega(x_0,\varrho)$ otteniamo infine

$$\int_{\Omega(x_0,\varrho)} |u(x)-u_{x_0,\varrho})|^2 dx \le 4[u]_\alpha^2 \omega_N \varrho^{N+2\alpha}, \qquad \forall \varrho > 0. \tag{4.7}$$

E' interessante far vedere che vale anche il viceversa, per cui (4.7) caratterizza completamente le funzioni hölderiane.

Definizione 4.3.1 *Fissiamo $\lambda > 0$. Se $u \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, definiamo la seminorma*

$$|u|_\lambda^2 := \sup_{\substack{x_0\in\Omega\\ \varrho>0}} \frac{1}{\varrho^\lambda} \int_{\Omega(x_0,\varrho)} |u(x)-u_{x_0,\varrho}|^2 dx. \tag{4.8}$$

Chiamiamo **spazi di Campanato** *gli spazi*

$$L^{2,\lambda}(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : |u|_\lambda < +\infty\}.$$

Ogni $L^{2,\lambda}(\Omega)$ è uno spazio di Banach se munito della norma $\|\cdot\|_\lambda^2 = \|\cdot\|_2^2 + |\cdot|_\lambda^2$.

Richiedendo che $\sup_{x_0\in\Omega,\varrho>0} \frac{1}{\varrho^\lambda} \int_{\Omega(x_0,\varrho)} |u(x)|^2 < +\infty$ si ottengono i cosiddetti spazi di Morrey.

E' utile per il seguito introdurre delle varianti della seminorma appena introdotta e di quella hölderiana. Precisamente, fissiamo $R_0 > 0$ e poniamo

$$|u|_{\lambda,R_0}^2 := \sup_{\substack{x_0\in\Omega\\ 0<\varrho\le R_0}} \frac{1}{\varrho^\lambda} \int_{\Omega(x_0,\varrho)} |u(x)-u_{x_0,\varrho}|^2 dx \tag{4.9}$$

e

$$[u]_{\alpha,R_0} := \sup_{\substack{x,y\in\Omega\\ 0<|x-y|\le R_0}} \frac{|u(y)-u(x)|}{|y-x|^\alpha}. \tag{4.10}$$

Per avere la caratterizzazione integrale delle funzioni hölderiane richiediamo una proprietà di regolarità all'aperto Ω.

Definizione 4.3.2 *Diciamo che Ω è* **di tipo (A)** *se esiste $A > 0$ tale che per ogni $x_0 \in \Omega$ e $\varrho > 0$ risulta*

$$|\Omega(x_0,\varrho)| \ge A\varrho^N.$$

Notiamo che tale proprietà è significativa quando x_0 è vicino a $\partial\Omega$. Se $\partial\Omega$ è un bordo piatto allora $|\Omega(x_0,\varrho)| \geq \frac{1}{2}|B_\varrho(x_0)| = \frac{1}{2}\omega_N\varrho^N$. Si può provare che se $\partial\Omega$ è lipschitziano allora Ω è di tipo (A).

Se $\varrho > 0$ e $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, poniamo

$$(V_\varrho u)(x) := \frac{1}{|\Omega(x,\varrho)|}\int_{\Omega(x,\varrho)} u(y)dy \tag{4.11}$$

Proposizione 4.3.3 *Siano Ω di tipo (A) e supponiamo $1 \leq p < \infty$. Valgono allora le seguenti affermazioni*

(1) $V_\varrho : L^p(\Omega) \to L^p(\Omega), \quad \|V_\varrho\| \leq \left(\frac{\omega_N}{A}\right)^{\frac{1}{p}}$*;*

(2) $\lim\limits_{\varrho\to 0} V_\varrho u = u$ in $L^p(\Omega)$*;*

(3) $V_\varrho u \in C(\Omega)$*, per ogni* $u \in L^p(\Omega)$.

