CAPITOLO 2

Isomorfismo, coniugio, isomorfismo spettrale

1. Introduzione

Nello studio delle trasformazioni che conservano la misura è importante stabilire quando due trasformazioni di questo tipo, T_1 che conserva la misura sullo spazio di probabilità $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mu_1)$ e T_2 che conserva la misura su $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mu_2)$, possano essere considerate come la "stessa" trasformazione. Nelle sezioni che seguono si cercherà di rendere piú precisa questa domanda intuitiva. A tale scopo introdurremo in via preliminare alcune definizioni

DEFINIZIONE 1.1. Due spazî di probabilità $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mu_1)$ e $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mu_2)$ si dicono *isomorfi* se esistono due insiemi misurabili $M_1 \in \mathcal{F}_1$ e $M_2 \in \mathcal{F}_2$, con $\mu_1(M_1) = \mu_2(M_2) = 1$ ed una trasformazione invertibile $\varphi : M_1 \to M_2$ che conserva la misura tra gli spazî di probabilità $(\mathcal{M}_1, \mathcal{F}_1', \mu_1)$ e $(\mathcal{M}_2, \mathcal{F}_2', \mu_2)$, ove $\mathcal{F}_j'$ $(j = 1, 2)$ indica la traccia della tribú $\mathcal{F}_j$ su M_j,

$$\mathcal{F}_j' = \mathcal{F}_j \cap M_j := \{M_j \cap A : A \in \mathcal{F}_j\} ;$$

abbiamo continuato ad indicare con μ_j la restrizione di μ_j a $\mathcal{F}_j'$.

Il risultato piú importante riguardante l'isomorfismo di spazî di probabilità è il seguente, del quale non dò la dimostrazione che può essere trovata, per esempio in **[61]**

TEOREMA 1.1. *Siano Ω uno spazio polacco (cioè uno spazio metrico completo e separabile), $\mathcal{F}$ la tribú dei suoi boreliani e μ una misura di probabilità su $\mathcal{F}$ per la quale esista un'infinità numerabile di punti $\{x_n : n \in \mathbf{N}\}$ tali che $\mu(\{x_n\}) > 0$. Allora, posto $s := 1 - \sum_{n\in\mathbf{N}} \mu(\{x_n\})$, lo spazio $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ è isomorfo ad uno spazio mensurale composto da una successione di punti $\{y_n : n \in \mathbf{N}\}$ e dallo spazio $([0, s], \mathcal{B}([0, s]), \lambda)$, ove $\mathcal{B}([0, s])$ è la tribú dei boreliani di $[0, s]$ e λ è la restrizione della misura di* LEBESGUE *a $\mathcal{B}([0, s])$.*

Siccome il problema cruciale è quello di poter evitare di considerare insiemi di probabilità nulla, vi è un secondo modo di procedere, che è forse piú naturale per un matematico, anche se comporta qualche difficoltà nelle applicazioni. Si tratta del concetto di *algebra di misura*.

Per dimostrare la (1.2) si calcoli

$$\begin{aligned}
&\mu\left[(A\cup B)\Delta(C\cup D)\right] = \mu\left[(A\cup B)\cap(C\cup D)^c\right] + \mu\left[(C\cup D)\cap(A\cup B)^c\right] \\
&\quad = \mu\left[(A\cap C^c\cap D^c)\cup(B\cap C^c\cap D^c)\right] \\
&\qquad\qquad + \mu\left[(A^c\cap B^c\cap C)\cup(A^c\cap B^c\cap D)\right] \\
&\quad = \mu(A\cap C^c\cap D^c) + \mu(B\cap C^c\cap D^c) - \mu(A\cap B\cap C^c\cap D^c) \\
&\qquad\quad + \mu(A^c\cap B^c\cap C) + \mu(A^c\cap B^c\cap D) - \mu(A^c\cap B^c\cap C\cap D).
\end{aligned}$$

D'altro canto

$$\mu(A\Delta C)+\mu(B\Delta D) = \mu(A)+\mu(B)+\mu(C)+\mu(D)-2\,\mu(A\cap C)-2\,\mu(B\cap D).$$

Ora si può scrivere l'insieme A come l'unione, che non è disgiunta,

$$A = (A\cap C^c\cap D^c)\cup(A\cap C)\cup(A\cap D);$$

procedendo in maniera analoga anche per gli insiemi B, C e D si ottiene

$$\begin{aligned}
\mu(A\Delta C) + \mu(B\Delta D) &= \mu(A\cap C^c\cap D^c) + \mu(A\cap C) \\
&\quad + \mu(A\cap D) - \mu(A\cap C\cap D) \\
&\quad + \mu(B\cap C^c\cap D^c) + \mu(B\cap C) + \mu(B\cap D) - \mu(B\cap C\cap D) \\
&\quad + \mu(C\cap A^c\cap B^c) + \mu(C\cap A) + \mu(C\cap B) - \mu(C\cap A\cap B) \\
&\quad + \mu(D\cap A^c\cap B^c) + \mu(D\cap A) + \mu(D\cap B) - \mu(D\cap A\cap B) \\
&\quad - 2\,\mu(A\cap C) - 2\,\mu(B\cap D).\ .
\end{aligned}$$

