CAPITOLO 21

Quasicorpi di Bol e flock iperbolici infiniti

Si é giá parlato di flock iperbolici in $PG(3,q)$. In questo caso, si ricordi il teorema di Thas-Bader, Lunardon ([**45**], [**134**]) che dá una classificazione dei tipi di flock. In particolare, i piani corrispondenti sono sempre piani su un quasicorpo associativo. Buona parte del suddetto teorema é contenuta in un precedente risultato di Thas [**134**] il quale prova che tutti i piani corrispondenti ai flock iperbolici sono piani di Bol.
é possibile sviluppare la teoria che lega i flock iperbolici e piani di traslazione le cui fibrazioni consistono di regoli in $PG(3,K)$ che hanno una retta in comune, per K campo finito o infinito.

Allora ci poniamo le seguenti domande:

Tutti i piani di traslazione che corrispondono ai flock iperbolici in PG(3,K), per Kcampo infinito, sono piani di Bol?

I piani di traslazione che corrispondono ai flock iperbolici sono anche piani su un quasicorpo associativo?

Si ricordi che un piano di traslazione é un piano di Bol se e soltanto se esiste un insieme di coordinate Q tale che $a(b(ac)) = (a(ba))c$ per ogni $a, b, c \in Q$. Per rispondere alle domande formulate sopra, cominciamo a studiare i piani di André. Sia K un campo che contiene elementi che non sono quadrati. Sia γ un elemento che non é un quadrato e si ponga $K(\sqrt{\gamma}) = F$. Sia Σ_F il piano di Pappo che può essere coordinatizzato dal campo F. Si scrivano le componenti come $x = 0$ e $y = xa$ per ogni $a \in F$. Consideriamo i piani di André con fibrazioni in $PG(3,K)$.
Sia σ l'automorfismo di F di ordine due che fissa ogni punto di K.

Studiando i piani finiti che corrispondono ai flock iperbolici, Johnson trovato che esiste sempre un gruppo di omologie H tale che per ogni componente L, L H unione l'asse e il coasse formano un regolo. Ció vale anche per piani infiniti. Cioé, se esiste un gruppo di questo tipo, esiste un flock iperbolico corrispondente.

Il gruppo in questo caso ha la forma (nel piano di Pappo):

$$G = \langle (x, y) \to (xu, yv) \mid u, v \in K - \{0\} \rangle.$$

Una rete di André A_α ha componenti: $\{y = xm \mid m^{\sigma+1} = \alpha\}$ dove α é fissato in K.
é chiaro che G permuta le reti di André, perché $y = xm \to y = x(u^{-1}v)m$ e $(u^{-1}vm)^{\sigma+1} = (u^{-1}v)^2 m^{\sigma+1}$.
Allora, proviamo a costruire tutti i piani di André in $PG(3, K)$, che ammettono il gruppo G.
Costruiamo i piani di André con rete di sostituzione. Allora, sostituiamo la rete A_α con la rete $A^*_\alpha = \{y = xm^\sigma \mid y = xm \in A_\alpha\}$ per α in un insieme $\lambda \subset K$. Abbiamo bisogno di un moltiplicazione $*$ tale che gli elementi di K s1ano nel centro dell'insieme delle coordinate $(Q, +, *)$. Per un piano di André, x$*$m = x$^{\sigma^{(m^{\sigma+1}g)}}$m tale che g é una qualunque funzione da K^* in Z_2 con $1g = 0$. Quindi, $x * m = xm$ per $m \in K$ se e soltanto se, $m^{\sigma+1}g = 0$ per tutti gli elementi $m \in K$ e questo é vero se e soltanto se $m^2 g = 0$ per tutti gli $m \in K$. Inoltre, $A_\delta \to A_{\delta\alpha^2}$ di G per tutti elementi α^2 in K. Allora, quando si sostituisce A_δ dobbiamo sostituire $A_{\delta\alpha^2}$ per tutti α^2. Sia S il sottogruppo in $K - \{0\}$ di elementi che sono quadrati. Si noti che K^*/S é un 2-gruppo abeliano elementare. Quando scegliamo una rete di André A_δ per la sostituzione, allora dobbiamo prendere anche le reti $A_{\delta\alpha^2}$ per tutti gli α^2 in K. Questo corrisponde alla selezione di un insieme λ^+ di K^*/S tale che la funzione g può essere estesa a K^*/S e $\delta S \to 1$ di g^+ se e soltanto se $\delta \to 1$ di g e quindi $\alpha^2\delta \to 1$ di g.

