CAPITOLO 18

Rigidità nei flock di un cono

Definizione 18.1. *Un flock di un cono quadratico C in $PG(3,q)$ di vertice v_o é un insieme F di coniche $\{C_1, C_2, \ldots, C_q\}$ dove $C - \{v_o\} = \cup C_i$.*

I flock sono stati molto studiati perché ai flock di un cono quadratico sono legati piani di traslazione con un fibrazione in $PG(3,q)$ che ammettono un gruppo di elazioni E tale che ogni sua orbita di componenti unita con l'asse forma un regolo. Esistono, inoltre, legami con i quadrangoli generalizzati e con i piani proiettivi delle classe II-1 della classificazione di Lenz-Barlotti.

Sia F un flock $\{C_1, C_2, \ldots, C_q\}$ e sia π_i il piano che contiene C_i per $i = 1, 2, \ldots, q$. Recentamente, Thas [**133**] ha determinato i flock F di un cono quadratico in $PG(3,q)$ in cui tutti i piani π_i in $PG(3,q)$ hanno un punto P in comune. Infatti:

Teorema 18.2. (Thas [**133**]).

Sia $F = \{C_1, C_2, \ldots, C_q\}$ un flock di un cono quadratico e π_i il piano che contiene C_i per $i = 1, 2, \ldots, q$ dove $\cap\pi_i$ contiene un punto $\{P\}$.

(1) Se q é pari, allora F é lineare (allora $\cap\pi_i$ é una retta).

(2) (a) Se q é dispari e P é un punto interno, allora F é lineare.

(b) Se P é un punto esterno allora é possibile scegliere le coordinate in modo tale che i punti di $PG(3,q)$ hanno la forma (x_0, x_1, x_2, x_3) con le coordinate omogenee per $x_i \in GF(q)$, $i = 0, 1, 2, 3$, e il cono può essere rappresentato dall'equazione $x_o x_1 = x_2^2$ e i piani π_i possono essere rappresentati con le equazioni $a_i x_o - m a_i^\sigma x_1 + x_3 = 0$ dove $\{a_i | i = 1, 2, \ldots, q\} = GF(q)$, $\sigma \in Aut(GF(q))$, ed m é non quadrato fissato. In questo caso $\cap\pi_i$ contiene il punto $(0, 0, 1, 0)$ e il flock é lineare quando $\sigma = 1$.

Teorema 18.3. (Johnson [**77**]).

Sia π un piano di traslazione di ordine q^2 in $PG(3,q)$ corrispondente ad un flock $F = \{C_i | i = 1,2,\ldots,q\}$ di un cono quadratico. Se π é derivabile– cioé contiene una rete derivabile R, dove R non corrisponde a una conica C_i per $i = 1,2,\ldots,q$ ma R contiene l'asse di un gruppo di elazioni E di π, allora i piani π_i ($C_i \subset \pi_i$) hanno un punto in comune.

Allora, in questo caso, diremo che π é Desarguesiano *o* un piano di Knuth su un semicorpo (corrisponde a un flock lineare o a un flock di Kantor).

Teorema 18.4. (Johnson e Lunardon [**90**]).

Sia F un flock di un cono quadratico in $PG(3,q)$. Sia π_F il piano di traslazione che corrisponde a F e sia O_F l'ovoide in $PG(5,q)$ nella quadrica di Klein Q_5. Se esistono due punti singolari $T \neq S \in Q_5 - O_F$ tali che $T^{\perp} \cap O_F = S^{\perp} \cap O_F$ e $T^{\perp} \cap O_F$ non é una conica allora F é un flock di Kantor.

Questo risultato ha alcune applicazioni e produce a molte fibrazioni parziali che sono massimali. Recentemente, Jha e Johnson hanno studiato la seguente situazione: Sia π un piano di Knuth o equivalentemente F_π il flock di Kantor con piani: $tx_o - mt^{\sigma}x_1 + x_3 = 0$ dove m non é un quadrato in $GF(q)$. Allora, é facile vedere che $(x_o, x_1, x_2, x_3) \to (x_0, x_1, -x_2, x_3)$ é un automorfismo che fissa ogni piano del flock.
Nel caso più generale, ci si é chiesti sotto quali condizioni esiste un automorfismo σ tale che σ fissa ogni piano di un sotto flock. Infatti, é possibile studiare i flock parziali con questa proprietà.

Definizione 18.5. *Sia $P = \{C_1, C_2, \ldots, C_s\}$ un flock parziale di un cono quadratico in $PG(3,q)$. Sia G un gruppo di collineazioni di $PG(3,q)$ che fissa il cono (e il suo vertice). Siano, inoltre, π_i i piani che contengono C_i, $i = 1,2,\ldots,s$. Diremo che G ha rigidità locale su P o G é localmente rigido se e soltanto se G fissa ogni piano π_i, $i = 1,2,..,s$.*
Se é possibile estendere G a un flock F che contiene P, useremo l'espressione G ha s-rigidità.
Quando $s = q$, diremo G ha rigidità o G é rigido.

A volte, é conveniente usare quanto segue:

Se P é un flock parziale con s coniche allora esiste una fibrazione parziale e una rete corrispondente π_P con $\pi_P = \cup R_i$, dove R_i é una rete di un regolo contenente una retta L, per $i = 1, 2, .., s$. Anche C_i in P corresponde a R_i^*, il regolo opposto di R_i (i punti di C_i correspondono ai sottopiani di Baer della fibrazione parziale di R_i).

