CAPITOLO 4

Operatori ellittici in $\mathbb{R}^N_+$

Premettiamo alcune notazioni.

$$\mathbb{R}^N_+ = \{x = (x', x_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^N : x_N > 0\};$$

$$\partial\mathbb{R}^N_+ = \{x \in \mathbb{R}^N : x_N = 0\} \equiv \mathbb{R}^{N-1}.$$

Consideriamo l'operatore ellittico

$$Au = \sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_{ij} + \sum_{i=1}^N b_i D_i + c$$

dove $a_{ij} = a_{ji} \in BUC(\mathbb{R}^N_+)$, $b_{ij} \in L^\infty(\mathbb{R}^N_+)$ per $i, j = 1, ..., N$, $c \in L^\infty(\mathbb{R}^N_+)$. Inoltre i coefficienti a_{ij} soddisfano la condizione di ellitticità

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \nu|\xi|^2$$

e la stima

$$\left|\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\right| \leq \Lambda|\xi|^2$$

per ogni $\xi \in \mathbb{R}^N_+$, $x \in \mathbb{R}^N$, dove

$$\nu = \inf_{x\in\mathbb{R}^N_+} \{\text{minimo autovalore di } a_{ij}(x)\};$$

$$\Lambda = \sup_{x\in\mathbb{R}^N} \{\text{massimo autovalore di } a_{ij}(x)\}.$$

Poniamo

$$M := \max\{\|a_{ij}\|_\infty, \|b_i\|_\infty, \|c\|_\infty\};$$

$$\omega(r) := \max_{i,j} \sup_{|x-y|<r} |a_{ij}(x) - a_{ij}(y)|.$$

In questa sezione ripercorreremo le varie tappe dello studio di operatori ellittici nell'intero spazio. Inizieremo col provare esistenza e unicità della soluzione del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \lambda u - \Delta u = f(x', x_N) & \text{in } \mathbb{R}^N_+ \\ u = 0 & \text{su } \partial\mathbb{R}^N_+. \end{cases}$$

Proveremo poi stime L^p per operatori a coefficienti variabili. Servendoci del metodo di continuità, dedurremo che il problema di Dirichlet è ben posto.

In modo analogo al caso dell'intero spazio, si provano il lemma e la proposizione seguenti.

LEMMA 4.1. *Se $1 < p < \infty$ e $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N_+) \cap W^{1,p}_0(\mathbb{R}^N_+)$, allora*

$$\int_{\mathbb{R}^N_+} \Delta u\, u|u|^{p-2} \le 0\,.$$

PROPOSIZIONE 4.2. *Sia $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N_+)$ con $1 \le p < \infty$, allora per ogni $\varepsilon > 0$*

$$\|\nabla u\|_p \le c\varepsilon \|D^2 u\|_p + \frac{c}{\varepsilon}\|u\|_p$$

per una qualche costante $c = c(p) > 0$. Inoltre, minimizzando su ε, si ha

$$\|\nabla u\|_p \le 2c\|D^2 u\|_p^{\frac{1}{2}}\|u\|_p^{\frac{1}{2}}.$$

TEOREMA 4.3. *Siano $1 < p < \infty$ e $\lambda > 0$; allora per ogni $f \in L^p(\mathbb{R}^N_+)$ esiste un'unica $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N_+) \cap W^{1,p}_0(\mathbb{R}^N_+)$ tale che*

$$\lambda u - \Delta u = f.$$

Inoltre esiste $C = C(N,p) > 0$ tale che

$$\lambda\|u\|_p \le \|f\|_p. \tag{4.1}$$

$$\lambda^{\frac{1}{2}}\|\nabla u\|_p \le C(N,p)\|f\|_p. \tag{4.2}$$

$$\|D^2 u\|_p \le C(N,p)\|f\|_p. \tag{4.3}$$

La dimostrazione poggia sul seguente lemma.