Teorema 21.1. (Johnson [**86**]).

(1) L'insieme dei quasicorpi di André che possono essere construiti da un corpo $F = K(\sqrt{\gamma})$ con K contenuto nell'intersezione del nucleo con il nucleo destro (questo produce a piani di traslazione che corrispondono a flock iperbolici) é equivalente all'insieme delle funzioni da K^*/S a $GF(2)$ tale che $S \to 0$ dove S é il sottogruppo di elementi di K^* che sono quadrati.

(2) L'insieme dei quasicorpi associativi di André che corrispondono a flock iperbolici é ottenuto come l'insieme dei funzionali lineare di K^*/S riguardato come spazio vettoriale su $GF(2)$. Quindi, c' é una corrispondenza biunivoca tra quasicorpi associativi di André che corrispondono ai flock iperbolici e lo spazio duale di K^*/S.

Con questo teorema, possiamo provare:

Proposizione 21.2. (Johnson [**86**]).

(1) Se la dimensione di K^*/S é finita, allora, il numero di piani di André che corrispondono ai flock iperbolici é $2^{|K^*/S|-1}$. Inoltre, la funzione zero corrisponde al piano Pappiano.

(2) Se la dimenzione é 1 (l'ordine 2), ci sono esattamente due piani di André di questo tipo: il piano Pappiano e un piano su un quasicorpo associativo.

Ció si verifica quando l'ordine di K é finito e dispari, quando K é il campo di numeri reali, o quando K é un'estensione algebrica di un campo finito, ma non é un'estensione quadratica di estensioni quadratiche.

(3) Il numero di piani di André che non sono piani su quasicorpi associativi é $2^{|K^*/S|-1} - 2^d$ dove $d = log_2 K^*/S$.

(4) Se la dimensione di K^*/Sé infinita, il numero di piani di André che non sono piani su quasicorpi associativi é infinito.

(5) Sia la dimensione di K^*/S maggiore di uno. Allora, c'é un flock iperbolico che non corrisponde ad alcun piano su un quasicorpo associativo.

Possiamo anche provare che:

Teorema 21.3. (Johnson [**86**]).

Ogni piano di André che corrisponde a un flock ipberbolico é un piano di Bol.

Allora, abbiamo una situazione totalmente diversa nel caso infinito e in quello finito. Ci sono molti esempi di flock iperbolici che non sono isomorfi.

Teorema 21.4. (Johnson [**86**]).

(1) Un flock lineare iperbolico in $PG(3, K)$ corrisponde a un piano Pappiano coordinatizzato da un'estensione quadratica di K.

(2) Due flock lineari in $PG(3, K)$ sono isomorfi se e soltanto se le estensioni corrispondenti sono isomorfe.

(3) Esistono corpi K per cui esiste un numero infinito di flock lineari iperbolici in $PG(3, K)$ a due a due non isomorfi.

Definizione 21.5. *Consideriamo un corpo K e una sua estensione $K(\sqrt{\gamma})$. Costruiamo piani di André usando il metodo delle reti di sostituzione dato prima. Sia U l'insieme delle reti di André che non sono sostituite e sia R^* l'insieme delle rete di André che sono sostituite. La fibrazione per un piano di questo tipo é $U \cup R^* \cup \{x = 0, y = 0\}$. Per un piano di questo tipo si usa la notazione $\pi = U \cup R^*$.*

Teorema 21.6. (Johnson [**86**]).

