CAPITOLO 22

Quasifibrazione e flock parziali di un cono infinito

De Clerck e Van Maldeghem [**27**] hanno studiato i flock infiniti di un cono quadratico, i piani di traslazione corrispondenti e la possibilità di ottenere i quadrangoli generalizzati. In particolare, De Clerck e Van Manldeghem hanno costruito alcuni esempi di flock infinti. Per esempio, ci sono esempi infiniti che sono simili ai flock di Fisher-Thas-Walker e di Kantor. Anche, Jha e Johnson [**55**] hanno costruito alcuni esempi di flock infiniti. I nostri metodi sono molto diversi dai metodi di De Clerck e Van Maldeghem e usano fibrazioni e fibrazioni parziali corrispondenti. Inoltre, i nostri metodi permettono di costruire alcuni esempi di fibrazioni parziali massimali che non esistono in spazi proiettivi finiti:
Sia F un campo e sia K un'estensione quadratica di F. Sia Σ il piano Pappiano che può essere coordinatizzato da K. Se $K = F(\sqrt{\gamma})$, allora é possibile rappresentare Σ (cioé la fibrazione di Σ) come:

$$x = 0, \qquad y = x \begin{bmatrix} u & \gamma t \\ t & u \end{bmatrix}$$

per ogni $u, t \in K$. L'insieme

$$R_t = \{x = 0,\ y = x \begin{bmatrix} u & \gamma t \\ t & u \end{bmatrix} \mid u \in F\}$$

é un regolo in $PG(3, F)$.

Si é visto che esiste un sottopiano di Baer π_o (cioé, uno sottospazio vettoriale di dimensione due) tale che quando π_o interseca una retta di R_t. Allora esistono esattamente due rette di R_t che intersecano π_o. In particolare il sottopiano $\pi_o = \langle (0,1,0,0), (1,0,1,0) \rangle$ ha la seguente proprietà: sia $\lambda \subset F$ l'insieme degli elementi t tali che R_t e π_o hanno intersezione non-banale. Sia $H = \langle (\mathrm{x,y}) \rightarrow (\mathrm{xa}^2, \mathrm{ya}^2) \mid \mathrm{a}^2 \in F \rangle$. Allora, H é un gruppo di collineazioni di Σ che fissa ogni rete R_t. Anche

$$E = \left\langle (x, y) \rightarrow (x, y) \begin{bmatrix} 1 & 0 & u & 0 \\ 0 & 1 & 0 & u \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid u \in F \right\rangle$$

é un gruppo di collineazioni di Σ che fissa ogni rete R_t.

Sia R_{π_o} la rete di Σ che contiene π_o tale che ogni componente di R_{π_o} é un componente di π_o.

Proposizione 22.1. (Jha-Johnson [**55**]).

$R_{\pi_o}E$ é un insieme di regoli in $PG(3, F)$ tale che ogni componente di $R_{\pi_o}E$ é contenuta in esattamente due regoli. Si noti che $R_{\pi_o}E = \cup_{t\in\lambda} R_t$. Un insieme di questo tipo si chiama un E-nido di regoli. Inoltre, per opportuni campi, $\pi_o EH$ é una fibrazione parziale tale che $\pi_o EH$ e $R_{\pi_o}E$ sono fibrazioni parziali che si coprono. Allora, é possibile usare reti sostituibili per costruire un altro piano di traslazione.

É possibile provare che:

Teorema 22.2. (Jha-Johnson [**56**]).

Sia F un campo tale che

(i) il sottogruppo degli elementi che sono quadrati é un sottogruppo di indice due

(ii) -1 é un quadrato di F.

Sia $K = F(\sqrt{\gamma})$ con γ non-quadrato in K e si supponga che

(iii) il sottogruppo degli elementi di K che sono quadrati é un sottogruppo di indice due di K.

Sia Σ il piano Pappiano coordinatizzato da K. Sia E il sottogruppo di elazioni di asse x = 0 che agisce transitivamente sulle rette, diverse da x = 0, di regoli che contenono x = 0. Queste reti si chiamano i regoli base. Sia H il sottogruppo di omologie di Σ generato dai quadrati degli elementi di K.

(1) Allora, esiste un piano di traslazione Σ_{π_o} ottenuto dal piano Σ con la rete di sostituzione usando un E-nido di regoli.

(2) Esiste un sottopiano di Baer π_o che ha la proprietà che ha zero o due componenti di intersezione con i regoli basi. Il $E-$nido é l'insieme $R_{\pi_o}E$ e la rete di sostituzione é $\pi_o EH$. Inoltre, Σ_{π_o} ha una fibrazione che é unione di regoli che hanno una retta in comune.