DIM. (1) Sia $u \in L^p(\Omega)$. Applicando la disuguaglianza di Hölder, otteniamo

$$|(V_\varrho u)(x)|^p \leq \frac{1}{|\Omega(x,\varrho)|}\int_{\Omega(x,\varrho)} |u(y)|^p dy.$$

Integrando su Ω e usando il Teorema di Fubini risulta

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |(V_\varrho u)(x)|^p dx &\leq \int_\Omega \frac{1}{|\Omega(x,\varrho)|}\int_{\Omega(x,\varrho)} |u(y)|^p dy\, dx \\
&= \int_\Omega |u(y)|^p \int_{\Omega(y,\varrho)} \frac{1}{|\Omega(x,\varrho)|} dx\, dy \\
&\leq \int_\Omega \frac{|u(y)|^p \omega_N \varrho^N}{A\varrho^N} dy \\
&= \frac{\omega_N}{A}\int_\Omega |u(y)|^p dy = \frac{\omega_N}{A}\|u\|_p^p.
\end{aligned}$$

(2) Se $u \in C_0^\infty(\Omega)$ allora $V_\varrho u$ converge a u per $\varrho \to 0$ in $L^p(\Omega)$. In generale se $u \in L^p(\Omega)$, basta argomentare per densità, notando che grazie a (1), la famiglia di operatori $(V_\varrho)_\varrho$ è equilimitata in norma.

(3) Per provare che $V_\varrho u$ è una funzione continua in Ω, basta provare che le funzioni $f(x) = |\Omega(x,\varrho)|$ e $g(x) = \int_{\Omega(x,\varrho)} u(y)dy$ sono entrambe continue. Infatti

$$\big||\Omega(x,\varrho)| - |\Omega(y,\varrho)|\big| \leq \big|\Omega(x,\varrho) \bigtriangleup \Omega(y,\varrho)\big| \leq \big|B_\varrho(x) \bigtriangleup B_\varrho(y)\big|,$$

da cui mandando $y \to x$ si ha la continuità di $f(x)$ (per convergenza dominata).

Inoltre

$$\left| \int_{\Omega(x,\varrho)} u(z)dz - \int_{\Omega(y,\varrho)} u(z)dz \right| \leq \int_{\Omega(x,\varrho)\triangle\Omega(y,\varrho)} |u(z)|dz.$$

Siccome $|\Omega(x,\varrho) \triangle \Omega(y,\varrho)| \to 0$ per $y \to x$, per l'assoluta continuità dell'integrale di Lebesgue il secondo membro della disuguaglianza precedente tende a 0 per $y \to x$. Da qui la continuità della funzione $g(x)$ e quindi la tesi. □

Veniamo ora al teorema più importante di questa sezione.

Teorema 4.3.4 *Siano Ω un aperto di tipo (A) e $N < \lambda \leq N+2$. Allora esiste $c = c(\lambda, A) > 0$ tale che per ogni $u \in L^{2,\lambda}(\Omega)$ esiste $v \in C(\Omega)$ con $v = u$ q.o. e*

$$[v]_{\alpha,\frac{R_0}{2}} \leq c(\lambda, A)|v|_{\lambda,R_0} \qquad \forall R_0 > 0 \tag{4.12}$$

dove $\alpha = \frac{\lambda - N}{2}$. Inoltre, se Ω è limitato gli spazi $L^{2,\lambda}(\Omega)$ e $C^{0,\alpha}(\Omega)$ sono isomorfi.

DIM. Sia $u \in L^{2,\lambda}(\Omega)$ e fissiamo $r \leq R \leq R_0$. Allora, se $z \in \Omega$, si ha

$$|u_{x,R} - u_{x,r}| \leq |u_{x,R} - u(z)| + |u(z) - u_{x,r}|.$$

Elevando al quadrato la disuguaglianza precedente e tenendo conto del fatto che $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ segue che

$$|u_{x,R} - u_{x,r}|^2 \leq 2|u_{x,R} - u(z)|^2 + 2|u(z) - u_{x,r}|^2.$$

Integrando in $z \in \Omega(x,r)$ otteniamo che

$$\begin{aligned} |\Omega(x,r)||u_{x,R} - u_{x,r}|^2 \quad &\leq \quad 2\left(\int_{\Omega(x,R)} |u_{x,R} - u(z)|^2 dz \right. \\ &\qquad \left. + \int_{\Omega(x,r)} |u(z) - u_{x,r}|^2 dz \right) \\ &\leq \quad 2\left(|u|^2_{\lambda,R_0} R^\lambda + |u|^2_{\lambda,R_0} r^\lambda \right) \leq 4R^\lambda |u|^2_{\lambda,R_0}. \end{aligned}$$

