CAPITOLO 7

Scheletri di flock parziali di coni

In [**6**], Bader, Lunardon e Thas costruiscono da un flock conico in $PG(3,q)$, q dispari, altri q flock conici che si sono imparentati. Consideriamo questa costruzione per flock conici parziali.

Definizione 7.1. *Sia $\Sigma \cong PG(4,q)$, q dispari, e sia Q_4 una quadrica in Σ. Un insieme $\{p_o, p_1, ...p_k\}$, $q \geq k \geq 1$, di $k+1$ punti in Q_4 si chiama un BLT-insieme parziale di grado $k+1$ se e solo se per tre punti p_i, p_j, p_k, $i \neq j, i \neq k$, $j \neq k$, non esiste un punto $\alpha \in Q_4$ tale che α è perpendicolare a p_i, p_j, p_k o equivalentemente per $H_s = p_s^\perp$, $s = 1, 2, \ldots, k$, la retta $H_i \cap H_j \cap H_k$ è esterna a Q_4.*

Teorema 7.2. (Bader, Lunardon, Thas [**6**]; si veda Johnson [**76**] per BLT-insieme parziale).

(1) BLT-insiemi parziali di grado $k+1$ in $PG(4,q)$, q dispari, sono equivalenti a flock conici parziali con k coniche.

(2) Ogni flock conico con k coniche produce ad altri k flock conici con k coniche.

Dimostrazione: (1) $\rightarrow$ (2). Sia $S = \{p_o, p_1, \ldots, p_k\}$ un BLT-insieme parziale in $\Sigma \cong PG(4,q)$. Allora $p_i^\perp$ è isomorfo a $PG(3,q)$ e $p_i^\perp \cap Q_4$ è un cono quadratico con vertice p_i. Inoltre, $p_o^\perp \cap p_i^\perp = \pi_i$, $i = 1, 2, \ldots, t$, é un piano in Σ tale che $\pi_i \cap p_j = p_o^\perp \cap p_i^\perp \cap p_j^\perp$, con $i \neq j$, è una retta esterna a $p_o^\perp \cap Q_4$; cioè, $\{p_o^\perp \cap p_i^\perp \cap Q_4 | i = 1, 2, \ldots, k\}$ è un flock conico parziale in $p_o^\perp$ con cono quadratico $p_o^\perp \cap Q_4$ di vertice p_o.
Analogamente, $\{p_z^\perp \cap p_i^\perp \cap Q_4 | i = 0, 1, 2, \ldots, k \ , \ i \neq z\}$ è un flock conico parziale in $p_z^\perp$.

(1) $\leftarrow$ (2). Usiamo il risultato della Capitolo 2 che afferma che un flock parziale conico è equivalente a una fibrazione conica parziale che si puó

rappresentare come

$$x = 0, \qquad y = x \begin{bmatrix} u + g(t) & f(t) \\ t & u \end{bmatrix}$$

con $u \in K \cong GF(q)$, $t \in \lambda \subset K$, $|\lambda| = k$, e $g, f : \lambda \to K$ (si veda [**76**]).

Sia $M_t = \begin{bmatrix} g(t)/2 & f(t) \\ t & -g(t)/2 \end{bmatrix}$. Per ogni $s \in \lambda$, sia $(P^k)^{-s} = \{x = 0, y = x(M_t - M_s)^{-1} + uI_2 | t \in \lambda\}$ Allora, $(P^k)^{-s}$ è una fibrazione conica parziale di grado $1 + gk$ se e solo se P^k è una fibrazione conica parziale (per esempio, si veda [**73**] (2.7), (2.8), (2.9)).

$(P^k)^{-s}$ si chiama fibrazione parziale che è s-invertita da P^k.
Non é difficile dimostrare questo risultato se si tiene conto del fatto che $(P^k)^{-s}$ è una fibrazione parziale se e solo se la differenza delle due matrici é non singolare o zero. Queste fibrazioni parziali corrispondono a quelle che possono essere costruite usando i BLT-insiemi parziali che corrispondono a P^k. Per applicare (7.2), bisogna ricordare che un piano di traslazione di ordine q^2 con nucleo $K \cong GF(q)$ che ammette un gruppo di Baer di ordine q è equivalente a un flock conico parziale privo di una sola conica.