Pertanto la (1.2) equivale alla diseguaglianza

$$\begin{aligned}
&\mu(A\cap C^c\cap D^c) + \mu(B\cap C^c\cap D^c) - \mu(A\cap B\cap C^c\cap D^c) \\
&\quad + \mu(A^c\cap B^c\cap C) + \mu(A^c\cap B^c\cap D) - \mu(A^c\cap B^c\cap C\cap D) \\
&\leq \mu(A\cap C^c\cap D^c) + 2\,\mu(A\cap D) - \mu(A\cap C\cap D) \\
&\quad + \mu(B\cap C^c\cap D^c) + 2\,\mu(B\cap C) - \mu(B\cap C\cap D) \\
&\quad + \mu(C\cap A^c\cap B^c) - \mu(A\cap B\cap C) + \mu(D\cap A^c\cap B^c) - \mu(A\cap B\cap D)
\end{aligned}$$

cioè

$$\begin{aligned}
&- \mu(A\cap B\cap C^c\cap D^c) - \mu(A^c\cap B^c\cap C\cap D) \\
&\leq 2\,\mu(A\cap D) - \mu(A\cap C\cap D) + 2\,\mu(B\cap C) - \mu(B\cap C\cap D) \\
&\qquad - \mu(A\cap B\cap C) - \mu(A\cap B\cap D) \\
&= \{\mu(A\cap D) - \mu(A\cap C\cap D)\} + \{\mu(A\cap D) - \mu(A\cap B\cap D)\} \\
&\quad + \{\mu(B\cap C) - \mu(B\cap C\cap D)\} + \{\mu(B\cap C) - \mu(A\cap B\cap C)\}\,.
\end{aligned}$$

Quest'ultima diseguaglianza è ovviamente soddisfatta perché il primo membro è negativo, mentre l'ultimo è positivo. □

Siamo ora in grado di dare la dimostrazione del Teorema 1.2.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 1.2. Poiché $A\Delta A=\emptyset$ si ha $A\sim A$; inltre dalla commutatività della differenza simmetrica $A\Delta B = B\Delta A$ segue che $A\sim B$ se, e soltanto se, $B\sim A$. Si supponga ora che sia $A\sim B$ e $B\sim C$, onde, per definizione, $\mu(A\Delta B)=\mu(B\Delta C)=0$. Ora la (1.1) consente di concludere che sia $\mu(A\Delta C)=0$ sicché $A\sim C$, ciò che stabilisce che la relazione $\sim$ è anche transitiva e, quindi è una relazione d'equivalenza in $\mathcal{F}$. Mostriamo ora che la relazione d'equivalenza $\sim$ è compatibile con la l'operazione di unione, nel senso che

$$\widetilde{A\cup B}=\widetilde{A}\cup\widetilde{B}.$$

Si supponga che sia $A\sim C$ e $B\sim D$, cioè $\mu(A\Delta C)=\mu(B\Delta D)=0$. Allora la diseguaglianza (1.2) dà $\mu\left[(A\cup B)\Delta(C\Delta D)\right]=0$, cioè l'asserto, $A\cup B\sim C\cup D$. In modo del tutto analogo si procede per dimostrare che la relazione d'equivalenza $\sim$ è compatibile con le unioni numerabili. Se, per ogni $n\in\mathbf{N}$ si ha $A_n\sim B_n$, vale a dire $\mu(A_n\Delta B_n)=0$, allora, per ogni $k\in\mathbf{N}$ scende dalla (1.1) che

$$\mu\left[\left(\cup_{j=1}^k A_j\right)\Delta\left(\cup_{j=1}^k B_j\right)\right]\le\sum_{j=1}^k\mu(A_j\Delta B_j)=0;$$

di qui, passando al limite per k che tende a $+\infty$, si ottiene

$$\mu\left[\left(\cup_{n\in\mathbf{N}}A_n\right)\Delta\left(\cup_{n\in\mathbf{N}}B_n\right)\right]=0,$$

sicché $\cup_{n\in\mathbf{N}}A_n\sim\cup_{n\in\mathbf{N}}B_n$, vale a dire

$$\widetilde{\cup_{n\in\mathbf{N}}A_n}=\cup_{n\in\mathbf{N}}\widetilde{A}_n.$$

La relazione d'equivalenza $\sim$ è compatibile con la l'operazione di intersezione, nel senso che

$$\widetilde{A\cap B}=\widetilde{A}\cap\widetilde{B}.$$

Come sopra, supposto che sia $A\sim C$ e $B\sim D$, cioè $\mu(A\Delta C)=\mu(B\Delta D)=0$, si desidera mostrare che sia $A\cap B\sim C\cap D$. Si ha

$$\begin{aligned}(A\cap B)\Delta(C\cap D)&=(A\cap B\cap(C^c\cup D^c))\bigcup(C\cap D\cap(A^c\cup B^c))\\&=(A\cap B\cap C^c)\cup(A\cap B\cap D^c)\cup(C\cap D\cap A^c)\cup(C\cap D\cap B^c),\end{aligned}$$

sicché

$$\begin{aligned}&\mu\left[(A\cap B)\Delta(C\cap D)\right]\\&\le\mu(A\cap B\cap C^c)+\mu(A\cap B\cap D^c)+\mu(C\cap D\cap A^c)+\mu(C\cap D\cap B^c).\end{aligned}$$

Ora $A\cap B\cap C^c\subset A\cap C^c=A\setminus C$, sicché

$$\mu(A\cap B\cap C^c)\le\mu(A\setminus C)\le\mu(A\Delta C)=0.$$

Analogamente si dimostra che

$$\mu(A\cap B\cap D^c)=\mu(C\cap D\cap A^c)=\mu(C\cap D\cap B^c)=0.$$

Dunque $\mu\,[(A\cap B)\Delta(C\cap D)] = 0$, onde l'asserto.