Ora, poichè Ω è per ipotesi di tipo (A) possiamo stimare $|\Omega(x,r)|$ e avere

$$|u_{x,R} - u_{x,r}|^2 \leq \frac{4R^\lambda |u|^2_{\lambda,R_0}}{Ar^N} \leq \left(\frac{4}{A}\right) R^\lambda \, r^{-N} \, |u|^2_{\lambda,R_0}. \tag{4.13}$$

Posto $R_i = R2^{-i}$, da (4.13) discende che

$$|u_{x,R_i} - u_{x,R_{i+1}}|^2 \leq \frac{4}{A} R_i^\lambda R_{i+1}^{-N} \, |u|^2_{\lambda,R_0} = 2^N \frac{4}{A} R^{\lambda-N} 2^{-i(\lambda-N)} \, |u|^2_{\lambda,R_0}$$

da cui, ponendo $c(A)^2 = 2^N 4/A$

$$|u_{x,R_i} - u_{x,R_{i+1}}| \leq c(A)\, R^{\frac{\lambda-N}{2}}\, 2^{\frac{-i(\lambda-N)}{2}}\, |u|_{\lambda,R_0}. \tag{4.14}$$

A questo punto, osserviamo che grazie alla scelta di λ la serie $\sum_{i=0}^{\infty} 2^{\frac{-i(\lambda-N)}{2}}$ è convergente. Pertanto la serie di funzioni

$$\sum_{i=0}^{\infty}(u_{x,R_i} - u_{x,R_{i+1}})$$

converge totalmente in Ω e quindi anche uniformemente. Siccome si tratta di una serie telescopica, otteniamo che la successione $(u_{x,R_i})_{i\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente in Ω per $i \to \infty$ ad una certa v_R. Siccome $u_{x,R_i} = (V_{R_i}u)(x)$ è continua per il punto (3) della Proposizione 4.3.3, anche v_R è continua Ω. Inoltre per il punto (2) della stessa proposizione, u_{x,R_i} ha un'estratta che converge q.o. a u. Per unicità del limite deve essere $u = v_R$. Infine osserviamo che la funzione limite non dipende da R: se $R_1 \neq R_2$ allora in ogni caso $v_{R_1} = u$ e $v_{R_2} = u$ q.o. Ma, essendo v_{R_i} continue, necessariamente $v_{R_1} \equiv v_{R_2}$. Poniamo allora $v = v_R$.

Sommando (4.14) segue che per ogni $i, p \in \mathbb{N}$ si ha

$$|u_{x,R_i} - u_{x,R_{i+p}}| \leq c(A,\lambda)\, R^{\frac{\lambda-N}{2}}\, |u|_{\lambda,R_0}$$

dove $c(A,\lambda)$ contiene la somma della serie $\sum_{i=0}^{\infty} 2^{\frac{-i(\lambda-N)}{2}}$.

Prendendo $i = 0$ e mandando $p \to \infty$ otteniamo

$$|u_{x,R} - v(x)| \leq C(A,\lambda)\, R^{\frac{\lambda-N}{2}}\, |u|_{\lambda,R_0}, \tag{4.15}$$

per ogni $R \leq R_0$ e $x \in \Omega$.

Adesso prendiamo $x, y \in \Omega$ a distanza $|x-y| \leq \frac{R_0}{2}$ e sia $R = |x-y|$. Siccome per ogni $z \in \Omega$ risulta

$$|u_{x,2R} - u_{y,2R}|^2 \leq 2|u_{x,2R} - u(z)|^2 + 2|u(z) - u_{y,2R}|^2$$

integrando su $\Omega(x,2R) \cap \Omega(y,2R) \supseteq \Omega(x,R) \cup \Omega(y,R)$, otteniamo

$$\begin{aligned}
|\Omega(x,2R) \cap \Omega(y,2R)||u_{x,2R} - u_{y,2R}|^2 &\leq 2\int_{\Omega(x,2R)} |u_{x,2R} - u(z)|^2 dz + \\
&\quad\; 2\int_{\Omega(y,2R)} |u(z) - u_{y,2R}|^2 \\
&\leq 4(2R)^\lambda |u|^2_{\lambda,R_0}.
\end{aligned}$$