Corollario 7.3. *Per ogni piano di traslazone di ordine q^2 con nucleo $K \simeq GF(q)$ che ammette un gruppo di Baer di ordine q, ci sono $q - 1$ altri piani di traslazione di ordine q^2 che ammettono un gruppo di Baer di ordine q.*

Recentemente, Payne e Thas [**127**] hanno dimostrato il seguente teorema:

Teorema 7.4. (Payne e Thas [**127**]).

Un flock conico parziale F privo di una sola conica può essere esteso a un flock conico.

Un breve cenno della dimostrazione per q dispari:

Sia $S = \{p_o, p_1, \ldots, p_{q-1}\}$ il BLT-insieme parziale che corrisponde a F. Sia T_i l'insieme di tutti punti di Q_4 che non sono in $p_i^\perp \cap Q_4$ per ogni $i = 0, 1, \ldots, q - 1$.
Sia $V = \cup T_i$ e sia L una retta di Q_4 tale che $|L \cap V| = q$. Allora in [**127**], é

dimostrato che $V \cup \{L-V\}$ è un cono e $(V \cup \{L-V\} \cap p_o^{\perp} \cap Q_4$ è una conica in $p_o^{\perp}$; cioè esiste un flock conico in $p_o^{\perp}$ che estende F. Quindi, abbiamo il seguente corollario:

COROLLARIO 7.5. *Sia π un piano di traslazione di ordine q^2 con nucleo $K \cong GF(q)$ che ammette un gruppo di Baer B di ordine q. Allora, la rete di grado $q+1$ che contiene $Fix(B)$ corrisponde ad un regolo in $PG(3,K)$. Il piano derivato corrisponde ad una fibrazione conica.*

DEFINIZIONE 7.6. *Sia P^k una fibrazione parziale conica. Lo scheletro di P^k é l'insieme $S(P^k) = \{(P^k)^{-s} | s \in \lambda\}$ con $\lambda \subset K \cong GF(q)$, $|\lambda| = k$ e dove $(P^k)^{-s}$ é s-invertita da P^k.*

Diremo che due fibrazioni parziali P_1, P_2 sono isomorfe quando esiste un elemento σ di $\Gamma L(4,q)$ tale che $P_1\sigma = P_2$. Parleremo di scheletro $S(\pi)$ di un piano di traslazione quando considereremo una fibrazione conica.

É importante sapere quando due piani dallo stesso scheletro $S(\pi)$ sono isomorfi. Le s-inversioni non aiutano a risolvere il suddetto problema. Allora dobbiamo trovare altri metodi per studiare gli scheletri.

Ci sono sette classi dei flock conici di ordine dispari:

Consideriamo un cono quadratico $x_o x_1 = x_2^2$ con flock $(t, -f(t), g(t))$ (si veda Gevaert, Johnson [**33**] pp. 312-313, table I).

Tipi di flock

I.1 $(t, t^3/3, -t^2)$, $q \equiv -1 \bmod 3$;

I.2 $(t, t^3/3 - ft^5 - k^{-1}t, -t^2)$**,** $q = 5^r$**,** k **non è un quadrato**;

II.1 $(t, tc, -tb)$**,** $x^2 + bx + c$ **è irriducibile su** $GF(q)$;

II.2 $(t, -mt^{\sigma}, 0)$**,** q **dispari,** m **non è un quadrato,** $\sigma \in AutGF(q)$;

II.3 $(t, -n_1t^9 - n_1n_2^2t, -at^3)$**,** $q = 3^r$**,** $a^2 = n_1n_2$**,**n_1, n_2 **non sono quadrati**;

III-1 $(t, \gamma t^5, -\beta t^3)$**,** $q = p^r$**,** r **dispari**, $p \equiv \pm 2 \bmod 5$, $\beta^2 = 5\gamma$;

