CAPITOLO 14

j-piani e fibrazioni parziali che sono massimali in $PG(3,q)$

Nel Capitolo 13, abbiamo visto che esiste una classe di piani di traslazione di ordine q^2 che ammettono un gruppo di ordine q^2-1 avente un'orbita di componenti di lunghezza q^2-1. Questi piani ammettono anche un gruppo ciclico di omologie di ordine $q+1$. Per Jha-Johnson [**47**], ogni orbita di componenti di questo gruppo forma un regolo nello spazio proiettivo associato. C'é anche un gruppo di omologie di ordine $q-1$ che produce a reti derivabili che hanno due rette in comune. Comunque, questo gruppo non produce mai regoli nel modo descritto nel Capitolo 2.

Definizione 14.1. *Sia $K \cong GF(q)$ e sia x^2+xg-f un polinomio irriducibile su K per $g,f \in K$.*

Allora, $\left\{\begin{bmatrix} u & t \\ tf & u+tg \end{bmatrix} | u,t \in K\right\}$ *é un campo di ordine q^2.*

Sia $\delta_{u,t} = \det \begin{bmatrix} u & t \\ tf & u+tg \end{bmatrix}$.

Sia $G = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_{u,t}^{j-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & t \\ 0 & 0 & tf & u+tg \end{bmatrix} | u,t \in K,\ (u,t) \neq (0,0 \right\rangle$ *dove j é un fissato numero intero. Allora, G é un gruppo ciclico di ordine q^2-1.*

Sia $V = \{(x_1,x_2,y_1,y_2)|x_i,y_i \in K,\ i=1,2\}$, $x=(x_1,x_2)$, $y=(y_1,y_2)$, $O=(0,0)$. Allora, le equazioni $x=0$, $y=0$, $(y=x)g$ con $g \in G$ definisce una fibrazione se e solo se $\delta_{u,t}^{j+1} - \delta_{u,t}^{j}(u+tg)+(i-u) \neq 0$ per ogni $u,t \in K$ con $(u,t) \neq (0,0)$.

Se una fibrazione é definita da f, g e j, il piano di traslazione corrispondente si chiama j-piano.

I piani di Kantor in Capitolo 13 sono j-piani per $j = 1$, i piani di Desargues sono j-piani per $j = 0$. Usando polinomi di permutazione, possiamo costruire alcuni esempi delle classi di j-piani che includono quelli di Kantor per $j = 1$.

Teorema 14.2. (Johnson, Pomareda, Wilke [**97**] (2.2), (2.3), (2.4)).

Sia π un j-piano di ordine q^2 e nucleo contenente $K \cong GF(q)$.

Allora si hanno i seguenti casi:

(i) π ammette un gruppo ciclico di omologie H_y di ordine $q+1$. Le orbite di componenti sotto H_y sono regoli nello spazio proiettivo associato $PG(3, K)$,

(ii) π ammette un gruppo ciclio di omologie H_x di ordine $q-1$. Ogni orbita di componenti puó essere rappresentata nella forma $\{y = x \begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & u^{2j+1} \end{bmatrix} \mid u \in K^*\}$.

(iii) Se $2j+1|q$, allora la rete che é definita dal gruppo H_x in (ii) unione l'asse e il coasse di H_x é una rete derivabile. Inoltre, il piano di traslazione derivato ha ordine q^2 e il suo nucleo é il campo fissato dall' automorfismo $x \to x^{2j+1}$.

Ricordiamo che una fibrazione parziale F in $PG(3, q)$ é massimale se e solo se non c'é una fibrazione parziale F^* in $PG(3, q)$ contenente F, ed $F \neq F^*$.

Teorema 14.3. (Johnson [**73**]).

Ogni j-piano di ordine q^2 definisce una fibrazione parziale massimale in $PG(3, q)$ di grado $q^2 - q + 2$. Questa fibrazione parziale può essere estesa ad un piano affine se e solo se $2j+1|q$.

Queste fibrazioni parziali consistono di due sottopiani della rete in (14.2)(ii) e delle componenti che non sono contenute in tale rete (si veda Jungnickel [**99**]). Per la costruzione di j-piani occorre il seguente:

Teorema 14.4. (Johnson, Pomareda, Wilke [**97**] (3.1)).

Sia $x^2 + xg - f$ un polinomio irriducible su $K \cong GF(q)$.

Sia $\delta_{u,t} = \det \begin{bmatrix} u & t \\ tf & u+tg \end{bmatrix}$.

Allora, esiste un piano associato che é un j-piano se e solo se $\phi_j(u,t) = \delta^j_{u,t}$ tf é un polinomio di permutazione su K per ogni $u \in K$.

Per costruire i piani di Kantor del Capitolo 13, occorrono alcuni risultati di Dickson [**29**].