Dimostriamo infine che la relazione d'equivalenza $\sim$ è compatibile con l'operazione di complementazione.,

$$(\widetilde{A})^c = \widetilde{A^c}.$$

Poiché $A\Delta B = A^c\Delta B^c$, la relazione $A\sim B$ equivale all'altra $A^c \sim B^c$, ciò che conclude la dimostrazione. □

Si osservi che si definisce una metrica d sulla tribú quoziente $\widetilde{\mathcal{F}} := \mathcal{F}/\sim$ ponendo

$$d(\widetilde{A},\widetilde{B}) := \mu(A\Delta B).$$

DEFINIZIONE 1.2. Siano $(\widetilde{\mathcal{F}}_1,\widetilde{\mu}_1)$ e $(\widetilde{\mathcal{F}}_2,\widetilde{\mu}_2)$, rispettivamente, le algebre di misura degli spazî di probabilità $(\Omega_1,\mathcal{F}_1,\mu_1)$ e $(\Omega_2,\mathcal{F}_2,\mu_2)$. Le due algebre di misura si dicono *isomorfe* se esiste una biiezione $\Phi:\widetilde{\mathcal{F}}_2\to\widetilde{\mathcal{F}}_1$ che conserva unioni, intersezioni e complementi e per la quale si ha, per ogni $\widetilde{A}\in\widetilde{\mathcal{F}}_2$,

$$\widetilde{\mu}_1(\Phi\,\widetilde{A}) = \widetilde{\mu}_2(\widetilde{A}).$$

Se le algebre di misura $(\widetilde{\mathcal{F}}_1,\widetilde{\mu}_1)$ e $(\widetilde{\mathcal{F}}_2,\widetilde{\mu}_2)$ sono isomorfe, si dice che gli spazî di probabilità $(\Omega_1,\mathcal{F}_1,\mu_1)$ e $(\Omega_2,\mathcal{F}_2,\mu_2)$ sono *coniugati*.

Se gli spazî di probabilità $(\Omega_1,\mathcal{F}_1,\mu_1)$ e $(\Omega_2,\mathcal{F}_2,\mu_2)$ sono isomorfi, tramite φ, essi sono anche coniugati. Infatti, si definisca $\Phi:\widetilde{\mathcal{F}}_2\to\widetilde{\mathcal{F}}_1$ mediante

$$\Phi(\widetilde{A}) := \left(\varphi^{-1}\,[M_2\cap A]\right)^{\sim}. \tag{1.4}$$

Tuttavia è facile dare l'esempio di due spazî di probabilità che sono coniugati senza che essi siano anche isomorfi. Si supponga che Ω_1 sia costituito da un singoletto $\{\omega\}$, mentre Ω_2 sia costituito da due punti, $\Omega_2 = \{\omega_1,\omega_2\}$ e sia dotato della tribú $\mathcal{N}_2 = \{\emptyset,\Omega_2\}$. I due spazî sono ovviamente coniugati, ma non possono essere isomorfi.

Vi è però una situazione nella quale i due concetti di isomorfismo e di coniugio coincidono; anche del seguente teorema non dò la dimostrazione che si può trovare nel libro [**61**].

TEOREMA 1.3. *Siano Ω_1 e Ω_2 spazî polacchi dotati delle tribú dei rispettivi boreliani $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ e siano μ_1 e μ_2 misure di probabilità definite su $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ rispettivamente. Sia, inoltre $\Phi:\widetilde{\mathcal{B}}_2\to\widetilde{\mathcal{B}}_1$ un isomorfismo delle algebre di misura. Allora esistono due insiemi $M_1\in\mathcal{B}_1$ e $M_2\in\mathcal{B}_2$ con $\mu_1(M_1) = \mu_2(M_2) = 1$ ed una traformazione $\varphi: M_1\to M_2$ che conserva la misura* *tale che, per ogni $A \in \mathcal{B}_2$, valga la (1.4). Se ψ è un altro isomorfismo da $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mu_1)$ a $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mu_2)$ che induce Φ, allora*

$$\mu_1 \left(\{\omega \in \Omega_1 : \phi(\omega) \neq \psi(x)\} \right) = 0.$$

Perciò in molti esempî si può supporre che applicazioni tra insiemi derivino da trasformazioni puntuali.

DEFINIZIONE 1.3. Si dice spazio di LEBESGUE ogni spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ che sia isomorfo ad uno spazio di probabilità che è l'unione disgiunta di un numero finito o di un'infinità numerabile di punti $\{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ ognuno con probabilità positiva e dello spazio $([0, s], \mathcal{L}([0, s]), \lambda)$, ove λ è la restrizione della misura di LEBESGUE alla tribú $\mathcal{L}([0, s])$ dei sottoinsiemi di $[0, s]$ che sono misurabili secondo LEBESGUE e $s := 1 - \sum_n p_n$, essendo p_n la probabilità del singoletto ω_n.

2. Richiami sugli spazî di Hilbert

Dato uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, si costruisca su questo lo spazio di HILBERT $L^2(\mu)$. Si dice che uno spazio di probabilità ha una *base numerabile* se esiste una successione $\{E_n : n \in \mathbf{N}\}$ di insiemi di $\mathcal{F}$ tale che, per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni insieme A di $\mathcal{F}$. esista $k \in \mathbf{N}$ tale che

$$\mu \left(A \Delta E_k \right) < \varepsilon.$$

Vale allora il seguente teorema, per la dimostrazione del quale rimandiamo a [**38**, Theorem 8.1].

