CAPITOLO 24

Piani affini che sono ricoperti da sottopiani

Ricordiamo che una r-fibrazione in $PG(2r-1, K)$, K corpo, é un insieme di sottospazi proiettivi di dimensione $(r-1)$ che hanno a due a due intersezione identica e tali che ricoprono i punti di $PG(2r-1, K)$.
Un $(r-1)$-regolo in $PG(2r-1, K)$ é un insieme di sottospazi proiettivi di dimensione $(r-1)$ che hanno due a due intersezione identica tali che se una retta interseca almeno tre sottospazi del regolo allora la retta interseca ogni sottospazio del suddetto insieme e i punti della retta sono contenuti nelle intersezioni con i sottospazi. Normalmente, non si usa la terminolgia $(r-1)$-regolo ma si dice solo "regolo" oppure "K-regolo". é facile vedere che date tre rette distinte di $PG(2r-1, K)$, esiste esattamente un regolo che contiene queste rette.
Non é possibile avere un $(r-1)$-regolo in $PG(2r-1, K)$ se K non é campo. é possibile avere regoli in $PG(2r-1, K)$ per campi infiniti. é anche possibile avere regoli negli spazi proiettivi di dimensione infinita che corrispondono a spazi vettoriali di tipo $W \oplus W$.
Nel 1964, Bose e Bruck (si veda in Bader e Johnson [**4**]) hanno studiato fibrazioni regolari; cioé fibrazioni tali che per ogni tre rette distinte nella fibrazione il regolo da esse generato é contenuto nella fibrazione.

Teorema 24.1. (Bose-Bruck [**20**]).

Sia S una fibrazione regolare su un campo $K \neq GF(2)$. Allora, S definisce un piano di traslazione di Moufang.
In particolare, una fibrazione regolare finita su un campo $K \neq GF(2)$ definisce un piano Desarguesiano.

Un K-regolo definisce una rete ricoperta da sottopiani nel modo seguente: Per ogni coppia di punti distinti della rete, esiste un sottopiano della rete che contiene questi due punti e ha le stesse classi di parallelismo della rete.

Ricordo il seguente teorema giá dato nel Capitolo 8.

TEOREMA 24.2. (Johnson [**75**]).

Sia R una rete derivabile. Allora, esiste un insieme di coordinate Q che é uno spazio vettoriale destro su un corpo K quando la rete R ha equazioni $x = c$, $y = x \cdot \alpha + b$ per ogni $a, b \in Q$ e $\alpha \in K$. Viceversa una rete che ha un insieme di coordinate con le suddette proprietà é derivabile.

Si noti che una rete derivabile può essere riricoperta da sottopiani di Baer.

DEFINIZIONE 24.3. *(si veda anche il Capitolo 16).*

Una rete R é detta rete ricoperta se per ogni coppia di punti P e Q, $P \neq Q$, esiste un sottopiano $\pi_{P,Q}$ che contiene P e Q e tale che tutte le classi di parallelismo di R sono classi di parallelismo del sottopiano.

Non é difficile provare che un K-regolo defisce una rete riricoperta.

DEFINIZIONE 24.4. *Una rete R é detta pseudo-regolo se esiste un insieme di coordinate Q che é uno spazio vettoriale destro su un corpo K in cui R ha equazioni $x = c$, $y = x \cdot \alpha + b$ per ogni $a, b \in Q$ e $\alpha \in K$.*

Ricordiamo,

TEOREMA 24.5. (Johnson [**68**] (si veda il Capitolo 8)).

(1) Sia $R = (P, L, C, B, I)$ una rete derivabile. Allora, esiste un corpo K e uno spazio proiettivo di dimensione tre $\Sigma \cong PG(3, K)$ tale che i punti P di R sono le rette di Σ che sono oblique a una retta fissata N, le rette L di R sono i punti di $\Sigma - N$, le classi di parallelismo C di R sono i piani di Σ che contengono N e i sottopiani B di R sono i piani di Σ che non contengono N.

(2) Viceversa, se $\Sigma_1 \cong PG(3, L)$ é uno spazio proiettivo di dimensione tre sul semicorpo L e N_1 é una qualunque retta fissata, definito in Σ_1 l'insieme dei punti P_1, l'insieme delle rette L_1, l'insieme delle classi di parallelismo C_1, l'insieme dei sottopiani B_1 e l'incidenza I_1, allora $R = (P_1, L_1, C_1, B_1, I_1)$ é una rete derivabile.

Recentemente Johnson ha provato che questo teorema può essere esteso al caso infinito.

Teorema 24.6. Johnson [**88**]).

(1) Sia $R = (P, L, C, B, I)$ una rete ricoperta. Allora, esistono un corpo K, uno spazio proiettivo Σ, e un sottospazio N di codimensione due tale che i punti P di R sono le rette di $\Sigma - N$, le rette L di R sono i punti di $\Sigma - N$, le classi di parallelismo C di R sono i sottospazi di codimensione uno di R che contengono N e i sottopiani B di R sono i piani di $\Sigma - N$.

(2) Viceversa, se $\Sigma_1 \cong PG(3, L)$ é uno spazio proiettivo su un semicorpo L e N_1 é un qualunque sottospazio di codimensione due, definiti punti P_1, rette L_1, classi di parallelismo C_1, sottopiani B_1 secondo la corrispondenza data sopra dove l'incidenza I_1 é l'incidenza in Σ_1. Allora, $R = (P_1, L_1, C_1, B_1, I_1)$ é una rete ricoperta.

Teorema 24.7. Johnson-Lin [**89**]).

Ogni rete di tipo (24.6) é una rete di un pseudo-regolo.

