CAPITOLO 5

Operatori ellittici in domini limitati

Concludiamo il nostro studio estendendo quanto finora provato ad operatori ellittici in domini regolari Ω di $\mathbb{R}^N$.

Richiamiamo la definizione di domini regolari di $\mathbb{R}^N$ ed alcuni risultati utili in seguito riguardanti densità di spazi di funzioni regolari in spazi di Sobolev $W^{2,p}(\Omega)$ e operatori di estensione.

DEFINIZIONE 5.1. *Diciamo che un aperto Ω di $\mathbb{R}^N$ è di classe C^k, con $k \in \mathbb{N}$, se per ogni $x \in \partial\Omega$ esistono U intorno di x in $\mathbb{R}^N$ e $H : \overline{B(0,R)} \to \overline{U}$ diffeomorfismo di classe C^k, tali che*

$$\begin{aligned} &U \cap \Omega = H(B^+(0,R)) = H(\{x \in B(0,R) : x_N > 0\}) \quad e \\ &U \cap \partial\Omega = H(B(0,R) \cap \{x_N = 0\}). \end{aligned}$$

La coppia (U, H) è detta carta locale su Ω.

OSSERVAZIONE 5.2. Componendo eventualmente con un'omotetia, si può sempre prendere $R = 1$ nella definizione precedente.

I seguenti risultati sono ben noti, vedi [**1**, Teoremi III.3.16, IV.4.26].

TEOREMA 5.3. *Siano $1 \le p < \infty$ e Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$ di classe C^k. Allora $C^\infty(\overline{\Omega})$ è denso in $W^{k,p}(\Omega)$.*

TEOREMA 5.4. *Siano $1 \le p < \infty$ e Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$ limitato di classe C^k. Allora esiste un operatore lineare e limitato E da $W^{k,p}(\Omega)$ in $W^{k,p}(\mathbb{R}^N)$ tale che $Eu = u$ in Ω ed esiste una costante $K = K(k, p, \Omega)$ tale che*

$$\|Eu\|_{i,p,\mathbb{R}^N} \le K\|u\|_{i,p,\mathbb{R}^N} \tag{5.1}$$

per ogni $i = 0, 1, ..., k$.

Nel seguito Ω sarà sempre un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$ di classe C^2.
Le seguenti disuguaglianze interpolative sono simili a quelle viste per $\mathbb{R}^N$ e $\mathbb{R}^N_+$.

PROPOSIZIONE 5.5. *Sia $1 \le p < \infty$. Allora esiste $C = C(p,\Omega) > 0$ tale che*
$$\|\nabla u\|_p \le \varepsilon \|u\|_{2,p} + \frac{C}{\varepsilon}\|u\|_p$$
per ogni $u \in W^{2,p}(\Omega)$ e per ogni $\varepsilon > 0$.

DIM. Consideriamo l'operatore di estensione E come nel Teorema 5.4. Per la Proposizione 2.15 esiste $C = C(p) > 0$ tale che
$$\|\nabla Eu\|_{p,\mathbb{R}^N} \le \eta \|D^2 Eu\|_{p,\mathbb{R}^N} + \frac{C}{\eta}\|Eu\|_{p,\mathbb{R}^N}$$
per ogni $\eta > 0$. Allora
$$\|\nabla u\|_{p,\Omega} \le \|\nabla Eu\|_{p,\mathbb{R}^N} \le \eta K \|u\|_{2,p,\Omega} + K\frac{C}{\eta}\|u\|_{p,\Omega}$$
per ogni $\eta > 0$. In particolare prendendo prima $\eta = \frac{\varepsilon}{K}$ e ridefinendo poi opportunamente la costante C si ha la tesi. □

COROLLARIO 5.6. *Sia $1 \le p < \infty$. Allora esiste $C = C(p,\Omega) > 0$ tale che*
$$\|\nabla u\|_p \le \varepsilon \|D^2 u\|_p + \frac{C}{\varepsilon}\|u\|_p$$
per ogni $u \in W^{2,p}(\Omega)$ e per ogni $\varepsilon \le \frac{1}{2}$.