TEOREMA 2.1. *Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(a) *lo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ha una base numerabile;*
(b) *lo spazio di* HILBERT $L^2 = L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *è separabile (nella topologia della norma).*

Dati due spazî di probabilità $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mu_1)$ e $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mu_2)$ entrambi con una base numerabile, allora gli spazî di HILBERT $L^2(\mu_1)$ e $L^2(\mu_2)$ sono entrambi separabili e di conseguenza esiste un operatore lineare e invertibile $U : L^2(\mu_2) \longrightarrow L^2(\mu_1)$ tale che, per ogni coppia di elementi f e g in $L^2(\mu_2)$ sia

$$\langle f, g \rangle = \langle Uf, Ug \rangle.$$

Poiché $L^2(\mu)$ è costituito da classi di equivalenza di funzioni se $\widetilde{A}$ appartiene a $\widetilde{\mathcal{F}}$ la funzione indicatrice $1_{\widetilde{A}}$ è un elemento ben definito di $L^2(\mu)$.

TEOREMA 2.2. *Siano dati due spazî di probabilità* $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mu_1)$ *e* $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mu_2)$ *e sia*

$$\Phi : (\widetilde{\mathcal{F}}_2, \widetilde{\mu}_2) \longrightarrow (\widetilde{\mathcal{F}}_1, \widetilde{\mu}_1)$$

un isomorfismo di algebre di misura. Allora, Φ *induce un operatore lineare biettivo* $V : L^2(\mu_2) \longrightarrow L^2(\mu_1)$ *tale che*

(a) *per ogni coppia di elementi* f *e* g *in* $L^2(\mu_2)$ *si ha*

$$\langle f, g\rangle = \langle Vf, Vg\rangle;$$

(b) *tanto* V *quanto* V^{-1} *mandano funzioni limitate in funzioni limitate,*

$$V : L^\infty(\mu_2) \longrightarrow L^\infty(\mu_1) \qquad e \qquad V^{-1} : L^\infty(\mu_1) \longrightarrow L^\infty(\mu_2);$$

(c) *per ogni coppia di funzioni* f *e* g *di* $L^\infty(\mu_2)$*, si ha*

$$V(f\, g) = V(f)\, V(g).$$

Sulle funzioni indicatrici l'operatore V *è definito da*

$$V\, 1_{\widetilde{A}} = 1_{\Phi(\widetilde{A})}. \tag{2.1}$$

Viceversa, se l'operatore lineare biettivo $V : L^2(\mu_2) \longrightarrow L^2(\mu_1)$ *gode delle proprietà* (a), (b) *e* (c), *esso è indotto da un isomorfismo di algebre di misura* $\Phi : (\widetilde{\mathcal{F}}_2, \widetilde{\mu}_2) \longrightarrow (\widetilde{\mathcal{F}}_1, \widetilde{\mu}_1)$ *tale che valga la* (2.1).

DIMOSTRAZIONE. Dato l'isomorfismo Φ si definisca V sulle funzioni indicatrici mediante la (2.1). Si noti che vale $\|V\, 1_{\widetilde{A}}\|_2 = \|1_{\Phi(\widetilde{A})}\|_2$. Si può quindi estendere la definizione di V alle funzioni semplici per linearità; se $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, 1_{\widetilde{A}_j}$ con gli insiemi $\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2, \ldots, \widetilde{A}_n$ disgiunti, si definisce

$$V\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, 1_{\widetilde{A}}\right) := \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, 1_{\Phi(\widetilde{A}_j)}.$$

Si ha ancora $\|V\, f\|_2 = \|f\|_2$ per ogni funzione semplice f.

Sia ora f un arbitrario elemento di $L^2(\mu_2)$ e sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni semplici tale che

$$\|f_n - f\|_2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Dall'essere V un'isometria sulle funzioni semplici scende che $\{V\, f_n\}$ è una successione di CAUCHY perché tale è la successione $\{f_n\}$. Si indichi con Vf il limite di $\{V\, f_n\}$,

$$\|\, Vf_n - Vf\,\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Se $\{g_n\}$ è un'altra successione di funzioni semplici che tendono a f in $L^2(\mu_2)$, si ha

$$\|g_n - f_n\|_2 \leq \|g_n - f\|_2 + \|f_n - f\|_2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

di modo che

$$\| Vg_n - Vf_n \|_2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Pertanto Vf è ben definito: L'operatore inverso V^{-1} si costruisce in maniera simile a partire da da Φ^{-1}: se 1_A è la funzione indicatrice di un insieme A di $\widetilde{\mathcal{F}}_1$, si definisce

$$V^{-1}1_{\widetilde{A}} := 1_{\Phi^{-1}(\widetilde{A})}.$$

La linearità di V è conseguenza della definizione. La proprietà (a) equivale alla proprietà di V di conservare le norme negli spazî $L^2(\mu_1)$ e $L^2(\mu_2)$. Quanto alla (b), si osservi che, se $f \in L^2(\mu_2)$ è limitata, è il limite di una successione crescente di funzioni semplici uniformemente limitate; sulle funzioni semplici, Vf ha gli stessi estremi superiori e inferiori di f. Infine, è immediato controllare che la (c) vale per le funzioni semplici , e, quindi, anche per le funzioni limitate.

