CAPITOLO 25

Flock parziali e loro estensioni

Nel Capitolo 3, abbiamo parlato di piani di traslazione che ammettono gruppi di Baer. Si ricordi che

Corollario 25.1. (si veda (3.5)).

Sia π un piano di traslazione di ordine q^2 con nucleo $K \cong GF(q)$ che ammette un gruppo di Baer B.

(1) Se $|B| = q$, π corrisponde a un flock parziale conico privato di una sola conica. Questo flock può essere esteso a un flock conico se e solo se la rete di grado $q+1$ che contiene il sottopiano $Fix B$ é una rete derivabile.

(2) Se $|B| = q-1$, π corrisponde a un flock parziale iperbolico privato di una sola conica. Questo flock può essere esteso a un flock iperbolico se e solo se, la rete di grado $q+1$ che contiene il sottopiano $Fix\ B$ é una rete che corrisponde a un regolo in $PG(3, K)$.

Recentemente, Payne e Thas [**127**] hanno provato

Teorema 25.2. Payne e Thas [**127**]).

Un flock parziale conico privato di una sola una conica può essere esteso ad un unico flock conico.

Allora, abbiamo

Teorema 25.3. L'insieme dei flock conici in $PG(3,q)$ é equivalente all'insieme dei piani di traslazione con fibrazione in $PG(3,q)$ che ammettono un gruppo di Baer di ordine q.

Recentemente, Storme e Thas hanno migliorato (25.2) per q pari.

Teorema 25.4. (Storme e Thas [**132**]).

Un flock parziale conico in $PG(3,2^r)$ di k coniche può essere esteso ad un unico flock nei seguenti casi:

(1) per r pari e k maggiore di $2^r - 2^{r/2} - 1$,

(2) per r dispari e k maggiore di $2^r - 2^{(r+1)/2}$.

Payne e Thas hanno studiato flock conici che hanno un sottoflock lineare di $(q-1)/2$ coniche.

Teorema 25.5. (Payne e Thas [**123**]).

Se un flock conico in $PG(3,q)$ ha un sottoflock lineare di $(q-1)/2$ coniche allora il flock é lineare o un flock di Fisher.

Ora ci chiediamo:

Se un flock parziale conico P contiene un sottoflock lineare di t coniche F, quanto deve essere grande t per poter estendere P a un flock? Per esempio, se t maggiore o uguale $(q-1)/2$ é possible ottenere un' estensione?

La risposta a questa domanda é data dal seguente:

Teorema 25.6. (Johnson [**87**]).

Un flock parziale conico in $PG(3,q)$ che contiene un sottoflock lineare di almeno $(q-1)/2$ coniche può essere esteso ad un unico flock e questo flock é lineare o un flock di Fisher.

La dimostrazione di (25.6) dipende dal seguente teorema:

Teorema 25.7. (Johnson [**87**]).

Sia Σ un piano affine Desarguesiano di ordine q^2, q dispari. Denotiamo un insieme di reti di un regolo che hanno una retta in comune con $\{R_1, R_2, \ldots, R_q\}$. Queste reti si chiamano le reti della base.

Consideriamo uno spazio vettoriale di dimensione due T che interseca $(q-1)/2$ delle reti della base.

Allora, esiste un sottoinsieme di $(q+1)/2$ delle reti della base tali che viene intersecato da ogni rete della base. In questo caso, ci sono esattamente due rette e due sottopiani di Baer di ogni rete che intersecano T. Inoltre, se H é il gruppo di omologia di Σ con la retta all'infinito come l'asse, allora, questi due sottopiani di Baer sono in orbite diverse di H.

Ora, si considerino le condizioni in (25.6). Inoltre assumiamo che il flock parziale P ha esattamente $(q+1)/2$ coniche. Allora, abbiamo una rete di traslazione di grado $(q+1)/2$ che ha una sottorete lineare di grado (q-1)/2. Cioé, possiamo incassare la fibrazione parziale della sottorete lineare come componenti di Σ. In questo caso, c'é un'altra componente T che diventa un sottopiano di Baer in Σ o una componente. Nell'ultimo caso, P é lineare. Nel primo caso, invece, abbiamo la situazione descritta in (25.6). Si ricordi che c'é un gruppo di elazione E che agisce transitivamente sulle componenti delle reti della base che non hanno una retta comune.

Si consideri TEH, allora abbiamo un $(q+1)$-nido. Infatti, prima si dimostra che ci sono $(q(q+1)/2)$ sottospazi di dimensione due in TEH. Si noti che sono $(q+1)/2$ sottopiani di Baer in ogni rete della base di intersezione perche H fissa ogni componente in Σ. Non é difficile dimostrare che questi sottopiani hanno due a due intersezione identica. Inoltre, usando il gruppo E é possibile provare che TEH é uguale all'unione di questi sottopiani di Baer. Usando questo $(q+1)$-nido, le componenti di Σ, e le reti della base che non hanno intersezione con T, possiamo estendere P a un flock conico. é possible vedere che questo flock é un flock di Fisher con i lavori di Payne [**123**], [**124**], Payne e Thas [**127**], e Baker e Ebert [**8**]. Adesso, supponiamo che P contenga un flock parziale lineare ma non facciamo ipotesi sul grado di P. Allora, possiamo assumere che ci siano due sottopiani di Baer di Σ, T_1 e T_2 tali che questi sottopiani non hanno intersezione non banale con un insieme di $(q-1)/2$ reti della base di Σ. Quindi, esistono due flock F_1 , F_2 contenenti le coniche C_1, C_2 le quali corrispondono alle reti di Σ che contengono T_1, T_2 rispettivamente. Inoltre, questi due flock sono flock di Fisher. Se la conica C_2 non é in F_1 allora ci sono $(q-1)/2+1$ coniche in F_1 tale che C_2 e queste hanno a due a due intersezione identica. Ma questo implica che C_2 può avere al piú due punti di intersezione con le altre $(q-1)/2$ coniche. Cioé, possiamo avere solo $(q-1)$ punti di C_2. Allora $F_1 = F_2$, completando cosí la dimostrazione al teorema.

Corollario 25.8. (Payne e Thas [**127**]).

Un flock conico in PG(3,q) che contiene un flock parziale lineare di almeno (q-1)/2 coniche é un flock lineare o un flock di Fisher.

Si noti che la nostra dimostrazione mostra come costruire il flock e il metodo di Payne e Thas mostra l'esistenza di un unico flock che non é lineare.