CAPITOLO 12

Nidi di regoli

Ricordiamo che **una catena di regoli** in $PG(3,q)$, q dispari, é un insieme C di regoli tali che due regoli distinti hanno due rette in comune e ogni retta contenuta nell'unione di questi regoli giace in esattamente due regoli (si veda Bruen [**21**]).

Sia $C = \{R_i | i = 1, 2, \ldots, t\}$ una catena con t regoli.
Allora, $|\sum R_i| = (q+1) + (q-3) + (q-5) + \cdots + 2 = (q+3)(q+1)/4$.
Quindi, ci sono $(q+3)/2$ regoli nella catena.

Definizione 12.1. *(Baker e Ebert* [**7**], [**8**]*).*

Un t-nido é un insieme di regoli in $PG(3,q)$ tale che ogni retta nell'unione dei regoli é esattamente in due regoli.
La rete corrispondente é di grado $t(q+1)/2$. Una catena é un $(q+3)/2$-nido.

Bruen ha trovato un insieme di regoli nella fibrazione di Desargues in $PG(3,q)$ (cioé, una fibrazione regolare) tale che la rete corrispondente può essere coperta da una rete le cui componenti consistono dei $(q+1)/2$ sottopiani di Baer di ogni rete ottenuta da un regolo nel nido. Allora, ci sono $((q+1)/2)\,t$ nuove componenti che ricoprono il t-nido per $t = (q+3)/2$. Bruen ha costruito un nuovo piano sostituendo una catena nella fibrazione di Desargues con una nuova rete (questo piano ha ordine 25–si veda [**21**]).
Con questo metodo sono stati costruiti molti piani, per esempio: ci sono piani di ordine 11^2 dovuti a Korchmáros e Pellegrino [**108**] e a Capursi [**23**]. Si veda anche Larato e Raguso [**110**], Raguso [**129**]. Sono stati costruiti piani di ordine 49 (Korchmàros [**107**]) e ordine 81 (Abatangelo e Larato [**1**]). Ogni piano di questo tipo ammette reti derivabili e quindi nuovi piani possono essere ottenuti tramite derivazione.

Definizione 12.2. *Sia N una rete corrispondente ad un t-nido. Assumiamo che per ogni regolo del nido ci siano $(q+1)/2$ sottopiani di Baer incidenti* *il vettore nullo tali che la rete corrispondente N^* si puó sostituire a N. In questo caso, si dice che N é un nido-sostituibile.*

Tramite una rete che é nido sostituibile in un piano di traslazione può essere costruito un nuovo piano di traslazione.
Baker e Ebert [**7**], [**8**], e Ebert [**31**] hanno trovato tre famiglie di piani di traslazione di ordine q^2, q dispari, con nucleo $K \cong GF(q)$ costruendo t-nidi che sono nidi-sostituibili per $t = q-1$, q e $q+1$. Il metodo di Baker e Ebert consiste nel trovare un gruppo G di ordine $t(q+1)$ nel piano Desarguesiano π ed un suo opportuno sottopiano di Baer π_o tale che la rete N delle rette di $\pi_o G$ incidenti con zero in π é un nido-sostituibile, usando la rete N^* le cui componenti sono un'orbita di G. Baker e Ebert costruiscono piani di traslazione di ordine q^2 con nucleo $K \cong GF(q)$ trovando un q-nido tale che la rete corrispondente é un nido-sostituible. In questo caso per trovare un nido corrispondente usano un gruppo abeliano G di ordine $q(q+1)$. Originalmente la costruzione di Baker e Ebert era per piani di ordine p^2, p primo. Payne ha esteso questa costruzione trovando anche che tali piani corrispondono a flock conici.

Teorema 12.3. (Baker, Ebert [**7**] per $q = p$, Payne [**123**], [**124**] per $q = p^r$ e (2)).

(1) Esiste una famiglia di piani di traslazione di ordine q^2, $q = p^r$ con p primo, che può essere costruita da un nido-sostituibile di un q-nido nel piano di Desargues.

(2) I piani di (1) corrispondono ai flock conici di Fisher (tipo III-2 in Capitolo 7).

Recentemente, Jha e Johnson hanno studiato piani di traslazione di ordine q^2 e nucleo $K \cong GF(q)$ che ammettono un gruppo lineare di ordine $q(q+1)$ sperando di provare che i piani e i flock conici si corrispondano.