Allora, abbiamo

Teorema 24.8. Johnson [**88**], si veda anche De Clerck e Johnson [**26**] per il caso finito).

Una rete ricoperta é una rete di un pseudo-regolo.

Una rete finita di un pseudo-regolo é una rete di un regolo.

Definizione 24.9. *Sia π un piano affine (finito o infinito). Se esiste un insieme B di sottopiani non-banali di π tale che*

(1) l'unione ricopre i punti

(2) se per un sottopiano π_o in B, la rete R_{π_o} le cui rette sono estensione delle rette di π_o é una rete ricoperta, allora si chiamerá π piano affine che é ricoperto da sottopiani.

Allora, un piano di traslazione con fibrazione regolare é ricoperto da sottopiani.
Si considerino ora le fibrazioni regolari o piani di traslazione con fibrazioni regolari solo nel caso in cui caso i piani affini sono ricoperti da sottopiani.

DEFINIZIONE 24.10. *Sia π un piano affine. Sia R un fissato insieme di classi di parallelismo. Sia π un piano che é sottopiano ricoperto.*

(1) π é detto piano ricoperto da sottopiani con rete (incassata) R, se ogni rete ricoperta di π contiene R.

Si dice che R é non-banale quando ci sono almeno tre classi.

(2) π é detto un piano che é regolare rispetto ai sottopiani se e solo se per tre rette distinte che hanno un punto (affine) in comune, esiste un sottopiano dell'insieme dei sottopiani di π che contiene queste tre rette.

(3) Sia Π un piano proiettivo. Πé detto un piano proiettivo che é ricoperto da sottopiani se e solo se ogni piano affine π associato a Πé un piano affine che é ricoperto da sottopiani.

(4) Un piano proiettivo si chiama regolare rispetto ai sottopiani se e solo se ogni piano affine associato é regolare rispetto ai sottopiani.

Per mostrare alcuni esempi, possiamo menzionare che ogni piano di traslazione di caratteristica due é un piano affine che é ricoperto da sottopiani. Ci sono anche piani di traslazione di Ostrom di ordine q^4 che sono piani affini che sono ricoperto da sottopiani con rete (incassata) di grado $q+1$. C'é un insieme di q^2+q+1 reti derivabili che contengono una rete di grado $q+1$. Questi piani sono importanti perché vi corrispondono packing (si veda Jha-Johnson su "packings" o "parallelisms" in Bader e Johnson [**4**]).

Possiamo dimostrare:

TEOREMA 24.11. Baer-Johnson [**4**]).

Un piano affine che é sottopiano ricoperto con rete non-banale (incassata) é un piano di traslazione. Inoltre tale rete (incassata) é una rete ricoperta.

Gleason [**35**] ha considerato piani di Fano. Questi sono piani proiettivi tali che ogni quadrangolo genera un sottopiano proiettivo di ordine 2.

Teorema 24.12. bf (Gleason [**35**]).

Un piano finito di Fano é Desarguesiano.

Inoltre, Gleason ha dimostrato che un piano di Fano soddisfa la piccola configurazione di Reidemeister. Anche, Lüneburg e Kegel hanno lavorato su questo.

Ricordiamo la piccola configurazione di Reidemeister.

Definizione 24.13. *Sia* Π *un piano proiettivo e sia* L *una retta e siano* c, u, v *tre punti distinti di* L. *Siano* p_1, p_2 *due punti distinti della retta* $M \neq L$ *dove* M *é incidente con* c. *Siano* Z, W *rette distinte e non uguali a* M *ma incidenti con* c. *Si definiscano* $z_i = Z \cap (p_i u)$ *e* $w_i = Z \cap (p_i W)$ *dove* $i = 1, 2$. *Inoltre, sia* $m_i = (z_i v) \cap (w_i u)$, i= $1, 2$.

(1) Se i punti c, m_1, m_2 *sono allineati allora la configurazione soddisfa la piccola configurazione di Reidemeister rispetto alla terna* (c, u, v).

(2) Si dice che un piano affine soddisfa la piccola configurazione di Reidemester se e solo se abbiamo la configurazione per tutti i punti c, u, v *sulla retta all'infinito.*

(3) Si dice che un piano proiettivo soddisfa la piccola configurazione di Reidemeister se e sole se abbiamo la configurazione per tutti i punti c, u, v *che sono allineati.*

Teorema 24.14. Gleason, Lüneburg, Kegel-Lüneburg (si veda in [**4**]).

Un piano proiettivo finito é Desarguesiano se e solo se il piano soddisfa la piccola configurazione di Reidemeister.

Definizione 24.15. *Un piano affine si chiama un piano affine di Fano se e solo se per ogni quadrangolo* (P, Q, R, S) *tale che* $PQ \mid\mid RS$ *e* $PR \mid\mid QS$ *allora* $PS \mid\mid QR$.

Per esempio, abbiamo

Teorema 24.16. Bader-Johnson [**4**]).

Un piano affine che é regolare rispetto ai sottopiani e tale che i sottopiani hanno ordine pari é un piano affine di Fano.

Viceversa, ogni piano affine di Fano é regolare rispetto ai sottopiani.

Possiamo provare:

Teorema 24.17. (Bader-Johnson [**4**]).

Un piano proiettivo che é regolare rispetto ai sottopiani soddisfa la piccola configurazione di Reidemeister. Allora, un piano proiettivo finito che é regolare rispetto ai sottopiani é Desarguesiano.

Teorema 24.18. Bader-Johnson [**4**]).

Un piano di traslazione é sottopiano regolare se e solo se il piano é regolare (cioé, la fibrazione é regolare).

Allora, un piano finito di traslazione di ordine dispari che é sottopiano regolare é Desarguesiano.