Sfruttando l'ipotesi che Ω è di tipo (A) segue che

$$|u_{x,2R} - u_{y,2R}|^2 \leq \frac{42^\lambda}{A}\frac{R^\lambda}{R^N}|u|^2_{\lambda,R_0} \leq c_1(\lambda,A)|u|^2_{\lambda,R_0}R^{\lambda-N}.$$

Pertanto

$$|u_{x,2R} - u_{y,2R}| \leq c_1(\lambda, A)|u|_{\lambda,R_0}|x-y|^{\frac{\lambda-N}{2}}, \qquad |x-y| \leq \frac{R_0}{2}. \tag{4.16}$$

Per concludere teniamo conto delle stime (4.15) e (4.16) per ottenere per $|x-y| \leq \frac{R_0}{2}$ e con $R = |x-y|$

$$\begin{aligned} |v(x) - v(y)| &\leq |v(x) - u_{x,2R}| + |u_{x,2R} - u_{y,2R}| + |u_{y,2R} - v(y)| \\ &\leq C(A,\lambda)|u|_{\lambda,R_0}(|x-y|^{\frac{\lambda-N}{2}}). \end{aligned} \tag{4.17}$$

Abbiamo in definitiva provato che

$$[v]_{\alpha,\frac{R_0}{2}} \leq C(\lambda, A)|u|_{\lambda,R_0} = C(\lambda, A)|v|_{\lambda,R_0} \tag{4.18}$$

con $\alpha = \frac{\lambda-N}{2}$.

Per completare l'isomorfismo degli spazi $L^{2,\lambda}(\Omega)$ e $C^{0,\alpha}(\Omega)$, con $\lambda = \alpha + 2N$ e Ω limitato, osserviamo che $|u|_\lambda \leq C(N)[u]_\alpha$ (segue da (4.7)) e $\|u\|_{L^2} \leq |\Omega|^{1/2}\,\|u\|_\infty$ per cui $C^{0,\alpha}(\Omega) \hookrightarrow L^{2,\lambda}(\Omega)$. Viceversa, se $u \in L^{2,\lambda}(\Omega)$ e v è come nell'enunciato, allora preso $y \in \Omega$ tale che $v(y) = v_\Omega$ con v_Ω media integrale di v in Ω, applichiamo (4.17) e deduciamo che

$$|v(x)| \leq |v_\Omega| + c(\lambda, A)(\mathrm{diam}\Omega)^\alpha|v|_\lambda \leq |\Omega|^{-1/2}\|v\|_{L^2} + c(\lambda, A)(\mathrm{diam}\Omega)^\alpha|v|_\lambda,$$

che insieme a (4.18) dà l'altra inclusione. $\square$

4.4 Richiami sugli spazi di Sobolev

Sia Ω aperto limitato di $\mathbb{R}^N$ di classe C^1. E' noto che

$$\begin{aligned} p < N \quad &\Rightarrow \quad W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{Np}{N-p}}(\Omega), \\ p = N \quad &\Rightarrow \quad W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \qquad \forall\, q < +\infty, \\ p > N \quad &\Rightarrow \quad W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,1-\frac{N}{p}}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega). \end{aligned}$$

Poichè Ω è limitato l'immersione di $W^{1,p}(\Omega)$ in $L^p(\Omega)$ è compatta per ogni $1 \leq p \leq \infty$. Ciò consente di provare la seguente disuguaglianza di Poincarè.

Proposizione 4.4.1 *Siano Ω aperto limitato connesso di $\mathbb{R}^N$ con bordo di classe C^1 e $p \in [1, +\infty]$. Allora esiste una costante $c = c(\Omega, N, p) > 0$ tale che*

$$\left(\int_\Omega |u - u_\Omega|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq c\left(\int_\Omega |\nabla u|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{4.19}$$

per ogni $u \in W^{1,p}(\Omega)$ con $u_\Omega = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(x)dx$.