Teorema 14.5. (Dickson [**29**] p. 63)

(i) Se $d|p^r - 1$ e $\nu \neq d^s$ in $GF(p^n)$, allora $\phi(\alpha) = \alpha(\alpha^d - \nu)^{(p^r-1)/d}$ é un polinomio di permutazione per ogni $r = 0, 1, 2, \ldots, n$.

(ii) Un polinomio di permutazione di grado 3 può essere ridotto ad α^3, quando $p^n = 3^n$ o $3m + 2$, e ad $\alpha^3 = \beta\alpha$, β non quadrato, quando $p^n = 3^n$.

Non é difficile usare la (14.5) per dimostrare che i piani della Capitolo 13 sono 1-piani.

Per esempio, quando $q = 3^r$, possiamo prendere $g = 0$ ed ottenere il polinomio $(u^2 - t^2 f)tf$. Per la (14.5)(ii), se f non é un quadrato, abbiamo ottenuto un 1-piano per ogni elemento f.

Usando (14.5)(i), possiamo provare:

Teorema 14.6. (Johnson, Pomareda, Wilke [**97**] (3.5)).

Sia $q = p^n$, p dispari. Allora, esiste un $(p^t - 1)/2$ - piano di ordine q^2 per ogni numero intero $t = 0, 1, 2,. \ . \ . \ . \ , n$ ottenuto prendendo $(f, g) = (\rho^{2s+1}, 0)$ per ogni ρ in $GF(q)^*$.

Usando questa idea si possono ottenere altri esempi di j-piani. Per esempio ci sono 2-piani di ordine 5^{2n} con $(f, g) = (\rho^{2s+1}, 0)$ e 2-piani di ordine $p^n \equiv \pm 2 \mod 5$ con $(f, g) = (-1/5g^2, g)$.

Teorema 14.7. (Johnson, Pomareda, Wilke [**97**] (4.3)).

Sia π un j-piano di ordine q^2, q dispari e $j \neq 0$. Allora,

(i) ci sono $2^{(q-1)/2} - 1$ fibrazioni parziali massimali in $PG(3, q)$ di grado $q^2 - q + 1$. Una fibrazione parziale di questo tipo può essere estesa a un piano affine se e solo se $2j + 1|q$.

(ii) Se $2j+1|q$ allora ci sono $2^{(q-1)/2} - 1$ piani di traslazione di ordine q^2 il cui nucleo é il campo fissato dall' automorfismo $x \to x^{2j+1}$ in K.

Sia Σ il piano di Desargues di ordine q^2, q dispari. Allora, un piano su un quasicorpo associativo regolare può essere costruito sostituendo $(q-1)/2$ reti di André $N_\delta = \{y = xm|m^{q+1} = \delta : \delta$ non quadrato in $K\}$.

Definizione 14.8. *Sia π un j-piano. Esistono $q - 1$ regoli*

$$R_\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta_{u,t}^j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v & s \\ sf & v + sg \end{bmatrix} |\delta_{v,s} = \delta_{u,t} = \beta \right\}.$$

Un piano di traslazione π si chiama un piano su un pseudo quasicorpo associativo se e solo se π può essere ottenuto da un j-piano di ordine dispari con la sostituzione delle $(q-1)/2$ reti R_β, per ogni β non quadrato.

Teorema 14.9. (Johnson, Pomareda, Wilke [**97**] (4.2)).

Un piano π su un pseudo quasicorpo associativo di ordine q^2 e nucleo $K \cong GF(q)$ ammette gruppi ciclici di omologie di ordine $q-1$ e $q+1$ ed ammette un gruppo di collineazione di ordine $q^2 - 1$.

Se $(f, g) = (f, 0)$ allora, il gruppo é ciclico e il piano é un $((q-1)/2+j)$-piano.

Teorema 14.10. Abbiamo costruito:

(i) 1-piani di ordine 3^{2r} e di ordine p^{2r}, p dispari e $p^r \equiv 2 \bmod 3$,

(ii) 2-piani di ordine 5^{2r} e di ordine p^{2r}, p dispari e $p^r \equiv \pm 2 \bmod 5$,

(iii) $(p^t - 1)/2$- piani di ordine p^{2r}, p dispari, $t = 0, 1, 2, \ldots, r$.

Allora, con (14.9), abbiamo le seguenti classi addizionali:

(i)' $((q-1)/2+1)$ -piani di ordine 3^{2r}, e di ordine p^{2r}, p dispari e $p^r \equiv 2$ mod 3,

(ii)' $(q-1)/2+2)$-piani di ordine 5^{2r} e di ordine p^{2r}, p dispari e $p^r \equiv \pm 2$ mod 5,

(iii)' $((q-1)/2+(p^t-1)/2)$-piani di ordine p^{3r} , p dispari, $t = 0, 1, 2, \ldots, r$.

Molti j-piani sono stati trovati usando il computer (si veda [**97**], Capitolo 5).