Teorema 12.4. (Jha, Johnson [**53**], Ebert [**30**] per parte di (2)).

Sia π un piano di traslazione di ordine q^2, $q = p^r$ dispari, e nucleo $K \cong GF(q)$. Assumiamo che 4 non divida $q+1$.

(1) Se π ammette un gruppo lineare G nel complemento di traslazione di ordine $q(q+1)$ ed un p-sottogruppo di Sylow E di ordine q che fissa un

sottospazio W con $W \neq Fix(E)$, allora π ammette un gruppo Abeliano nel complemento di traslazione di ordine $q(q+1)$.

(2) Nel caso (1), esiste un piano di Desargues Σ di ordine q^2 tale che π può essere costruito da Σ:

(i) Utilizzando un nido-sostituibile di un q-nido in Σ,

(ii) π é il derivato da un piano costruito da un nido-sostituibile di un q-nido in Σ.

Recentemente, Payne e Thas [**127**] hanno provato

TEOREMA 12.5. (Payne e Thas [**127**]).

Sia un flock conico C di ordine q, $q > 3$ dispari. Se l'insieme dei piani in $PG(3,q)$ che contengono le coniche ammette un sottoinsieme di almeno $(q-1)/2$ piani che contengono una retta, allora C é lineare *o* il flock di Fisher.

COROLLARIO 12.6. *Sia π un piano di traslazione di ordine q^2, q dispari, $q \equiv 1 mod 4$, e nucleo $K \cong GF(q)$. Se π ammette un gruppo lineare di ordine $q(q+1)$ nel complemento delle traslazioni, allora π é equivalente al flock conico di Fisher.*

Dimostrazione: Per (12.4), il piano π o corrisponde ad un flock conico o ammette un gruppo di Baer di ordine q tale che il piano derivato corrisponde ad un flock conico.

Nel piani Desarguesiani da cui il piano π é costruito usando un nido-sostituibile, ci sono q regoli che hanno un retta in comune. I regoli nel q-nido sono $(q+1)/2$. Allora, ci sono $q-(q+1)/2 = (q-1)/2$ regoli nel piano di traslazione π che corrispondono ai regoli nel piano Desarguesiano Σ. Traducendo in flock conici, questo significa che ci sono $(q-1)/2$ piani in $PG(3,q)$ che hanno una retta in comune. Allora, il piano di traslazione deve essere un piano di Fisher. Anche Ebert [**30**] ha dimostrato che c'é solo un piano di traslazione (di Fisher) che può essere costruito dal piano di Desargues con un nido-sostituibile di un q-nido che ammette un gruppo di Abeliano di ordine $q(q+1)$.

Sia Σ un piano di Desargues di ordine q^2 e sia N una rete derivabile in Σ. Allora, esiste un'involuzione σ che fissa ogni punto di un sottopiano di Baer in N. Poiché Σ ammette anche un gruppo di omologia di ordine $q^2 - 1$, c'é un gruppo diedrale D di ordine $2(q+1)$ nel piano derivato Σ di Hall e per q pari, le cui involuzioni diventano elazioni. Anche il gruppo di elazione E di ordine q in Σ che fissa N diventa un gruppo di Baer in Σ. Allora, i piani di Hall di ordine q^2 pari ammettono un gruppo di Baer di ordine q e almeno $q+1$ elazioni non-triviali. Recentemente, Johnson ha dimostrato che anche i piani derivati di Fisher di ordine q^2 con $q \equiv 3 \bmod 4$ ammettono gruppi di questo tipo.

Teorema 12.7. (Johnson [**66**] per (i), Johnson [**72**] per (ii)).

Sia π un piano di traslazione di ordine q^2 tale che il complemento alle traslazioni ammette un sottogruppo di Baer di ordine q ed almeno $q + 1$ elazioni non-triviali.

(i) Se q é pari, allora π é un piano di Hall.

(ii) Se q é dispari, $q > 29$, e il nucleo é isomorfo a $GF(q)$, allora π é un piano di Hall o un piano derivato di Fisher.

Sarebbe interessante provare (12.7)(ii) senza l'ipotesi che il nucleo sia isomorfo a $GF(q)$.

