CAPITOLO 6

Flock parziali di coni, quadrangoli generalizzati e piani di Baer-elazioni

Di recente Thas [**133**] ha osservato che ad ogni flock conico in $PG(3,q)$ resta associato un quadrangolo generalizzato di tipo (q^2,q).

Teorema 6.1. Sia $\Sigma \cong PG(3,q)$ rappresentato con le coordinate omogenee (x_o,x_1,x_2,x_3). Ogni cono quadratico C può essere rappresentato con l'equazione $x_0x_1 = x_2^2$ dove $(0,0,0,1)$ è il vertice. C si puó costruire usando la conica $x_ox_1 = x_2^2$ nel piano $x_3 = 0$ e il punto $(0,0,0,1)$ in Σ.

Teorema 6.2. (Thas [**133**]).

Rappresentiamo il cono C come in (6.1). Sia $a_ix_0+b_ix_1+c_ix_2 = 0$, $a_i,b_i,c_i \in GF(q)$, l'equazione generale di un piano π_i non contenente $(0,0,0,1)$. Usiamo (a_i,b_i,c_i) per denotare π_i. La retta $\pi_i \cap \pi_j$, per $i \neq j$, soddisfa l'equazione $(a_i - a_j)x_0 + (b_i - b_j)x_1 + (c_i - c_j)x_2 = 0$.

Sia ρ_{ij} il piano rappresentato da questa equazione. Allora:

(1) Se q é dispari, ρ_{ij} non ha rette aventi un punto in comune con il cono se e solo se $(c_i - c_j)^2 - 4(a_i - a_j)(b_i - b_j)$ non è un quadrato per ogni $i \neq j$. Questa condizione implica che si puó costruire un flock conico.

(2) Se q é pari, ρ_{ij} non ha rette aventi un punto in comune con il cono se e solo se $((a_i + a_j)(b_i + b_j))(c_i + c_j)^{-2} = m_{ij}$, $x^2 + x + m_{ij}$ è irreducibile per ogni $i \neq j$. Questa condizione implica che si puó costruire un flock conico.

Useremo la notazione (a_i,b_i,c_i) per il flock. Se poniamo $t = a_i \in GF(q)$, allora per un flock conico useremo la notazione $(t,F(t),G(t))$, dove le funzioni F, $G : GF(q) \to GF(q)$ sono tale che $b_i = F(t)$ e $c_i = G(t)$.

Ricordiamo che:

Definizione 6.3. *Un quadrangolo generalizzato di tipo (s,t) è una struttura formata da punti e le rette tali che:*

(1) ogni punto è incidente con $t+1$ rette, $t \geq 1$; presi i punti P, Q, $P \neq Q$ esiste al piú una retta che li incide emtrambi.

(2) Ogni retta è incidente con $s+1$ punti, $s \geq 1$; due rette distinte L ed M si incidono in al piú un punto.

(3) Per ogni punto P e per ogni retta L, con P ed L non incidenti esiste un unico punto Q ed un'unica retta M tali che Q incide L, e P e Q incidono M.

Quindi ci sono $(st+1)(s+1)$ punti e $(st+1)(t+1)$ rette.

Sia $G = \{(\alpha, c, \beta) : \alpha, \beta \in GF(q) \times GF(q), c \in GF(q^2)\}$. Sia $u \cdot v$ il prodotto puntuale ordinario. Definiamo

$$(\alpha, c, \beta) \cdot (\alpha^*, c^*, \beta^*) = (\alpha + \alpha^*, c + c^* + \beta \cdot \alpha^*, \beta + \beta^*).$$

Allora, G è un gruppo di ordine q^5.

Consideriamo il sottogruppo $A(\infty) = \{(0,0,\beta) : \beta \in GF(q) \times GF(q)\}$ di G di ordine q^2.

Sia $A_t = \begin{bmatrix} x_t & y_t \\ 0 & z_t \end{bmatrix}$ tale che $x_t, y_t, z_t \in GF(q)$ per ogni $t \in GF(q)$.

Prendiamo $A(t) = \{(\alpha, \alpha A_t \alpha^T, \alpha(A_t + A_t^T)) : \alpha \in GF(q) \times GF(q)\}$ dove M^T è la trasposta della matrice M. Anche $A(t)$ è un sottogruppo di G di ordine q^2.

Sia $C = \{(0, c, 0) : c \in GF(q)\}$ e sia $A^*(t) = A(t)C$ un sottogruppo di G di ordine q^3 con $t \in GF(q) \cup \{(\infty)\}$.

Sia $J^* = \{A^*(t) : t \in GF(q) \cup \{(\infty)\}\}$, $J = \{A(t) : t \in GF(q) \cup \{(\infty)\}$ e si consideri la seguente struttura:

Punti:

(i) gli elementi di G (q^5 elementi),

(ii) gli insiemi $A^*(t)g$, $g \in G$ e $A^*(t) \in J^*$ ($q^2(q+1)$ elementi),

(iii) il simbolo (∞).

Rette:

(i) gli insiemi $A(t)g$, $g \in G$ e $A(t) \in J$ ($q^3(q+1)$ elementi),

(ii) i simboli $[A(t)]$, $A(t) \in J$ ($q+1$ elementi).