Viceversa, si supponga che $V : L^2(\mu_2) \longrightarrow L^2(\mu_1)$ goda delle proprietà (a), (b) e (c) e sia $\widetilde{A}_2 \in \widetilde{\mathcal{F}}_2$. Poiché, $1^2_{\widetilde{A}_2} = 1_{\widetilde{A}_2}$, la (c) dà

$$V\left(1_{\widetilde{A}_2}\right) = V\left(1^2_{\widetilde{A}_2}\right) = V\left(1_{\widetilde{A}_2}\right) V\left(1_{\widetilde{A}_2}\right),$$

sicché $V\left(1_{\widetilde{A}_2}\right)$ è necessariamente una funzione indicatrice; esiste allora $\widetilde{A}_1 \in \widetilde{\mathcal{F}}_1$ tale che

$$V\left(1_{\widetilde{A}_2}\right) = 1_{\widetilde{A}_1}.$$

Si definisca $\Phi : (\widetilde{\mathcal{F}}_2, \widetilde{\mu}_2) \longrightarrow (\widetilde{\mathcal{F}}_1, \widetilde{\mu}_1)$ mediante $\Phi(\widetilde{A}_2) := \widetilde{A}_1$. Ripetendo per l'operatore inverso V^{-1} quanto appena fatto si ottiene Φ^{-1}, sicché si ha intanto che Φ è invertibile. Inoltre, per la proprietà (a) si ha

$$\widetilde{\mu}_2(\widetilde{A}_2) = \langle 1_{\widetilde{A}_2}, 1_{\widetilde{A}_2}\rangle = \langle V1_{\widetilde{A}_2}, V1_{\widetilde{A}_2}\rangle = \langle 1_{\Phi(\widetilde{A}_2)}, 1_{\Phi(\widetilde{A}_2)}\rangle = \widetilde{\mu}_1(\Phi(\widetilde{A}_2)).$$

Rimane da dimostrare che Φ preserva unioni numerabili e complementi. Poiché V conserva le norme L^2 e manda funzioni caratteristiche in funzioni caratteristiche, si ha $V1 = 1$. Siccome si ha, ovviamente

$$1_{\Phi(\widetilde{A}_2)} + 1_{\Phi(\widetilde{A}^c_2)} = 1,$$

si ottiene $(\Phi(\widetilde{A}_2))^c = \Phi(\widetilde{A}^c_2)$, sicché Φ preserva i complementi.

Se $\widetilde{A}$ e $\widetilde{B}$ sono in $\widetilde{\mathcal{F}}_2$, è

$$1_{\widetilde{A}\cup\widetilde{B}} = 1_{\widetilde{A}} + 1_{\widetilde{B}} - 1_{\widetilde{A}\cap\widetilde{B}} = 1_{\widetilde{A}} + 1_{\widetilde{B}} - 1_{\widetilde{A}}\, 1_{\widetilde{B}}.$$

Si applichi V ad entrambi membri per ottenere

$$1_{\Phi(\widetilde{A}\cup\widetilde{B})} = 1_{\Phi(\widetilde{A})} + 1_{\Phi(\widetilde{B})} - 1_{\Phi(\widetilde{A})}\, 1_{\Phi(\widetilde{B})} = 1_{\Phi(\widetilde{A})\cup\Phi(\widetilde{B})}$$

Pertanto
$$\Phi(\widetilde{A} \cup \widetilde{B}) = \Phi(\widetilde{A}) \cup \Phi(\widetilde{B}),$$
sicché Φ preserva le unioni finite. Si consideri ora una successione
$$\{B_n : n \in \mathbf{N}\}$$
di insiemi di $\mathcal{F}_2$. Si ha
$$1_{\cup_{k=1}^n B_k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1_{\cup_{k\in\mathbf{N}} B_k}$$
quasi certamente, e in $L^2(\mu_2)$, in virtú del teorema di convergenza dominata. Poiché V è un'isometria, è anche continua sicché
$$1_{\cup_{k=1}^n \Phi(\widetilde{B}_k)} = 1_{\Phi\left(\cup_{k=1}^n \widetilde{B}_k\right)} = V 1_{\cup_{k=1}^n B_k}$$
converge in $L^2(\mu_1)$ a
$$V 1_{\cup_{k\in\mathbf{N}} B_k}.$$
Ciò significa che
$$\Phi\left(\cup_{k=1}^n \widetilde{B}_k\right) = \cup_{k=1}^n \Phi\left(\widetilde{B}_k\right),$$
e questo conclude la dimostrazione. □

Abbiamo dimostrato cosí che i due spazî di probabilità $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mu_1)$ e $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mu_2$ sono coniugati se, e solo se, esiste un operatore lineare e biettivo $V : L^2(\mu_2) \longrightarrow L^2(\mu_1)$ tra gli spazî di Hilbert e costruiti su di essi che goda delle proprietà (a), (b) e (c) del Teorema 2.2.