é stato evidenziato che i piani di traslazione corrispondenti ai flock iperbolici ammettono un gruppo di omologia di ordine $q - 1$. I piani di traslazione di Baker e Ebert che sono costruiti da un $(q-1)$-nido in un piano Desarguesiano ammettono un gruppo di omologia di ordine $(q - 1)/2$ per q dispari. Anche questo gruppo determina metá di un regolo. Quindi, questi piani sono legati ai flock iperbolici. Recentemente, Johnson studiato piani di traslazione che possono essere costruiti da piani Desarguesiani con un nido-sostituibile di un $(q - 1)$-nido.

Teorema 12.8. (Johnson [**70**]).

Sia π un piano di traslazione di ordine q^2 e nucleo contenente $K \cong GF(q)$. Se π ammette un gruppo ciclico di ordine $q^2 - 1$ nel complemento lineare di traslazione e questo gruppo ha un'orbita di componenti di lunghezza $(q-1)$ allora π é uno dei seguenti piani:

(i) Desarguesiano,

(ii) piano di Hall (il piano derivato dal piano di Desargues),

(iii) piano di traslazione su un quasicorpo associativo regolare,

(iv) piano derivato dal piano su un quasicorpo associativo regolare,

(v) piano di traslazione che può essere costruito da un nido-sostituibile di un $(q-1)$-nido in un piano di Desargues,

(vi) piano derivato da un piano costruito nel caso (v).

Inoltre, se il piano ha ordine pari, il piano é Desarguesiano o un piano di Hall.

Nel caso (v), il piano ammette un gruppo di omologie di ordine $(q-1)/2$.

Nel caso (iv), il piano ammette un gruppo di Baer di ordine $(q-1)/2$.

I piani di André di ordine q^2 e nucleo $K \cong GF(q)$ ammettono gruppi ciclici di omologia G_i di ordine $q+i$, $i = 1, 2$ tale che l'asse di G_i é il co-asse di G_j per $i \neq j$.

Ebert ha costruito una famiglia di piani di traslazione usando un nido-sostituibile di un $(q+1)$-nido in un piano di Desargues. Questi piani di ordine q^2 ammettono gruppi di omologia del tipo citato sopra.
Inoltre, i piani sui nearfields irregolari di ordine 5^2 e 7^2 ed i piani di Rao-Rodabaugh-Wilke-Zemmer costruiti da questi piani ammettono gruppi di omologie di ordine 6 e 8 rispettivamente.

Consideriamo il seguente problema:

Determinare i piani di traslazione di ordine q^n e nucleo contenente $K \cong GF(q)$ che ammettono due gruppi ciclici di omologia di ordine $(q^n-1)/(q-1)$.

Nel caso per $n = 2$, abbiamo:

Teorema 12.9. (Johnson, Pomareda [**96**]).

Sia π un piano di traslazione di ordine q^2 e nucleo contenente $K \cong GF(q)$ che ammette un gruppo G nel complemento di traslazione tale che sia il prodotto diretto di due gruppi ciclici di omologia di ordine $q+1$ con assi affini. Allora, si ha una delle seguenti situazioni:

(1) π é un piano di André,

(2) q é dispari ed é costruito da un piano di Desargues Σ con un nido-sostituibile di un $(q+1)$-nido,

(3) q é dispari ed é costruito da un piano di Desargues Σ combinando un nido-sostituibile di un $(q+1)$-nido con la sostituzione delle reti di André in Σ.

Corollario 12.10. *I piani sui quasicorpi associativi irregolari di ordine* 5^2, 7^2 *possono essere costruiti con un nido-sostituibile di un 6-(8-)nido nel piano di Desargues di ordine* $5^2, 7^2$, *rispettivamente. Anche i piani di Rao-Rodabaugh-Wilke-Zemmer di ordine* 5^2 *e* 7^2 *sono derivati da piani su quasicorpi associativi irregolari.*

Pabst e Sherk [**121**] hanno costruito una famiglia di piani di traslazione di ordine q^2 le cui fibrazioni contengono un insieme di $(q-1)$ regoli. Con il risultato (12.10), non é difficile provare che questi piani e quelli di Ebert sono gli stessi. Nel caso di ordine q^n, $n > 2$, e nucleo contenente $K \cong GF(q)$ la situazione é piu regolare.

Teorema 12.11. (Johnson, Pomareda [**96**]).

Sia π un piano di traslazione di ordine q^n e nucleo contenente $K \cong GF(q)$. Assumiamo che π ammetta un gruppo G nel complemento di traslazione che é il prodotto diretto di due gruppi ciclici di omologia di ordine $(q^n - 1)/(q-1)$. Se $n > 2$, allora π é un piano di André.