Diremo che un punto h di tipo (i) è incidente con una retta $A(t)h$ con $t \in GF(q) \cup \{(\infty)\}$ ($q+1$ rette) e un punto $A^*(t)h$ di tipo (ii) è incidente con $A(t)g$ se e solo se $A(t)g \subset A^*(t)h$. Per esempio, $A(t)g \subset A^*(t)$ per ogni $g \in A^*(t)$. Anche, $A^*(t)h$ è incidente con $[A(t)]$ ($A^*(t)$ è incidente con $q+1$ rette) , e finalmente, il punto (∞) è incidente con ogni retta $[A(t)]$ con $t \in GF(q) \cup \{(\infty)\}$ ($q+1$ rette).

Quindi ci sono $q^5 + q^3 + q^2 + 1 = (q^2q+1)(q^2+1)$ punti, $q^4 + q^3 + q + 1 = (q^2q+1)(q+1)$ rette e ogni punto è incidente con $q+1$ rette e ogni retta è incidente con q^2+1 punti.

TEOREMA 6.4. (Kantor [**102**], [**103**], Payne [**124**]).

Un quadrangolo generalizzato di tipo (q^2, q) può essere ottenuto dalle matrici

$A_t = \begin{bmatrix} x_t & y_t \\ 0 & z_t \end{bmatrix}$ con $t \in GF(q)$ se e solo se

(1) q è dispari e $(y_t - y_s)^2 - 4(x_t - x_s)(z_t - z_s)$ non è un quadrato per ogni t, s, $t \neq s$ in $GF(q)$,

(2) q é pari e per $m_{st} = ((x_t + x_s)(z_t + z_s))(y_t + y_s)^{-1}$, $x^2 + x + m_{ts}$ è irreducibile per ogni t, s, $t \neq s$ in $GF(q)$.

In questo caso, useremo la notazione t per x_t, $F(t)$ per z_t e $G(t)$ per y_t con $t \in GF(q)$, dove F e G sono funzioni su $GF(q)$.

Quindi per la (6.3), (6.4) e per i risultati della Capitolo 2, c'é una corrispondenza tra flock conici, quadrangoli generalizzati, e fibrazioni coniche.

Sia π un piano di traslazione di ordine q^2 il cui nucleo contiene $K \cong GF(q)$. Supponiamo che π ammetta un gruppo di elazioni di ordine q tale che un'orbita di componenti definisca una rete derivabile. Allora, una fibrazione di π può essere scelta della forma:

$$x = O, \qquad y = x \begin{bmatrix} u + g(t) & f(t) \\ t & u \end{bmatrix}$$

con $t, h \in GF(q)$, $\sigma \in \mathrm{Aut}\, K$, e con f, g funzioni su K. Se $\sigma = 1$, otteniamo una fibrazione conica (Capitolo 2)
Questo piano esiste se

$$\left(\begin{bmatrix} u + g(t) & f(t) \\ t & u \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} w + g(s) & f(s) \\ s & w \end{bmatrix} \right)$$

é non-singolare oppure zero.
Equivalentemente, $x^2 + (g(t) - g(s))x - (t - s)(f(t) - f(s)) \neq 0$ per ogni t, s $t \neq s$ in K.
È facile vedere che questa condizione è equivalente a quella data nel (6.2) o (6.4). Quindi, con $g(t) = G(t)$ e $f(t) = -F(t)$, possiamo passare da una struttura all'altra.

Teorema 6.5. Le seguenti strutture geometriche sono equivalenti:

(1) flock conici: $x_o x_1 = x_2^2, (t, -f(t), g(t))$,

(2) quadrangoli generalizzati di tipo (q^2, q) costruiti con il metodo di Kantor $\begin{bmatrix} t & g(t) \\ 0 & -f(t) \end{bmatrix}$,

(3) fibrazioni coniche $x = O$, $y = x \begin{bmatrix} u + g(t) & f(t) \\ t & u \end{bmatrix}$, con $u, t \in K \cong GF(q)$, $f, g : K \to K$.

Dunque, abbiamo una corrispondenza algebrica tra flock conici, quadrangoli generalizzati, e fibrazioni coniche. Inoltre c'é la costruzine di Thas-Walker che usa la corrispondenza di Klein tra flock conici e fibrazione coniche. In (2.4), abbiamo visto che questi due costruzioni danno gli stessi risultati. Abbiamo visto che con un piano di ordine q^2 con nucleo $K \cong GF(q)$ e che ammette un gruppo di Baer di ordine q, c'è un flock parziale conico privo di una conica. Payne e Thas, usando argomentazioni geometriche, hanno provato:

TEOREMA 6.6. (Payne e Thas [**127**]).

Ogni flock parziale conico in $PG(3, q)$, con q pari, privo di una conica può essere esteso ad un flock conico.

Dalla (3.5) e dalla(3.8) si ha:

TEOREMA 6.7. (Johnson [**83**]).

Ogni piano di Baer-elazioni di tipo $(q, 2)$ è isomorfo al piano di Hall.