DIM. Per la Proposizione 5.5, esiste $C = C(p,\Omega) > 0$ tale che
$$\|\nabla u\|_p \le \varepsilon[\|u\|_p + \|\nabla u\|_p + \|D^2 u\|_p] + \frac{C}{\varepsilon}\|u\|_p$$
per ogni $\varepsilon > 0$. Da qui otteniamo
$$(1-\varepsilon)\|\nabla u\|_p \le \varepsilon \|D^2 u\|_p + (\varepsilon + \frac{C}{\varepsilon})\|u\|_p.$$
Infine, se $\varepsilon \le \frac{1}{2}$,
$$\|\nabla u\|_p \le 2\varepsilon \|D^2 u\|_p + 2(\varepsilon + \frac{C}{\varepsilon})\|u\|_p.$$
□

Fatte queste premesse, consideriamo come sempre l'operatore uniformemente ellittico
$$A = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} D_{ij} + \sum_{i=1}^{N} b_i D_i + c$$
avente i coefficienti $a_{ij} \in BUC(\Omega)$ e $b_i, c \in L^\infty(\Omega)$. Sia $M > 0$ tale che
$$\|a_{ij}\|_\infty, \|b_i\|_\infty, \|c\|_\infty \le M$$
e siano $\nu > 0$ la costante di ellitticità e ω il modulo di continuità della matrice (a_{ij}). Vogliamo provare stime L^p in Ω e poi esistenza e unicità per il

problema di Dirichlet. L'ipotesi di regolarità sul dominio suggerisce di ricondursi, mediante carte locali, a palle di $\mathbb{R}^N$ o semipalle e applicare a questo punto i risultati dei capitoli precedenti. E' opportuno perciò soffermarsi brevemente sulle trasformazioni associate alle carte locali ed esaminare il nuovo operatore differenziale ottenuto in seguito a tali trasformazioni.
Siano Ω e Λ aperti limitati di $\mathbb{R}^N$ e sia $H : \overline{\Lambda} \to \overline{\Omega}$ un diffeomorfismo di classe C^2 con inverso $J : \overline{\Omega} \to \overline{\Lambda}$.

Data $u \in W^{2,p}(\Omega)$, definiamo

$$v(y) = u(H(y)), \qquad y \in \Lambda.$$

Allora $v \in W^{2,p}(\Lambda)$ e, se u si annulla su $\partial\Omega$, v si annulla su $\partial\Lambda$. Dunque è ben definita la seguente applicazione

$$T : W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{2,p}(\Lambda) \cap W_0^{1,p}(\Lambda), \qquad u \mapsto Tu = u \circ H = v. \tag{5.2}$$

Si può facilmente verificare che T è lineare, limitata e invertibile con inversa data da

$$T^{-1} : W^{2,p}(\Lambda) \cap W_0^{1,p}(\Lambda) \to W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega), \qquad v \mapsto T^{-1}v = v \circ J = u.$$

Consideriamo l'operatore

$$Au(x) = \sum_{i,j} a_{ij}(x) D_{x_i x_j} u(x) + \sum_i b_i(x) D_{x_i} u(x) + c(x)u(x)$$

definito in Ω. Se $u(x) = v(Jx)$, si ottiene facendo un calcolo esplicito e ponendo $y = Jx$

$$Au(x) = \tilde{A}v(y) = \sum_{h,k} \alpha_{hk}(y) D_{y_h y_k} v(y) + \sum_k \beta_k D_{y_k} v(y) + \gamma(y)v(y) \tag{5.3}$$

dove

$$\alpha_{hk}(y) = \textstyle\sum_{i,j} a_{ij}(H(y)) D_{x_j} J_h(H(y)) D_{x_i} J_k(H(y)),$$
$$\beta_k(y) = \textstyle\sum_{i,j} a_{ij}(H(y)) D_{x_i x_j} J_k(H(y)) + \sum_i b_i(H(y)) D_{x_i} J_k(H(y)),$$
$$\gamma(y) = c(H(y)).$$

Le ipotesi relative al cambio di variabile assicurano che

$$\alpha_{hk} \in BUC(\Lambda),\ \beta_k,\ \gamma \in L^\infty(\Lambda).$$

Inoltre

$$\tilde{M} \le c_1(J)M \qquad \tilde{\omega} = \tilde{\omega}(\omega, J, M) \qquad \tilde{\nu} \ge c_2(J)\,\nu$$

dove $c_1(J)$ e $c_2(J)$ dipendono solo dal cambio di variabile fissato (e quindi dall'aperto) e non dall'operatore A. Osserviamo infine che con la notazione introdotta si ha

$$Au(x) = \tilde{A}v(Jx)$$

cioè

$$Au = T^{-1}\tilde{A}Tu.$$

TEOREMA 5.7 (Stime L^p in Ω). *Sia* $1 < p < \infty$. *Esiste* $C = C(N, p, \nu, M, \omega, \Omega)$ *costante positiva tale che per ogni* $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ *risulti*

$$\|u\|_{2,p} \le C(N, p, \nu, M, \omega, \Omega)\ [\|Au\|_p + \|u\|_p].$$

Per dimostrare questo teorema faremo ricorso al seguente lemma di partizione dell'unità.