3. Isomorfismo e coniugio

Siano dati due spazî di probabilità $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mu_1)$ e $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mu_2)$ dotati delle rispettive algebre di misura $(\widetilde{\mathcal{F}}_1, \widetilde{\mu}_1)$ e $(\widetilde{\mathcal{F}}_2, \widetilde{\mu}_2)$; se $\phi : \Omega_1 \to \Omega_2$ conserva la misura, mediante $\widetilde{\phi}^{-1}(\widetilde{A}) := \left(\phi^{-1}(A)\right)^{\sim}$ è anche definita un'applicazione $\widetilde{\phi}^{-1} : (\widetilde{\mathcal{F}}_2, \widetilde{\mu}_2) \longrightarrow (\widetilde{\mathcal{F}}_1, \widetilde{\mu}_1)$. Questa applicazione è ben definita perché ϕ conserva la misura; inoltre $\widetilde{\phi}^{-1}$ preserva i complementi e le unioni numerabili e si ha $\widetilde{\mu}_1(\widetilde{\phi}^{-1}(\widetilde{A})) = \widetilde{\mu}_2(\widetilde{A})$. Pertanto $\widetilde{\phi}^{-1}$ può essere considerata un omorfismo di algebre di misura. Analogamente, se T è una trasformazione che conserva la misura sullo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ e se $(\widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{\mu})$ è l'algebra di misura di quest'ultimo spazio, si può definire, a partire da T una trasfromazione $\widetilde{T}$ definita su $(\widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{\mu})$ come segue. Sia $\widetilde{SA}$ un elemento di $\widetilde{\mathcal{F}}$; se $A \in \widetilde{A}$ si definisca
$$\widetilde{T}^{-1}\widetilde{A} := \widetilde{(T^{-1}A)}.$$
È questa una buona definizione perché, se $A \sim B$, vale a dire se$\mu(A\Delta B) = 0$, allora si ha
$$\mu(T^{-1}A\Delta T^{-1}B) = \mu(T^{-1}(A\Delta B)) = \mu(A\Delta B) = 0,$$

cioè $T^{-1}A \sim T^{-1}B$.

DEFINIZIONE 3.1. Dati due spazî di probabilità $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mu_1)$ e $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mu_2)$ e due trasformazioni che conservano la misura $T_1 : \Omega_1 \to \Omega_1$ e $T_2 : \Omega_2 \to \Omega_2$, si dicono *isomorfe* se esistono due insiemi $M_1 \in \mathcal{F}_1$ e $M_2 \in \mathcal{F}_2$ tali che

(a) $\mu_1(M_1) = \mu_2(M_2) = 1$;
(b) $T_1\, M_1 \subset M_1$ e $T_2\, M_2 \subset M_2$;
(c) esiste una trasformazione $\phi : M_1 \to M_2$ che conserva la misura e che gode della proprietà che, per ogni $\omega \in M_1$, sia

$$\phi\, T_1(\omega) = T_2\, \phi(\omega).$$

Si scriverà allora $T_1 \simeq T_2$.

Si dice invece che T_1 e T_2 sono *coniugate* se esiste un isomorfismo di algebre di misura $\Phi : (\widetilde{\mathcal{F}}_2, \widetilde{\mu}_2) \longrightarrow (\widetilde{\mathcal{F}}_1, \widetilde{\mu}_1)$ per il quale è

$$\Phi\, \widetilde{T}_2^{-1} = \widetilde{T}_1^{-1}\, \Phi.$$

Naturalmente tanto l'isomorfismo quanto il coniugio di trasformazioni che conservano la misura sono relazioni d'equivalenza. Si noti che se T_1 e T_2 sono isomorfe, lo stesso accade per T_1^n e T_2^n per ogni $n \in \mathbf{N}$.

Se le due trasformazioni T_1 e T_2 sono invertibili, si possono prendere gli insiemi M_1 e M_2 in modo che risulti $T_1\, M_1 = M_1$ e $T_2\, M_2 = M_2$; basta prendere $\cap_{n\in\mathbf{Z}} T_1^n\, M_1$ e $\cap_{n\in\mathbf{Z}} T_2^n\, M_2$ come nuovi insiemi.

Se i due spazî di probabilità dati sono isomorfi nel senso della Definizione 1.1 allora le identità nei due spazî sono isomorfe.

L'isomorfismo ed il coniugio di trasformazioni che conservano la misura sono legati dal seguente teorema.

TEOREMA 3.1. *Trasformazioni che conservano la misura e che sono isomorfe sono anche coniugate.*

DIMOSTRAZIONE. Siano T_1 e T_2 le trasformazioni in oggetto e sia $\phi : M_1 \to M_2$ l'isomorfismo che le lega. L'applicazione $\Phi : (\widetilde{\mathcal{F}}_2, \widetilde{\mu}_2) \longrightarrow (\widetilde{\mathcal{F}}_1, \widetilde{\mu}_1)$ definita, per ogni $A \in \mathcal{F}_2$ da

$$\Phi(\widetilde{A}) := \left(\phi^{-1}(A \cap M_2)\right)^{\sim}$$

realizza il coniugio. □

Il reciproco di questo teorema non è vero, perché come si è visto sopra le identità di due spazî di probabilità possono essere coniugate senza essere isomorfe. Tuttavia vale il seguente teorema (si veda [**70**, Theorem 2.7].

TEOREMA 3.2. *Se* $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mu_1)$ *e* $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mu_2)$ *sono due spazî di probabilità che sono entrambi spazî di* LEBESGUE *oppure tali che tanto* Ω_1 *quanto* Ω_2 *siano polacchi e* $\mathcal{F}_1$ *e* $\mathcal{F}_2$ *siano le rispettive tribú dei boreliani. Se* $T_1 : \Omega_1 \to \Omega_1$ *e* $T_2 : \Omega_2 \to \Omega_2$ *conservano la misura e sono coniugate, esse sono anche isomorfe.*

Uno dei problemi importanti è quello di determinare proprietà che siano invarianti per isomorfismo o, addirittura, quantità che caratterizzino l'isomorfismo di trasformazioni che conservano la misura. Nell'ultimo capitolo di queste lezioni si considererà come invariante l'entropia $h(T)$ di una trasformazione che conserva la misura. Si vedrà che se due trasformazioni che conservano la misura T_1 e T_2 sono isomorfe, allora le loro entropie sono eguali, $h(T_1) = h(T_2)$. Viceversa, nel 1969, ORNSTEIN dimostrò che nella classe delle traslazioni di BERNOULLI, che saranno definite in seguito, l'entropia è un invariante completo, nel senso che due traslazioni di BERNOULLI che abbiano la stessa entropia sono isomorfe.