Non é difficile estendere la teoria ai piani infiniti e ai flock infiniti.

DEFINIZIONE 22.3. *Un flock costruito con il metodo dato in (22.2) é detto flock generalizzato di Fisher.*

ESEMPIO 22.4. *Sia P un campo isomorfo a GF(p), con p≡1 mod 4, tale che -1 sia un quadrato in P. Sia F una qualunque estensione algebrica di P che non sia chiusa (algebraicamente) e che non sia una serie di estensioni quadratiche di P. Allora, il sottogruppo di elementi che sono quadrati ha indice due.*
Questi esempi fornisce un grande numero di esempi di flock generalizzati di Fisher.

De Clerck e Van Maldeghem hanno costruito un esempio di flock infinito che é simile ad un flock di Fisher-Walker-Thas nel caso finito. Probabilmente questo esempio dovrebbe essere attribuito anche a D. Betten. Nel 1973, Betten [**11**] ha trovato alcuni esempi di piani di traslazione che corrispondono ai flock di un cono quadratico. Gli argomenti di Betten non usano l'ipotesi che i piani siano finiti. Infatti, c'é un esempio con fibrazione in PG(3,R) dove R é l'insieme dei numeri reali.

TEOREMA 22.5. (Jha-Johnson [**55**]).

Sia K un campo in caratteristica diversa da 3 e si consideri la funzione $f\colon K \to K$, tale che $f(x) = x^3$. Sia V$_4$ uno spazio vettoriale su K e consideriamo i sottospazi

$$x = 0, \qquad y = x \begin{bmatrix} u - s^2 & -s^3/3 \\ s & u \end{bmatrix}$$

per ogni $s, u \in K$.

(1) Se f é iniettiva allora l'insieme di questi sottospazi forma una fibrazione parziale in $PG(3, K)$.

(2) Se f é biettiva allora, quest'insieme é una fibrazione.

Betten [**11**] ha provato che quando K é isomorfo a GF(q), con q$\equiv -1$ mod 3 oppure quando K é il campo di numeri reali, ci sono fibrazioni e quindi piani di traslazione. Si noti che tale definizione produce i piani di Walker quando q é dispari.

Definizione 22.6. *Una fibrazione parziale come in (22.5)(1), si chiama fibrazione parziale generalizzata di Betten. Una fibrazione come in (22.5)(2), si chiama fibrazione generalizzata di Betten.*

Infatti, la situazione in (22.5)(1) dá una fibrazione parziale massimale.

Teorema 22.7. (Jha-Johnson [**55**]).

Una fibrazione parziale generalizzata di Betten é una fibrazione o una fibrazione parziale massimale.

Esempio 22.8. *Sia $K = Q$ il campo dei numeri razionali. La funzione $f(x) = x^3$ é iniettiva ma non suriettiva. Quindi, c'é una fibrazione parziale generalizzata di Betten che é una fibrazione parziale massimale.*
Più in generale, si puó considerare un qualunque campo contenente Q e contenuto nel campo di numeri reali e tale che non contiene tutti i numeri della forma $\alpha^{1/3}$. Allora, abbiamo un elevato numero di esempi di fibrazioni parziali massimali di questo tipo.

Esempio 22.9. *(1) Sia Q il campo dei numeri razionali. Per ogni elemento x in Q, si aggiunga $4x^{1/3}$. Sia $K = Q(x^{1/3})$ tale che x in Q. In questo caso, $f(x) = x^3$ é biettiva.*

(2) Più in generale, si puó considerare un qualunque campo contenente Q e contenuto nel campo di numeri reali a cui viene aggiunto $x^{1/3}$ per tutti gli elementi di F e ottenere un campo K tale che f é biettiva.

Quindi abbiamo diversi esempi di fibrazioni generalizzate di Betten.

Gli esempi descritti sopra inducono a studiare fibrazioni parziali con le proprietà date sopra.

Definizione 22.10. *Sia N una rete finita o infinita. Sia P un punto e sia L_P l'insieme delle rette che sono incidenti con P. Sia α una qualunque classe di parallelismo e sia M una retta di α che non é incidente con P. La rete si chiama una rete ricoperta da una classe se e solo se i punti di M sono contenuti nelle intersezioni con L_P.*
Per esempio, la rete $x = 0$, $y = x\begin{bmatrix} u-s^2 & -s^3/3 \\ s & u \end{bmatrix}$ per ogni $s, u \in K$ é una rete ricoperta da una classe con punto P = (0,0), e retta M di equazione (x = 1).