LEMMA 5.8 (Partizione dell'unità). *Siano* K *un compatto di* $\mathbb{R}^N$, $\{U_1, \dots, U_k\}$ *un suo ricoprimento aperto. Allora esistono* $\eta_1, \dots, \eta_k \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ *che soddisfano le seguenti proprietà:*

- $0 \le \eta_i \le 1\ \forall\ i = 1, \dots, k$
- $\sum_{i=1}^k \eta_i = 1$
- *supp* η_i *compatto*
- *supp* $\eta_i \subset U_i\ \forall\ i = 1, \dots, k$.

DIM. Sia $\{V_i\}_{\{i=1,\dots,k\}}$ una famiglia di insiemi aperti tali che $V_i \subset\subset U_i$ e $K \subset \cup_{i=1}^k V_i$. Vediamo in che modo può essere scelta una tale famiglia. Dato $x \in U_i$, sia r_x tale che $B(x, 2r_x) \subset U_i$. Per ipotesi K è compatto e, poiché $K \subset \cup_{x\in K} B(x, r_x)$, esiste un sottoricoprimento finito

$$K \subset \cup_{j=1}^n B(x_j, r_{x_j}).$$

Poniamo $V_i = \cup_{x_j \in U_i} B(x_j, r_{x_j})$. Allora V_i soddisfa le proprietà richieste. Sia ora $\{W_i\}_{\{i=1,\dots,k\}}$ un'altra famiglia di insiemi compatti tale che

$$\overline{V_i} \subset \overset{\circ}{W_i} \subset W_i \subset U_i$$

e, in corrispondenza di questa, poniamo $\psi_i = \chi_{W_i}$. Sia $\varepsilon > 0$ tale che $\varepsilon < \min\{dist(V_i, \partial W_i), dist(W_i, \partial U_i)\}$ e sia $\rho_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^N}\rho(\frac{x}{\varepsilon})$ con $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, $0 \le \rho \le 1$, *supp* $\rho \subset B(0,1)$ e $\int_{\mathbb{R}^N} \rho = 1$. Poniamo $\varphi_i = \rho_\varepsilon * \psi_i$. Risulta

$$\begin{aligned} supp\ \varphi_i &\subset \overline{supp\ \rho_\varepsilon + supp\ \psi_i} = \overline{B(0,\varepsilon)} + W_i \\ &= \{x \in \mathbb{R}^N : dist(x, W_i) < \varepsilon\} \subset U_i. \end{aligned}$$

Inoltre

$$\varphi_i(x) = \int_{B(0,\varepsilon)} \psi_i(x-y)\rho_\varepsilon(y)dy = 1$$

se $x \in V_i$ in virtù della scelta di ε. Pertanto $\varphi_i \in C_c^\infty(U_i)$ e $\varphi_i(x) = 1$ se $x \in V_i$. Poniamo infine

$$\eta_1 = \varphi_1,\ \eta_i = (1-\varphi_1)(1-\varphi_2)\dots(1-\varphi_{i-1})\varphi_i\ \forall\ i > 1.$$

Allora $\eta_i \in C_c^\infty(U_i)$ e per induzione si prova che

$$\sum_{i=1}^{k} \eta_i = 1 - (1-\varphi_1)(1-\varphi_2)....(1-\varphi_k).$$

Se $x \in K \subset \cup_{i=1}^k V_i$, $\exists\, \bar{i}$ tale che $x \in V_{\bar{i}}$ e $\varphi_{\bar{i}}(x) = 1$, quindi $\sum_i \eta_i(x) = 1$. $\square$

DIM. (Teorema 5.7) Denotiamo con $B(0,1)$ la palla unitaria di $\mathbb{R}^N$. Per la regolarità di Ω, per ogni $x \in \partial\Omega$ esiste una carta locale (U_x, H_x) con

$$\begin{aligned} &H_x : \overline{B(0,1)} \to \overline{U}_x \text{ diffeomorfismo di classe } C^2, \\ &H_x(B^+(0,1)) = U_x \cap \Omega, \\ &H_x(B(0,1) \cap \{x_N = 0\}) = U_x \cap \partial\Omega. \end{aligned}$$

Inoltre, essendo Ω aperto, per ogni $x \in \Omega$ esiste $B(x, R_x) \subset \Omega$. Risulta così

$$\overline{\Omega} \subseteq (\cup_{x\in\Omega} B(x, R_x)) \cup (\cup_{x\in\partial\Omega} U_x).$$