4. Isomorfismi spettrali

Alcune proprietà delle trasformazioni che conservano la misura dipendono solo dagli isomorfismi degli operatori unitarî che esse inducono sugli spazî L^2. Per tali operatori vale il seguente teorema.

TEOREMA 4.1. *Per una trasformazione* T *che conserva la misura sullo spazio di probabilità* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *sono equivalenti le affermazioni:*

(a) *l'operatore lineare* $U_T : L^2(\mu) \longrightarrow L^2(\mu)$ *è suriettivo;*
(b) *la trasformazione* $\widetilde{T}^{-1} : (\widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{\mu}) \longrightarrow (\widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{\mu})$ *è suriettiva.*

DIMOSTRAZIONE. Per ogni insieme A di $\mathcal{F}$ si ha

$$U_T 1_{\widetilde{A}} = 1_{\widetilde{T}^{-1}(\widetilde{A})}.$$

(a) $\Longrightarrow$ (b) Se U_T è suriettivo, esso è anche biettivo. Sia $A \in \mathcal{F}$ e si supponga che sia $U_T f = 1_{\widetilde{A}}$; allora si ha $U_T(f \cdot f) = (U_T f)\,(U_T f) = 1_{\widetilde{A}}^2 = 1_{\widetilde{A}} = U_T f$, sicché, per l'iniettività di U_T risulta $f \cdot f = f$. Esiste, pertanto, un insieme $B \in \mathcal{F}$ tale che $f = 1_{\widetilde{B}}$. Dunque $\widetilde{A} = \widetilde{T}^{-1}(\widetilde{B})$, sicché $\widetilde{T}^{-1}$ è suriettivo.

(b) $\Longrightarrow$ (a) Se $\widetilde{T}^{-1}$ è suriettivo, l'immagine di U_T contiene tutte le funzioni indicatrici, di modo che U_T è suriettivo. $\square$

Definizione 4.1. Trasformazioni T_1 e T_2 che conservano la misura su $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mu_1)$ e $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mu_2)$ rispettivamente si dicono *spettralmente isomorfe* se esiste un operatore lineare invertibile $W : L^2(\mu_2) \longrightarrow L^2(\mu_1)$ tale che

(a) per ogni coppia di elementi f e g di $L^2(\mu_2)$ è $\langle Wf, Wg\rangle = \langle f, g\rangle$;
(b) $U_{T_1} W = W U_{T_2}$.

L'isomorfismo spettrale è un concetto piú debole del coniugio.

Teorema 4.2. *Se due trasformazioni che conservano la misura sono coniugate sono anche spettralmente isomorfe.*

Dimostrazione. Siano T_1 e T_2 le trasformazioni in oggetto sugli spazî di probabilità $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mu_1)$ e $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mu_2)$ e sia $\Phi : (\widetilde{\mathcal{F}}_2, \widetilde{\mu}_2) \longrightarrow (\widetilde{\mathcal{F}}_1, \widetilde{\mu}_1)$ un isomorfismo di algebre di misura tale che $\Phi\, \widetilde{T}_2^{-1} = \widetilde{T}_1^{-1}\, \Phi$. Si definisca un operatore lineare V come nel Teorema 2.2. Rimane da dimostrare che sia $U_{T_1} V = V U_{T_2}$. Se A è in $\mathcal{F}_2$ è

$$U_{T_1} V 1_{\widetilde{A}} = U_{T_1} 1_{\Phi(\widetilde{A})} = 1_{\widetilde{T}_1^{-1}\Phi(\widetilde{A})} = 1_{\Phi(\widetilde{T}_2^{-1}\widetilde{A}} = V 1_{\widetilde{T}_2^{-1}\widetilde{A})} = V U_{T_2} 1_{\widetilde{A}}.$$

Gli operatori $U_{T_1} V$ e $V U_{T_2}$ coincidono, dunque, sulle funzioni indicatrici, quindi, per la linearità, sulle funzioni semplici e, per la continuità, sulle funzioni di $L^2(\mu_2)$. □

Vale un parziale reciproco dell'ultimo risultato.

Teorema 4.3. *Se T_1 e T_2 conservano la misura su $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mu_1)$ e $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mu_2)$ rispettivamente e se $V : L^2(\mu_2) \longrightarrow L^2(\mu_1)$ è un'isometria invertibile che gode delle proprietà* (a), (b) *e* (c) *del Teorema 2.2 e che soddisfà alla relazione*

$$U_{T_1} V = V U_{T_2}, \tag{4.1}$$

allora T_1 e T_2 sono coniugate.

Dimostrazione. Per il Teorema 2.2, l'operatore V è indotto da un isomorfismo di algebre di misura $\Phi : (\widetilde{\mathcal{F}}_2, \widetilde{\mu}_2) \longrightarrow (\widetilde{\mathcal{F}}_1, \widetilde{\mu}_1)$: se A appartiene a $\mathcal{F}_2$ è $V 1_{\widetilde{A}} = 1_{\Phi(\widetilde{A})}$. La relazione (4.1) diviene $1_{\widetilde{T}_1^{-1}\Phi(\widetilde{A})} = 1_{\Phi(\widetilde{T}_2^{-1}\widetilde{A})}$, di modo che $\widetilde{T}_1^{-1}\Phi = \Phi \widetilde{T}_2^{-1}$. □

Infine diamo una definizione che tornerà utile nel seguito e due risultati che la legano ai concetti già introdotti.