Si noti che

$$(x = 1 = (1,0)) \cap \{x = 0,\ y = x\begin{bmatrix} u-s^2 & -s^3/3 \\ s & u \end{bmatrix}$$

per ogni s, u in K é $(x = 1)$.

Teorema 22.11. (Jha-Johnson [**59**]).

Una rete ricoperta da una classe rispetto alla retta M e al punto P é: un piano affine oppure una rete massimale che non contiene trasversali contenti P.

Dim: Se la rete non é un piano affine, sia T una trasversale che contiene P. Allora, T ed M hanno un'unica intersezione Q. Tutttavia eistse una retta della rete che contiene P e Q. Assurdo.

Definizione 22.12. *Una rete ricoperta da una classe é una rete ricoperta da una classe di traslazione se e solo se esiste un gruppo di collineazioni G che fissa ogni classe di parallelismo e agisce transitivamente sui punti affini. Un siffatto gruppo si chiama gruppo di traslazione. Tale gruppo di traslazione, se esiste, non é necessariament unico, o abeliano o abeliano elementare.*

Teorema 22.13. (Jha-Johnson [**59**]).

Sia N una rete ricoperta da una classe di traslazione con gruppo di traslazione abeliano (questa rete si chiama rete ricoperta da una classe abeliana). Allora un insieme $(Q, +, *)$ di coordinate può essere scelto in modo tale che:

(i) $(Q, +)$ é un gruppo abeliano,

(ii) per ogni m in Q, esiste una classe associata di parallelismo (m) tale che la funzione T ternaria é lineare, cioé T(x,m,b) = x∗m + b. Inoltre, per $a \neq b, c$ esiste un'unica soluzione dell'equazione x∗a = x∗b + c.

(iii) (c+a)∗m = c∗m + a∗m per ogni a,c, m di Q.

(iv) Viceversa, una rete con un insieme di coordinate con la proprietà (ii) é una rete ricoperta da una classe.

Adesso, é possible formulare una teoria simile a quella sopra per quasicorpi.

Infatti:

Proposizione 22.14. (Jha-Johnson [**56**]).

Sia N una rete ricoperta da una classe abeliana. Si scelgano le coordinate come in (22.13).

(1) Allora, esiste uno corpo K tale che $(Q, +)$ é uno K- spazio vettoriale.

(2) Le rette che contengono il vettore nullo sono isomorfe come K-spazi.

Definizione 22.15. *Sia V uno spazio vettoriale della forma $W \oplus W$ dove W é un K-spazio. Sia B un base per W e scegliamo un vettore v in $W \oplus 0$. Una quasifibrazione Q é un insieme di spazi, tali che a due a due hanno intersezione identica, contenente $W \oplus 0, 0 \oplus W$ e con la proprietà che per ogni vettore della forma $v+w$, esiste un sottospazio di Q che contiene $v+w$.*

Teorema 22.16. (Jha-Johnson [**59**]).

Una quasifibrazione é un fibrazione o una fibrazione parziale massimale.

Teorema 22.17. (Jha-Johnson [**59**]).

Una rete ricoperta da una classe abeliana é equivalente ad una quasifibrazione.

Definizione 22.18. *Un insieme di coordinate come in (22.13) si chiama un pseudo quasicorpo.*

Allora, si ha:

Teorema 22.19. (Jha-Johnson [**59**]).

Le seguenti strutture sono equivalenti:

(1) le reti coperte da classi abeliane,

(2) le quasifibrazioni,

(3) gli insiemi di pseudo quasicorpi.

Si noti che possiamo costruire reti di sostituzione ricoperte da classi abeliane a partire da reti ricoperte da classi abeliane. Infatti, possiamo usare la derivazione delle fibrazioni parziali generalizzate di Betten per avere molti esempi di quasifibrazioni.

Con riferimento alla teoria dei flock, si ha:

Teorema 22.20. (Jha-Johnson [**59**]).

(1) Per ogni quasifibrazione in $PG(3, K)$, che ammette un gruppo di elazioni E tale che una E-orbita sulla quasifibrazione unione l'asse di E formi un regolo in $PG(3, K)$, esiste un flock parziale conico. Inoltre, se la quasifibrazione é massimale allora il flock parziale conico é massimale.

(2) Per ogni quasifibrazione in $PG(3, K)$, con Kcampo che ammette un gruppo di omologie H tale che una H-orbita sulla quasifibrazione unione l'asse di H formi un regolo in $PG(3, K)$, esiste un flock parziale iperbolico. Inoltre, se la quasifibrazione é massimale allora il flock parziale iperbolico é massimale.

Per maggiori informazioni a riguardo si veda [**59**].