Siccome $\overline{\Omega}$ è compatto esistono $n_1,\ n_2 \in \mathbb{N}$ tali che

$$\overline{\Omega} \subseteq (\cup_{i=1}^{n_1} B(x_i, R_i)) \cup \left(\cup_{j=1}^{n_2} U_j\right)$$

dove $R_i = R_{x_i}$, $U_j = U_{x_j}$. Posto $n := n_1 + n_2$, consideriamo la partizione dell'unità $\{\eta_i\}_{i=1,\dots,n}$ relativa al ricoprimento suddetto con $\eta_i \in C_c^\infty(B(x_i, R_i))$ se $i \le n_1$, $\eta_i \in C_0^\infty(U_i)$ se $i = n_1+1, ..., n$ e $\sum_{i=1}^n \eta_i = 1$ in Ω. Possiamo scrivere la funzione $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ (prolungata a 0 fuori di Ω) come $\sum_{i=1}^n \eta_i u$. Trattiamo separatamente le funzioni $\eta_i u$ nei casi $i \le n_1$ e $n_1 < i \le n$.

a) $i \le n_1$. Risulta *supp* $\eta_i u \subseteq B(x_i, R_i)$ e $\eta_i u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$. Per poter applicare le stime L^p note in tutto lo spazio, dobbiamo estendere i coefficienti dell'operatore ellittico A dalla palla a tutto $\mathbb{R}^N$ in modo che conservino le proprietà di continuità e limitatezza e in modo che il nuovo operatore sia ancora uniformemente ellittico. Definiamo estensioni radiali per i coefficienti a_{ij} ponendo

$$\tilde{a}_{ij}(x) = \begin{cases} a_{ij}(x) & \text{se } |x - x_i| \le R_i \\ a_{ij}\left(R_i \frac{x - x_i}{|x - x_i|}\right) & \text{se } |x - x_i| > R_i. \end{cases} \tag{5.4}$$

Estendiamo invece banalmente a 0 i coefficienti b_i e c fuori di $B(x_i, R_i)$. Evidentemente la costante di ellitticità, la costante M e il modulo di continuità rimangono invariati. E' ora lecito applicare il Teorema 3.4 da cui otteniamo

$$\begin{aligned} \|\eta_i u\|_{2,p} &= \|\eta_i u\|_{2,p,\mathbb{R}^N} \le c(N,p,\nu,M,\omega)\,[\|\eta_i u\|_{p,\mathbb{R}^N} + \|A(\eta_i u)\|_{p,\mathbb{R}^N}] \\ &\le c(N,p,\nu,M,\omega)\,[\|u\|_{p,\Omega} + \|\eta_i A u\|_{p,\mathbb{R}^N} + K(\eta_i, M)\|u\|_{1,p,\Omega}] \\ &\le C(N,p,\nu,M,\omega,\Omega)\,[\|Au\|_{p,\Omega} + \|u\|_{1,p,\Omega}]. \end{aligned}$$

b) $n_1 \leq i \leq n$. Poniamo

$$v_i(y) := (\eta_i u)(H_i y).$$

Osserviamo che $v_i \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N_+) \cap W^{1,p}_0(\mathbb{R}^N_+)$ e $supp\, v_i \subseteq B^+(0,1)$. Consideriamo l'operatore $\widetilde{A}$ definito in (5.3) ed estendiamo i suoi coefficienti al semispazio adottando una tecnica analoga a quella vista in (5.4). Applicando il Teorema 4.7 otteniamo

$$\|v_i\|_{2,p,\mathbb{R}^N_+} \leq C(N,p,\nu,M,\omega)\ [\|v_i\|_{p,\mathbb{R}^N_+} + \|\widetilde{A}v_i\|_{p,\mathbb{R}^N_+}]$$

e quindi

$$\begin{aligned}\|\eta_i u\|_{2,p} &\leq c(N,p,\nu,M,\omega)\ [\|\eta u\|_{p,\mathbb{R}^N_+} + \|A(\eta_i u)\|_{p,\mathbb{R}^N_+}] \\ &\leq C(N,p,\nu,M,\omega,\Omega)\ [\|Au\|_p + \|u\|_{1,p}].\end{aligned}$$

Sommando sull'indice $i = 1, ..., n$, abbiamo

$$\|u\|_{2,p} \leq \sum_{i=1}^{n} \|\eta_i u\|_{2,p} \leq C(N,p,\nu,M,\omega,\Omega)\ [\|Au\|_p + \|u\|_{1,p}].$$

Infine, dalla disuguaglianza interpolativa della Proposizione 5.5 otteniamo

$$\|u\|_{2,p} \leq C(N,p,\nu,M,\omega,\Omega)\ [\|Au\|_p + \varepsilon\|u\|_{2,p} + \left(1 + \frac{\widetilde{C}}{\varepsilon}\right)\|u\|_p]$$

per ogni $\varepsilon > 0$ e qualche $\widetilde{C} = \widetilde{C}(p,\Omega,) > 0$. Scegliendo ε tale che $C(N,p,\nu,M,\omega,\Omega)\varepsilon \leq \frac{1}{2}$ abbiamo la tesi. □

Anche in un dominio Ω regolare, possiamo provare la stima ottenuta nel Teorema 3.5.