DIM. Per assurdo supponiamo che esista una successione $(u_n) \subset W^{1,p}(\Omega)$ con $(u_n)_\Omega = 0$ (ciò è sempre possibile a meno di considerare $v_n = u_n - (u_n)_\Omega$) tale che per ogni n

$$\int_\Omega |u_n|^p \geq n \int_\Omega |\nabla u_n|^p.$$

Non è restrittivo assumere che $\|u_n\|_p = 1$. Segue che

$$\|u_n\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} = \int_\Omega |u_n|^p + \int_\Omega |\nabla u_n|^p \leq 1 + \frac{1}{n} \leq 2.$$

Allora (u_n) è una successione limitata in $W^{1,p}(\Omega)$ che è immerso con compattezza in $L^p(\Omega)$. Pertanto esiste una sottosuccessione $(u_{n_k}) \subset (u_n)$ che converge a u in $L^p(\Omega)$, per qualche $u \in L^p(\Omega)$. Naturalmente u è ancora a media nulla e $\|u\|_p = 1$. Siccome $\|\nabla u_{n_k}\|_p^p \leq \frac{1}{n_k}$ si ha complessivamente che $u_{n_k} \to u$ e $\nabla u_{n_k} \to 0$ in $L^p(\Omega)$. Segue che $u \in W^{1,p}(\Omega)$ e $\nabla u = 0$. Poichè Ω è connesso questo implica che u è costante. Ma u ha media nulla, quindi $u \equiv 0$ in Ω, mentre $\|u\|_p = 1$. □

La dipendenza della costante della stima (4.19) dall'aperto Ω non è esplicita. Se però Ω è una palla allora è possibile stabilire come tale costante dipenda dal raggio.

Proposizione 4.4.2 *Se c_R è la costante in $\Omega = B_R$ della Proposizione 4.4.1 allora $c_R = R\, c_1$.*

DIM. Se $u \in H^1(B_R)$ definiamo

$$v(x) = u(Rx) \qquad |x| < 1.$$

Allora $v \in H^1(B_1)$. Osserviamo inoltre che

$$u_R = \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} u(x)dx = \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} v\left(\frac{x}{R}\right) dx = \frac{1}{|B_1|} \int_{B_1} v(y)dy = v_1.$$

Dalla Proposizione 4.4.1 si ha

$$\int_{B_1} |v(x) - v_1|^2 dx \leq c_1^2 \int_{B_1} |\nabla v(x)|^2 dx$$

e quindi, poichè $\nabla v(x) = R \nabla u(Rx)$ e $v_1 = u_R$

$$\int_{B_1} |u(Rx) - u_R|^2 dx \leq c_1^2 \int_{B_1} R^2 |\nabla u(Rx)|^2 dx.$$

Cambiando nuovamente variabile troviamo pertanto

$$\int_{B_R} |u(y) - u_R|^2 dy \leq c_1^2 R^2 \int_{B_R} |\nabla u(y)|^2 dy.$$

□

Osservazione 4.4.3 In analogia al caso $p = 2$ possiamo definire la seminorma

$$|u|^p_{\lambda,p} := \sup_{\substack{\varrho>0\\ x_0\in\Omega}} \frac{1}{\varrho^\lambda}\int_{\Omega(x_0,\varrho)} |u(x) - u_{x_0,\varrho}|^p dx \qquad 1 \le p < \infty.$$

Con la stessa tecnica si può provare che se $N < \lambda \le N + p$ e $\alpha = \frac{\lambda-N}{p}$ allora $[\cdot]_\alpha$ e $|\cdot|_{\lambda,p}$ sono equivalenti. Tale generalizzazione è interessante perchè permette di dimostrare in modo semplice il seguente teorema.

Teorema 4.4.4 *Se $p > N$ allora*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)$$

con $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$.

DIM. Se $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, applicando la disuguaglianza di Poincarè abbiamo che

$$\int_{B(x_0,\varrho)} |u(x) - u_{x_0,\varrho}|^p \quad\le\quad c_1^p \varrho^p \int_{B_\varrho(x_0)} |\nabla u|^p \le c_1^p \varrho^p \|\nabla u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Pertanto

$$\frac{1}{\varrho^p}\int_{B_\varrho(x_0)} |u - u_{x_0,\varrho}|^p \le c_1^p \|\nabla u\|^p_p.$$

Prendendo l'estremo superiore al variare di $\varrho > 0$ e $x_0 \in \mathbb{R}^N$ otteniamo

$$|u|_{p,p} \le c_1 \|\nabla u\|_p < +\infty.$$

Per l'equivalenza di $[\cdot]_\alpha$ e $|\cdot|_{p,p}$ con $\alpha = \frac{p-N}{p}$ segue che $u \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)$. $\square$

Esercizio 4.4.5 Provare l'Osservazione 4.4.3.