III-2 $(-t, -\alpha t, 0)$**,** $(-a_{2j}, \alpha a_{2j}, 2b_{2j})$, $t^2 - 4/N(1+z)$ **è un quadrato in** $GF(q)$,$-\alpha$ **è un quadrato.**;

Sia $\langle z \rangle = (F(i))^*$, $i^2 = -\alpha$**, e sia**

$$a_k = \frac{(z^{k+1} - z^{-(k+1)} - (z^k - z^{-k})}{(z - z^{-1})},$$

$$b_k = \frac{i(z^{k+1} + z^{-(k+1)} - (z^k + z^{-k}))}{(z - z^{-1})},$$

con a_k, b_k **in** F**,** $0 \leq k \leq (q-1)/2$**, e dove** $N(1+z)$ **é la norma di** $1+z$.

Per le relazioni tra questi tipi di flock, i piani di traslazione e i quadrangoli generalizzati si veda [**33**] pp. 314-315.

Un flock di tipo I si chiama un **flock likeable** e un flock di tipo II si chiama un **flock di semicorpi** perche i piani di traslazione sono rispettivamente likeable o su semicorpi. Gli scheletri $S(\pi)$ dei corrispondenti piani sono detti rispettivamente **scheletri likeable** o **scheletri di semicorpi**.

Usando i BLT-insiemi, si può dimostrare che:

Nota 7.7. *Sia π un piano di traslazione di ordine q^2, q dispari, corrispondente ad una fibrazione conica e sia $S(\pi)$ lo scheletro di π.*

(1) Se $\rho \in S(\pi)$, allora $S(\rho) = S(\pi)$. Se $f \in \Gamma L(4,q)$ e α, β sono piani di $S(\pi)$ tale che $\alpha f = \beta$, allora f fissa $S(\pi)$.

(2) Se π ammette un gruppo di collineazioni che opera transitivemente sui regoli (che corrispondono alle coniche dei flock), allora tutti i piani di $S(\pi) - \{\pi\}$ sono isomorfi. Se tutti i piani negli scheletri di π sono isomorfi, esiste un gruppo che opera 2-transitivemente sugli scheletri di π.

Teorema 7.8. (per (i) si veda Gevaert, Johnson, Thas [**34**], per (ii) si veda Biliotti, Jha, Johnson, Menichetti [**12**]).

Sia π un piano di traslazione di ordine q^2 con nucleo contenente $K \cong GF(q)$ e corrispondente ad una fibrazione conica.

(i) Se π non è un piano Desarguesiano, allora il gruppo delle collineazioni di π permuta i regoli che corrispondono alle coniche del flock conico. Questi regoli sono detti regoli di base.

(ii) Per q dispari, se π ammette un gruppo di collineazione che opera transitivemente sui regoli di base, allora π è likeable piano su un semicorpo. oppure é piano su un semicorpo.

In (7.7)(2), è possibile usare la classificazione dei gruppi semplici per trovare le classi di piani di traslazione likeable o su semicorpi tali che piani aventi lo stesso scheletro sono isomorfi. Esprimeremo questo teorema usando i flock. Un flock conico che ammette un sottogruppo di $PGL(4, q)$ che opera transitivemente sulle coniche del flock è detto **flock conico transitivo.**

TEOREMA 7.9. (per (i) si veda Johnson [**76**], per (ii) si veda Johnson, Lunardon, Wilke [**91**]).

Sia F un flock conico transitivo in $PG(3, q)$, q dispari, allora

(i) F è un flock likeable di tipo (I-1)

(ii) F è un flock semicorpo di tipo (II-2).

COROLLARIO 7.10. (Bader, Lunardon, Thas [**6**]; Payne, Thas [**127**]).

Ci sono flock conici che possono essere costruiti dai flock di tipi I-2 e II-3.

TEOREMA 7.11. (Johnson (6.4),(6.5),(6.6) [**76**]) .

Sia F un flock conico di tipo III-1 in $PGL(3, q)$ dove $(q + 1)/2 \neq m^s$, con m primo. Allora, ci sono flock conici nello scheletro di F.

In [**76**] (6.4), é dato un teorema piú generale.