TEOREMA 5.9. *Sia* $1 < p < \infty$. *Esistono* λ_0, $C > 0$ *dipendenti da* N,p,ν,ω,M,Ω *tali che* $\forall\ u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W^{1,p}_0(\Omega)$ *e* $\forall\ \lambda \geq \lambda_0$ *risulta*

$$\lambda\|u\|_p + \lambda^{\frac{1}{2}}\|\nabla u\|_p + \|D^2 u\|_p \leq C(N,p,\nu,M,\omega,\Omega)\ \|(\lambda - A)u\|_p.$$

DIM. La dimostrazione è sostanzialmente analoga a quella fatta in $\mathbb{R}^N$ o $\mathbb{R}^N_+$. Definiamo un nuovo operatore ellittico

$$A_1 := A + D_{tt}$$

in $\Omega \times \mathbb{R}$. Consideriamo la funzione $v(t,x) := \eta(t)e^{irt}u(x)$ con $\eta \in C^\infty_c(\mathbb{R})$, $\eta \equiv 1$ in $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ e $supp\,\eta \subseteq [-1,1]$. Sia Ω_1 un aperto limitato di classe C^2 contenente $\Omega \times [-1,1]$ e tale che $v \in W^{2,p}(\Omega_1) \cap W^{1,p}_0(\Omega_1)$ per ogni v come sopra. Applichiamo le stime L^p in Ω_1 del Teorema 5.7 alla funzione v e all'operatore A_1. Procediamo poi come nella dimostrazione del Teorema 3.5. □

TEOREMA 5.10. *Siano* $1 < p < \infty$, $f \in L^p(\Omega)$. *Allora esiste* $\lambda_0 = \lambda_0(N, p, \nu, M, \omega, \Omega) > 0$ *tale che* $\forall \lambda \geq \lambda_0$ *l'equazione*

$$\lambda u - Au = f$$

ammette un'unica soluzione $u \in W^{2,p}(\Omega)$. *Inoltre esiste* $= C(N, p, \nu, M, \omega, \Omega) > 0$ *tale che* $\forall \lambda \geq \lambda_0$

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \frac{C}{\lambda}; \tag{5.5}$$

$$\|\nabla(\lambda - A)^{-1}\| \leq \frac{C}{\sqrt{\lambda}}; \tag{5.6}$$

$$\|D^2(\lambda - A)^{-1}\| \leq C \tag{5.7}$$

(le norme sono quelle operatoriali in $L^p(\Omega)$*).*

DIM. Una volta provata l'invertibilità di $\lambda - A$, (5.5), (5.6) e (5.7) seguono dal Teorema 5.9. Anche l'unicità segue dal teorema. Infatti la stima

$$\lambda \|u\|_p \leq C \|(\lambda - A)u\|_p$$

prova l'iniettività di $\lambda - A$. Proviamo la suriettività.
Sia $f \in L^p(\Omega)$. Per ogni $x \in \partial\Omega$ esiste una carta locale (U_x, H_x) dove

$$H_x : \overline{B}_1 \to \overline{U}_x \text{ diffeomorfismo di classe } C^2, \quad H_x(B^+(0,1)) = U_x \cap \Omega,$$
$$H_x(B(0,1) \cap \{x_N = 0\}) = U_x \cap \partial\Omega.$$

Poiché Ω è aperto, per ogni $x \in \Omega$ esiste $B(x, R_x) \subset \Omega$. Allora

$$\overline{\Omega} \subseteq (\cup_{x \in \Omega} B(x, R_x)) \cup (\cup_{x \in \partial\Omega} U_x).$$

Per compattezza possiamo estrarre un sottoricoprimento finito

$$\overline{\Omega} \subseteq (\cup_{i=1}^{n_1} B(x_i, R_i)) \cup \left(\cup_{j=1}^{n_2} U_j\right).$$

Posto $n := n_1 + n_2$, consideriamo la partizione dell'unità $\{\eta_i^2\}_{i=1,\ldots,n}$ relativa al ricoprimento di cui sopra e scriviamo una funzione $f \in L^p(\Omega)$ (prolungata a 0 fuori di Ω) come $\sum_{i=1}^n \eta_i^2 f$. Distinguiamo i casi $1 \leq i \leq n_1$ e $n_1 < i \leq n$. Supponiamo dapprima $1 \leq i \leq n_1$. Le funzioni $\eta_i f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e $supp\, \eta_i f \subseteq B(x_i, R_i)$. Estendiamo i coefficienti a_{ij} radialmente in tutto $\mathbb{R}^N$ come in (5.4) e poniamo i coefficienti b_k e c nulli fuori dalla palla. Per il Teorema 3.7, esiste $\lambda_i = \lambda_i(N, p, \nu, M, \omega) > 0$ tale che per ogni $\lambda \geq \lambda_i$ l'operatore $\lambda - A$ è invertibile da $W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$ in $L^p(\mathbb{R}^N)$. Poniamo pertanto