LEMMA 4.4. *Sia $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ con $1 \le p < \infty$, tale che $u(x', -x_N) = -u(x', x_N)$. Allora $u_{|\mathbb{R}^N_+} \in W^{1,p}_0(\mathbb{R}^N_+)$.*

DIM. Regolarizziamo la funzione u prendendo come funzioni approssimanti $u_\varepsilon = u * \phi_\varepsilon$ dove ϕ è un mollificatore pari nella variabile x_N. Allora $u_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^N) \cap W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e $u_\varepsilon \to u$ in $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Risulta inoltre

$$u_\varepsilon(x', -x_N) = -u_\varepsilon(x', x_N)$$

da cui segue

$$u_\varepsilon(x', 0) = 0$$

e quindi $u_\varepsilon \in W^{1,p}_0(\mathbb{R}^N_+)$. In quanto limite di funzioni in $W^{1,p}_0(\mathbb{R}^N_+)$ anche u appartiene allo stesso spazio. $\square$

DIM.(Teorema 4.3)
"Unicità + stima (4.1)": Siano $f \in L^p(\mathbb{R}^N_+)$ ed $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N_+) \cap W^{1,p}_0(\mathbb{R}^N_+)$ tali che $\lambda u - \Delta u = f$. Moltiplicando per $u|u|^{p-2}$ otteniamo

$$\lambda |u|^p - \Delta u\, u|u|^{p-2} = fu|u|^{p-2}.$$

Integrando su $\mathbb{R}^N_+$ ed usando il Lemma 4.1 e la disuguaglianza di Hölder

$$\begin{aligned} \lambda \int_{\mathbb{R}^N_+} |u|^p &\leq \lambda \int_{\mathbb{R}^N_+} |u|^p - \int_{\mathbb{R}^N_+} \Delta u\, u|u|^{p-2} \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N_+} |f||u|^{p-1} \leq \|f\|_p \, \|u\|_p^{p-1}. \end{aligned}$$

Quindi, dividendo primo e secondo membro per $\|u\|_p^{p-1}$, si ha

$$\lambda \|u\|_p \leq \|f\|_p. \tag{4.4}$$

Questa disuguaglianza implica l'unicità della soluzione.
"Esistenza": Sia $f \in L^p(\mathbb{R}^N_+)$. Consideriamo la funzione $\widetilde{f}$ ottenuta da f mediante una riflessione dispari.

$$\widetilde{f}(x', x_N) = \begin{cases} f(x', x_N) & \text{se } x_N \geq 0 \\ -f(x', -x_N) & \text{se } x_N < 0. \end{cases}$$

Risulta evidentemente $\|\widetilde{f}\|_{p,\mathbb{R}^N} \leq 2\|f\|_{p,\mathbb{R}^N_+}$. Per il Teorema 2.18, esiste un'unica $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$ tale che

$$\lambda u - \Delta u = \widetilde{f} \tag{4.5}$$

in $\mathbb{R}^N$ ed esiste $C = C(N,p) > 0$ tale che

$$\lambda^{\frac{1}{2}} \|\nabla u\|_{p,\mathbb{R}^N} \leq C(N,p) \|\widetilde{f}\|_{p,\ R^N} \leq 2C(N,p)\|f\|_{p,\mathbb{R}^N_+}; \tag{4.6}$$

$$\|D^2 u\|_{p,\mathbb{R}^N} \leq C(N,p)\|\widetilde{f}\|_{p,\ R^N} \leq 2C(N,p)\|f\|_{p,\mathbb{R}^N_+}. \tag{4.7}$$

La restrizione di u a $\mathbb{R}^N_+$ è la funzione candidata a risolvere l'equazione nel semispazio. Da (4.6) e (4.7) rispettivamente deduciamo che essa soddisfa (4.2) e (4.3). Resta da provare la sua appartenenza allo spazio $W^{1,p}_0(\mathbb{R}^N_+)$. Sia $v(x', x_N) = -u(x', -x_N)$. Allora

$$\begin{aligned} \lambda v(x', x_N) - \Delta v(x', x_N) &= -\lambda u(x', -x_N) + \Delta u(x', -x_N) \\ &= -\widetilde{f}(x', -x_N) = \widetilde{f}(x', x_N). \end{aligned}$$

Le funzioni $v(x', x_N)$ e $u(x', x_N)$ risolvono allora la stessa equazione ellittica in $\mathbb{R}^N$ e per unicità coincidono. Pertanto

$$u(x', x_N) = v(x', x_N) = -u(x', -x_N)$$

e dal Lemma 4.4 segue che $u_{|\mathbb{R}^N_+} \in W^{1,p}_0(\mathbb{R}^N_+)$. □

Dal teorema appena provato deduciamo immediatamente stime L^p per l'operatore di Laplace.

COROLLARIO 4.5. *Sia $1 < p < \infty$. Esiste $C = C(N,p) > 0$ tale che*

$$\|u\|_{2,p} \leq C(N,p)(\|u\|_p + \|\Delta u\|_p) \tag{4.8}$$

per ogni $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N_+) \cap W^{1,p}_0(\mathbb{R}^N_+)$.