Siano $\pi_1 = U_1 \cup R_1^*$ e $\pi_2 = U_2 \cup R_2^*$ piani di André sono isomorfi e non Pappiani, construti con il metodo dato in questo Capitolo.

Allora un automorfismo trasforma $U_1 \to R_2^*, R_1^* \to U_2$, oppure $U_1 \to U_2, R_1^* \to R_2^*$.

Corollario 21.7. *Sia π un piano di André su un quasicorpo associativo con fibrazione in PG(3,K)costruito con il metodo dato sopra a partire da un piano Pappiano Σ coordinizzato da un'estensione quadratica F di K. Sia g un elemento dello spazio duale di K^*/S dove S é il sottogruppo di K^* tale che gli elementi non sono quadrati. Siano U la rete sostituita e R^* quella non sostituita tali che $\pi = U \cup R^*$. Allora, esiste un collineazione che scambia U e R^*.*

Per le classi di isomorfismo, si ha:

Teorema 21.8. (Johnson [**86**]).

Le classi di isomorfismo di piani di André su un quasicorpo associativo che possono essere costruite come sopra sono in corrispondenza biunivoca con l'insieme delle orbite dei sottogruppi di indice due di K^*/S del gruppo degli automorfismi di K.

Il gruppo degli automorfismi di K induce un'azione naturale sullo spazio duale di K^*/S riguardato come spazio vettoriale su $GF(2)$ e le orbite di tale gruppo determina le classi di isomorfismo di piani di André su un quasicorpo associativo.

COROLLARIO 21.9. *Assumiamo che il gruppo degli automorfismi di un campo K é banale ed esiste un'estensione quadratica F di K.*

Allora l'insieme delle classi di isomorfismo di piani di André su un quasicorpo associativo che corrispondono ai flock iperbolici e possono essere costruiti da F (cioé, dal piano Pappiano corrispondente) é in corrispondenza biunivoca con lo spazio duale di K^*/S riguardato come spazio vettoriale su $GF(2)$.

Inoltre, teorema, senza l'ipotesi che i quasicorpi siano associativi, si ha:

TEOREMA 21.10. (Johnson [**86**]).

Sia K un corpo che ha estensioni quadratiche F_1 e F_2. Siano π_1 e π_2 piani di André che possono essere costruiti dai piani di Pappo Σ_{F_1} e Σ_{F_2} rispettivamente come sopra. Se π_1 e π_2 sono isomorfi, allora i campi F_1 e F_2 sono isomorfi.

TEOREMA 21.11. (1) Esiste un numero infinito di estensioni quadratiche del campo razionale i cui gruppi di automorfismi sono banali.

(2) Per ogni corpo K in (1), esiste un insieme di primi tali che radici quadrate e quozienti di radici quadrate non sono in K. Allora, esiste un numero infinito di estensioni quadratiche che non sono isomorfe.

(3) Per ogni corpo K in (1) e per ogni estensione in (2), esiste un insieme di piani su quasicorpi associativi tali che l'insieme delle classi di isomorfismo é in corrispondenza biunivoca con lo spazio duale diK^*/S riguardato come spazio vettoriale su GF(2).

Allora ci sono infiniti piani su quasicorpi associativi che non sono isomorfi e quindi ci sono infiniti flock iperbolici che non sono isomorfi che corrispondono ai piani su un quasicorpo associativo.

R.P Burn [**22**] ha dato il primo esempio di piano di Bol che non é un piano su un quasicorpo associativo.

Gli esempi dati di flock iperbolici corrispondono sempre ai piani di Bol.

Ma R. Riesinger [**130**] nel l992 ha trovato un esempio di piano di traslazione che corrisponde ad un flock iperbolico. I flock di Riesinger non corrispondono a piani di Bol.

Teorema 21.12. (Johnson [**86**]).

Esiste un flock iperbolico infinito che non corrisponde ad alcun piano di Bol.