$$R_i(\lambda)(f) := \eta_i(\lambda - A)^{-1}(\eta_i f).$$

Risulta $supp\, R_i(\lambda) f \subseteq B(x_i, R_i)$, $R_i(\lambda) f \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ e

$$\begin{aligned}
(\lambda - A) R_i(\lambda) f &= (\lambda - A)\eta_i(\lambda - A)^{-1}(\eta_i f) \\
&= \eta_i(\lambda - A)(\lambda - A)^{-1}(\eta_i f) \\
&\quad + ((\lambda - A)\eta_i - \eta_i(\lambda - A))(\lambda - A)^{-1}(\eta_i f) \\
&= \eta_i^2 f + [\lambda - A, \eta_i](\lambda - A)^{-1}(\eta_i f)
\end{aligned}$$

dove $[X,Y] = XY - YX$ denota il commutatore di due operatori X e Y e denotiamo per semplicità con η_i l'operatore di moltiplicazione per η_i. Ponendo

$$S_i(\lambda) := [\lambda - A, \eta_i](\lambda - A)^{-1}\eta_i$$

possiamo scrivere

$$(\lambda - A)R_i(\lambda)f = \eta_i^2 f + S_i(\lambda)f.$$

E' facile verificare che per ogni $g \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$

$$\begin{aligned}
&[\lambda - A, \eta_i]g = -[A, \eta_i]g \\
= \quad & -2\sum_{h,k=1}^{N} a_{hk}(D_h\eta_i D_k g + gD_{hk}\eta_i) + \sum_{h=1}^{N} b_h g D_h \eta_k
\end{aligned}$$

da cui, posto $B_i = [\lambda - A, \eta_i]$, si ottiene

$$\|B_i g\|_p \le C_i(M, \eta_i)\|g\|_{1,p}.$$

Applicando quanto prima ricavato e le stime (3.7) e (3.8) del Teorema 3.7 abbiamo

$$\begin{aligned}
\|S_i(\lambda)f\|_p &= \|B_i(\lambda - A)^{-1}(\eta_i f)\|_p \\
&\le C_i\|(\lambda - A)^{-1}(\eta_i f)\|_{1,p} \le C_i\frac{C}{\sqrt{\lambda}}\|\eta_i f\|_p
\end{aligned}$$

dove $C = C(N, p, \nu, M, \omega)$ e $\lambda \ge \lambda_i$. Abbiamo così provato

$$\|S_i(\lambda)\| \le \frac{C_i(N, p, \nu, M, \omega, \Omega)}{\sqrt{\lambda}}$$

con C_i opportunamente ridefinita e $\lambda \ge \lambda_i$.
Supponiamo adesso $n_1 < i \le n$. Poniamo

$$v_i(y) = (\eta_i f)(H_i(y)) = T_i(\eta_i f)(y)$$

dove $H_i = H_{x_i}$ e T_i è definito come in (5.2). Osserviamo che $v \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N_+) \cap W^{1,p}_0(\mathbb{R}^N_+)$. Indichiamo con $\tilde{A}$ l'operatore ottenuto effettuando il cambiamento di variabili definito in (5.3), ricordiamo che $\tilde{A} = T_i^{-1}AT_i$ ed estendiamo i coefficienti di $\widetilde{A}$ a tutto il semispazio. Per il Teorema 4.9, esiste $\lambda_i = \lambda_i(N, p, \nu, M, \omega)$ tale che $\forall\ \lambda \ge \lambda_i$ l'operatore $\lambda - \widetilde{A} : W^{2,p}(\mathbb{R}^N_+) \cap W^{1,p}_0(\mathbb{R}^N_+) \to L^p(\mathbb{R}^N_+)$ è invertibile. Ha senso quindi considerare $(\lambda - \widetilde{A})^{-1}T_i(\eta_i f)$ per ogni $\lambda \ge \lambda_i$. Poniamo

$$R_i(\lambda)f := T_i^{-1}\left(T_i(\eta_i)(\lambda - \tilde{A})^{-1}T_i(\eta_i f)\right).$$

Risulta $R_i(\lambda)f \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ e

$$\begin{aligned}(\lambda - A)R_i(\lambda)f &= T_i^{-1}(\lambda - \tilde{A})T_iT_i^{-1}\Big(T_i(\eta_i)(\lambda - \tilde{A})^{-1}T_i(\eta_i f)\Big) \\ &= T_i^{-1}\left(T_i(\eta_i)T_i(\eta_i f)\right) \\ &\quad +T_i^{-1}\Big([\lambda - \tilde{A}, T_i(\eta_i)](\lambda - \tilde{A})^{-1}\left(T_i(\eta_i f)\right)\Big) \\ &= \eta_i^2 f + S_i(\lambda)f\end{aligned}$$

dove abbiamo posto

$$S_i(\lambda)f := T_i^{-1}\Big([\lambda - \tilde{A}, T_i(\eta_i)](\lambda - \tilde{A})^{-1}\left(T_i(\eta_i f)\right)\Big).$$