ESEMPIO 18.6. *(1) Il flock lineare L corrisponde a un piano di traslazione π_F che é Desarguesiano. π_F ammette un gruppo di ordine $q^2 - 1$ che fissa ogni punto all'infinito. Allora, F ammette un gruppo G di ordine $q + 1$ che é rigido.*

(2) Esiste essenzialmente solo uno flock nonlineare che ha almeno $(q-1)/2$ piani che hanno una retta in comune (si veda Payne e Thas [**127**] *). Questo flock é detto flock di Fisher. Il flock di Fisher può essere costruito dal flock lineare ed esiste un sottogruppo G del gruppo di collineazioni dato in (1) e tale che G ha $(q-1)/2$-rigidità e ordine $(q+1)/2$.*

(3) Abbiamo visto che il flock di Kantor ammette un gruppo che é rigido di ordine 2.

Allora, la domanda che ci si pone é:

Qual'é il legame tra flock parziali in cui i piani hanno un punto in comune e gruppi di collineazioni che hanno rigidità locali?

TEOREMA 18.7. **Teorema fondamentale di rigidità (Jha e Johnson [54]).**

Sia P un flock parziale di s coniche in $PG(3, q)$. Sia G un gruppo che ha s-rigidità locale. Se G ha un sottogruppo non-banale lineare (cioé in $PGL(4, q)$) allora, i piani del flock parziale hanno un punto in comune.

Viceversa, se l'intersezione dei piani del flock parziale contiene un punto allora esiste un gruppo lineare non-banale che ha s-rigidità locale.

Diamo una breve dimostrazione di una parte del teorema:
sia G un gruppo che ha s-rigidità locale. Siano i piani $\{\pi_i | i = 1, 2, \ldots, s\}$. Supponiamo che $\pi_1, \ldots, \pi_t$ abbiano una retta L_1 in comune e $\{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_t\}$ é massimale con questa proprietà. Se c'é un altro piano π_{t+1}, sia $L_{t+1} = \pi_{t+1} \cap \pi_1$ e sia $\cap_1^{t+1}\pi_i = \{P_1\}$. Se c'é un'altro piano π_{t+2} che non contiene P_1, sia $P_2 = L_1 \cap (L_{t+2} = \pi_1 \cap \pi_{t+2})$ e $P_3 = (L_{t+1} = (\pi_1 \cap \pi_{t+1})) \cap L_{t+2}$.

Sia v il vertice del cono e consideriamo vP_1 , vP_2. Queste rette sono fissate da G. Allora anche $vP_1 \cap \pi_{t+2} = P_1^*$ e $vP_2 \cap \pi_{t+1} = P_2^*$ sono fissati da G. Se $G \cap (PGL(4, q)) \neq \langle 1 \rangle$, allora esiste un elemento lineare e non banale g che fissa ogni punto del piano $\pi_o = \langle P_1, P_2, P_1^*, P_2^* \rangle$ ma G fissa anche il punto P_3 che non é in π_o. Allora $g = 1$. Assurdo. Allora $\cap_1^s \pi_i$ contiene un punto.

Con riferimento al teorema, per esempio, se $s > 2(q)^{1/2} + 1$, é possibile provare che i piani π_i hanno un punto in comune.

Si ha che:

Teorema 18.8. (Jha-Johnson [**54**]). Se un flock F ammette un gruppo rigido non-banale allora F é lineare o é un flock di Kantor (un flock su un semicorpo di Knuth).

Adesso considereremo gruppi s-rigidi. Si ricordi che un gruppo s-rigido é un gruppo di collineazioni del flock $F = \{C_1, C_2, \ldots, C_q\}$ che fissa s piani dei π_i che contengono C_i per $i = 1, 2, \ldots, q$. Forse, é possibile usare i gruppi s-rigidi per capire quanti piani π_i sono necessari (cioé quanto grande é s) per una classificazione dei flock. Infatti:

Teorema 18.9. (Jha-Johnson [**54**]). Sia F un flock in $PG(3, q)$ che ammette un gruppo s-rigido tale che il gruppo é lineare.

(1) Se q é pari, allora gli s piani che sono fissati da G hanno una retta in comune.

(2) Se q é dispari e gli s piani non hanno una retta in comune, allora i piani hanno solo un punto P in comune.

Se il punto P é esterno al cono allora tutti i piani del flock hanno un punto in comune. Allora F é un flock di Kantor.

Quando l'ordine é grande possiamo avere una classificazione dei flock lineari e dei flock di Fisher.

TEOREMA 18.10. (Jha-Johnson [**54**]). Se esiste un gruppo lineare G s-rigido dove $s \geq 2$ e $|G| = (q+1)/2$ allora F é lineare o il flock di Fisher.

TEOREMA 18.11. Sia F un flock di un cono quadratico in $PG(3,q)$ e G un gruppo s-rigido dove $s \geq (q-1)/2$ e $q \geq 5$.

(1) Se q é pari, allora F é lineare.

(2) Se q é dispari e $|G| > 2$, allora F é lineare.

Quando $s > (q-1)/2$ é possibile avere un legame tra gruppi rigidi locali e gruppi rigidi:

TEOREMA 18.12. (Jha-Johnson [**54**]). Sia F un flock di un cono in $PG(3,q)$ con $s > (q-1)/2$ piani che hanno un punto in comune (allora esiste un gruppo s-rigido locale). Allora esiste un gruppo s-rigido di collineazioni di F.

Nel caso q pari, il seguente risultato migliora quello di Thas.

TEOREMA 18.13. (Jha-Johnson [**54**]). Sia F un flock di un cono quadratico in $PG(3,q)$ dove q é pari. Se esiste un sottoflock di almeno $q/2$ piani che hanno un punto in comune allora F é lineare.