DEFINIZIONE 4.2. Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio di probabilità con una base numerabile. Si dice che la trasformazione T che conserva la misura ha *spettro di* LEBESGUE *numerabile* se esiste una successione $\{f_n : n \in \mathbf{Z}\}$ di elementi di $L^2(\mu)$ con $f_0 \equiv 1$, tale che la famiglia

$$\{f_0\} \cup \{U_T^n f_j : j \in \mathbf{N}, n \in \mathbf{Z}\}$$

sia una base ortonormale di $L^2(\mu)$.

Dimostriamo qui direttamente che una particolare traslazione bilatera ha spettro di LEBESGUE numerabile. Si consideri lo spazio $\{0,1\}$ con probabilità $P(0) = P(1) = 1/2$. Una base ortonormale per lo spazio L^2 costruito su questo spazio è costituita dalla funzione identicamente eguale a 1 e dalla funzione $t \mapsto \exp(i\pi t)$ con $t \in \{0,1\}$. La traslazione T opera sullo spazio $\{0,1\}^{\mathbf{Z}}$ dotato della misura prodotto μ. Nello spazio $L^2(\mu)$ vi è una base della forma

$$\{1\} \cup \left\{\varphi_{n(1),n(2),\dots,n(r)} : r \in \mathbf{N}, n(1) < n(2) < \cdots < n(r)\right\}$$

con

$$\varphi_{n(1),n(2),\dots,n(r)}\left(\{x_n\}\right) := \exp\left(i\pi\ (n(1) + n(2) + \cdots + n(r))\right).$$

Ora si ha

$$U_T \varphi_{n(1),n(2),\dots,n(r)} = \varphi_{n(1)+1,n(2)+1,\dots,n(r)+1}.$$

Si possono perciò riassegnare gli indici in modo che la base abbia la forma

$$\{1\} \cup \{U_T^n f_j : j \in \mathbf{N}, n \in \mathbf{Z}\}.$$

TEOREMA 4.4. *Due trasformazioni che conservano la misura e che abbiano spettro di* LEBESGUE *numerabile sono spettralmente isomorfe.*

DIMOSTRAZIONE. Siano T_1 e T_2 le due trasformazioni che conservano la misura su $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mu_1)$ e $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mu_2)$ rispettivamente. Si supponga che $L^2(\mu_1)$ e $L^2(\mu_2)$ abbiano basi ortonormali della forma

$$\{f_0\} \cup \{U_{T_1}^n f_j : j \in \mathbf{N}, n \in \mathbf{Z}\} \qquad \text{e} \qquad \{g_0\} \cup \{U_{T_2}^n g_j : j \in \mathbf{N}, n \in \mathbf{Z}\}$$

con $f_0 \equiv 1$ e $g_0 \equiv 1$, rispettivamente. Si definisca $W : L^2(\mu_2) \longrightarrow L^2(\mu_1)$ sugli elementi della base mediante

$$W(g_0) := f_0 \qquad \text{e} \qquad W\left(U_{T_2}^n g_j\right) := U_{T_1}^n f_j \qquad (j \in \mathbf{N}, n \in \mathbf{Z}),$$

e si estenda tale definizione per linearità a tutto $L^2(\mu_2)$. Pertanto $WU_{T_2} = U_{T_1}W$, sicché T_1 e T_2 sono spettralmente isomorfe. □

TEOREMA 4.5. *Se una trasformazione che conserva la misura ha spettro di* LEBESGUE *numerabile è fortemente mescolante.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\{f_0\} \cup \{U_T^n f_j : j \in \mathbf{N}, n \in \mathbf{Z}\}$ una base di $L^2(\mu)$ con $f_0 \equiv 1$. per ogni scelta di j, s, k e n in $\mathbf{Z}$, si ha

$$\lim_{h \to +\infty} \langle U_T^h \circ U_T^n f_j, U_T^k f_s \rangle = \langle U_T^n f_j, 1 \rangle \langle 1, U_T^k f_s \rangle,$$

perché segue dalla definizione dell'operatore U_T che entrambi i membri dell'ultima equazione sono nulli, a meno che non sia $j = s = 0$ quando sono entrambi eguali a 1. Fissati $k, s \in \mathbf{Z}$ si ponga

$$H_{k,s} := \left\{ f \in L^2(\mu) : \lim_{h \to +\infty} \langle U_T^h f, U_T^k f_s \rangle = \langle f, 1 \rangle \langle 1, U_T^k f_s \rangle \right\}.$$

È questo un sottospazio chiuso di $L^2(\mu)$ e contiene la base considerata; perciò $H_{k,s} = L^2(\mu)$. Si fissi, ora, $f \in L^2(\mu)$ e si ponga

$$H_f := \left\{ g \in L^2(\mu) : \lim_{h \to +\infty} \langle U_T^h f, g \rangle = \langle f, 1 \rangle \langle 1, g \rangle \right\}.$$

Di nuovo, H_f è un sottospazio chiuso di $L^2(\mu)$ che contiene la base considerata, sicché coincide con $L^2(\mu)$. Pertanto per ogni scelta di f e g in $L^2(\mu)$ si ha

$$\lim_{h \to +\infty} \langle U_T^h f, g \rangle = \langle f, 1 \rangle \langle 1, g \rangle,$$

ciò che dimostra che T è fortemente mescolante. $\square$