Anche qui, siccome S_i è un operatore differenziale del primo ordine, applicando le stime del Teorema 4.9, otteniamo

$$\|S_i(\lambda)f\|_p \le \frac{C_i(N,p,M,\omega,\Omega)}{\sqrt{\lambda}}\|f\|_p$$

per qualche $C_i > 0$ e per ogni $\lambda \ge \lambda_i$. A questo punto, posto $R(\lambda)f = \sum_{i=1}^n R_i(\lambda)f$ e $S(\lambda)f = \sum_{i=1}^n S_i(\lambda)f$, risulta

$$R(\lambda)f \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)), \quad S(\lambda)f \in L^p(\Omega)$$

e

$$(\lambda - A)R(\lambda)f = \sum_{i=1}^n \eta_i^2 f + S(\lambda)f = f + S(\lambda)f$$

Posto $\overline{\lambda} = \max\{\lambda_i : i = 1, ..., n\}$, risulta

$$\|S(\lambda)f\|_p \le \frac{C}{\sqrt{\lambda}}\|f\|_p$$

con $C > 0$ opportuna e per ogni $\lambda \ge \overline{\lambda}$. Scegliamo $\lambda_0 \ge \overline{\lambda}$ tale che $\|S(\lambda)\| \le \frac{1}{2}$ per ogni $\lambda \ge \lambda_0$. Questo assicura che l'operatore $I + S(\lambda)$ è invertibile in $L^p(\Omega)$ con inverso $V(\lambda) : L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$. Pertanto segue

$$(\lambda - A)R(\lambda)V(\lambda) = (I + S(\lambda))V(\lambda) = I$$

da cui

$$(\lambda - A)R(\lambda)V(\lambda)f = f.$$

La funzione $u := R(\lambda)V(\lambda)f \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ è la soluzione cercata. □

Vediamo alcune conseguenze del teorema appena provato.
Indichiamo con A_p e A_q gli operatori ellittici definiti negli spazi $W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ e $W^{2,q}(\Omega) \cap W_0^{1,q}(\Omega)$ e a valori in $L^p(\Omega)$, $L^q(\Omega)$, rispettivamente.

Corollario 5.11. *Siano* $1 < p \ne q < \infty$ *e* $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$. *Se* u, $Au \in L^q(\Omega)$, *allora* $u \in W^{2,q}(\Omega) \cap W_0^{1,q}(\Omega)$.

DIM. Supponiamo $p < q$ e scegliamo $\lambda \geq \max\{\lambda_{0,p}, \lambda_{0,q}\}$ con $\lambda_{0,p}$, $\lambda_{0,q}$ come nel Teorema 5.10. Posta $f = \lambda u - Au \in L^q(\Omega)$, per il Teorema 5.10 applicato all'operatore A_q, esiste $v \in W^{2,q}(\Omega) \cap W_0^{1,q}(\Omega)$ tale che $\lambda v - Av = f$. Poniamo $w := u - v$; siccome Ω è limitato risulta $w \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ e $\lambda w - Aw = 0$. Pertanto $w = 0$ cioè $u = v$ e quindi $u \in W^{2,q}(\Omega) \cap W_0^{1,q}(\Omega)$. □

TEOREMA 5.12. *Siano $1 < p \neq q < \infty$. Allora $\sigma(A_p) = \sigma(A_q)$ e per ogni $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ e $\lambda \in \rho(A)$ risulta*

$$(\lambda - A_p)^{-1} f = (\lambda - A_q)^{-1} f.$$

DIM. Supponiamo $p < q$. Per il Teorema 5.10, A_p ha risolvente non vuoto. Siccome $W^{2,p}(\Omega)$ è immerso con compattezza in $L^p(\Omega)$, l'operatore risolvente è compatto e il suo spettro è costituito solo da autovalori. Ovviamente lo stesso discorso vale per lo spettro di A_q. Proviamo che $\sigma(A_q) = \sigma(A_p)$. Sia $\lambda \in \sigma(A_q)$. Allora esiste $0 \neq u \in W^{2,q}(\Omega) \cap W_0^{1,q}(\Omega)$ tale che $\lambda u - Au = 0$. Ma $p < q$, quindi $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ e risolve la stessa equazione, così $\lambda \in \sigma(A_p)$.
Sia ora $\lambda \in \sigma(A_p)$, allora esiste $0 \neq u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ tale che $\lambda u - Au = 0$. Supponiamo $p \geq \frac{N}{2}$, allora $u \in L^r(\Omega)$ per ogni $r < \infty$, in particolare $u \in L^q(\Omega)$ e $Au \in L^q(\Omega)$, essendo $\lambda u = Au$. Per il Corollario 5.11, $u \in W^{2,q}(\Omega) \cap W_0^{1,q}(\Omega)$ e quindi $\lambda \in \sigma(A_q)$. Supponiamo adesso $p < \frac{N}{2}$ e sia p_1 tale che $\frac{1}{p_1} = \frac{1}{p} - \frac{2}{N}$. Allora $u \in L^{p_1}(\Omega)$, $Au \in L^{p_1}(\Omega)$ e per il Corollario 5.11 $u \in W^{2,p_1}(\Omega) \cap W_0^{1,p_1}(\Omega)$. Se $p_1 \geq q$, abbiamo subito la tesi, altrimenti ripetiamo lo stesso ragionamento un numero finito di volte.
Proviamo la seconda parte. Siano $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ e $\lambda \in \rho(A_p) = \rho(A_q)$. Essendo $p < q$,

$$(\lambda - A_q)^{-1} f = u \in W^{2,q}(\Omega) \cap W_0^{1,q}(\Omega) \subset W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$$

e quindi

$$(\lambda - A_p)^{-1} f = (\lambda - A_q)^{-1} f.$$

□

OSSERVAZIONE 5.13. Se l'operatore è dato in forma divergenza, si possono ottenere gli stessi risultati provati in tutto lo spazio. In particolare, si può determinare un valore $\lambda_p = \sup_{x \in \Omega} \left[-\frac{\operatorname{div} b(x)}{p} + c(x) \right]$ tale che, per ogni $\lambda > \lambda_p$, $\lambda - A$ è invertibile.

Consideriamo infine l'operatore ellittico

$$A = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} D_{ij} + \sum_{i=1}^{N} b_i D_i + c$$

avente coefficienti α-hölderiani in Ω con $0 < \alpha \leq 1$ e proviamo che $\lambda_p = 0$ in questo caso. Il risultato è vero con la sola uniforme contiunuità dei coefficienti ma non verrà provato in quest'ultimo caso. Enunciamo un classico teorema di esistenza e unicità in tali spazi.
Diremo che un aperto Ω è di classe $C^{2,\alpha}$ se è come nella Definizione 5.1 con H_x di classe $C^{2,\alpha}$.

TEOREMA 5.14. *Sia Ω un aperto limitato con bordo di classe $C^{2,\alpha}$. Supponiamo $c \leq 0$ in Ω. Allora per ogni $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$, $\forall\ \lambda \geq 0$, esiste un'unica $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ tale che $\lambda u - Au = f$ e $u_{|\partial\Omega} = 0$.*

(per esempio vedi [**3**, Teorema 6.14] o [**5**, Teorema 5.6.4].

COROLLARIO 5.15. *Sia $1 < p < \infty$. Se $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$, u, $Au \in C^\alpha(\Omega)$ e $c \leq 0$ allora $u \in C_0^{2,\alpha}(\Omega) = \{u \in C^{2\alpha}(\Omega) : u_{|\partial\Omega} = 0\}$.*

DIM. Sia $\lambda > \lambda_p$. Per ipotesi, $\lambda u - Au = f \in C^\alpha(\Omega)$. Per il Teorema 5.14, esiste $v \in C_0^{2,\alpha}$ tale che $\lambda v - Av = f$. Allora $w := u - v \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ e $\lambda w - Aw = 0$. Per il Teorema 5.10, $w = 0$ e quindi $u = v \in C_0^{2,\alpha}(\Omega)$. □

TEOREMA 5.16. *Siano $1 < p < \infty$, $c \leq 0$ in Ω. Se $f \in L^p(\Omega)$, esiste un'unica $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ tale che $Au = f$.*

DIM. Dobbiamo provare che $0 \notin \sigma(A)$. Per il Teorema 5.12, lo spettro di A_p non dipende da p. Possiamo pertanto supporre, senza perdere di generalità, $p > \frac{N}{2}$. Sia $0 \neq u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ tale che $Au = 0$. Per i Teoremi di immersione di Sobolev, $u \in C^\alpha(\Omega)$ con $\alpha = 1 - \frac{N}{2p}$, allora u, $Au \in C^\alpha(\Omega)$ e, per il Corollario 5.15, $u \in C_0^{2,\alpha}(\Omega)$. Per il Teorema 5.14, u deve necessariamente essere identicamente nulla. Questo vuol dire che 0 non è un autovalore di A_p, ossia $0 \in \rho(A_p)$. □