DIM. Basta applicare le stime (4.1), (4.2) e (4.3) con $f = u - \Delta u$ e $\lambda = 1$. $\square$

Come in $\mathbb{R}^N$, proviamo stime L^p per l'operatore a coefficienti costanti

$$A_0 = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} D_{ij}$$

con $a = (a_{ij})$ matrice reale simmetrica e costante di ellitticità $\nu > 0$.

PROPOSIZIONE 4.6. *Se $1 < p < \infty$, allora esiste $C = C(N,p,\nu)$ tale che*

$$\|u\|_{2,p} \leq C(N,p,\nu)\ [\|u\|_p + \|A_0 u\|_p]$$

per ogni $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N_+) \cap W^{1,p}_0(\mathbb{R}^N_+)$.

DIM. La dimostrazione è analoga a quella fatta in $\mathbb{R}^N$ dove ci si riconduce all'operatore di Laplace con un cambio di variabile. Tuttavia è necessario assicurarsi che $\mathbb{R}^N_+$ sia invariante rispetto alle trasformazioni usate.
Sia Q_1 matrice ortogonale tale che $Q_1 a Q_1^* = D_\lambda$ dove D_λ è la matrice diagonale avente come elementi gli autovalori di a, $\lambda_1, \ldots.., \lambda_N$. Poniamo $Q_2 := D_{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}} Q_1$ dove $D_{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}}$ è la matrice diagonale i cui elementi sono $\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{\lambda_N}}$. Allora

$$Q_2 a Q_2^* = D_{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}} Q_1 a Q_1^* D_{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}} = D_{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}} D_\lambda D_{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}} = I.$$

Non è detto però che $Q_2(\mathbb{R}^N_+)$ coincida con $\mathbb{R}^N_+$. Per questo motivo introduciamo una nuova matrice ortogonale S tale che $S(Q_2(\mathbb{R}^N_+)) = \mathbb{R}^N_+$. Per costruzione, posto $Q = SQ_2$, $Q : \mathbb{R}^N_+ \to \mathbb{R}^N_+$ e $Q(\mathbb{R}^{N-1}) = \mathbb{R}^{N-1}$. Risulta inoltre

$$QaQ^* = SQ_2 a Q_2^* S^* = SIS^* = I.$$

Sia $v \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N_+) \cap W^{1,p}_0(\mathbb{R}^N_+)$ tale che $u(x) = v(Qx)$, allora

$$D^2 u(x) = Q^* D^2 v(Qx) Q$$

e

$$\begin{aligned} A_0 u(x) &= tr(aD^2 u(x)) = tr(aQ^* D^2 v(Qx) Q) \\ &= tr(QaQ^* D^2 v(Qx)) = tr(D^2 v(Qx)). \end{aligned}$$

Inoltre

$$\begin{aligned} |D^2u(x)|^2 &= \sum_{i,j=1}^{N} |D_{ij}u|^2 = |D_{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}} D^2 v(Qx) D_{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}}|^2 \\ &\leq \frac{1}{\nu^2}|D^2v(Qx)|^2. \end{aligned}$$

Possiamo infine applicare le stime già provate per il Laplaciano ed ottenere

$$\begin{aligned} \|D^2u\|_p &\leq \frac{1}{\nu}\|D^2v(Q\cdot)\|_p = \frac{c(\lambda)}{\nu}\|D^2v(\cdot)\|_p \\ &\leq \frac{C(N,p)c(\lambda)}{\nu}\|\Delta v(\cdot)\|_p = \frac{C(N,p)}{\nu}\|\Delta v(Q\cdot)\|_p \\ &= \frac{C(N,p)}{\nu}\|A_0u\|_p. \end{aligned}$$

Abbiamo così ottenuto

$$\|D^2u\|_p \leq C(N,p,\nu)\|A_0u\|_p. \tag{4.9}$$

Per le disuguaglianze interpolative (vedi Proposizione 4.2)

$$\|\nabla u\|_p \leq C(\|u\|_p + \|D^2u\|_p). \tag{4.10}$$

Da (4.9) e (4.10) segue la stima desiderata. □

Siamo ora in grado di provare stime L^p per operatori ellittici qualunque. Il metodo dimostrativo, già adottato in $\mathbb{R}^N$, è quello di "congelare" i coefficienti nei centri di opportune palle di $\mathbb{R}^N$.

TEOREMA 4.7 (Stime a priori). *Se $1 < p < \infty$, allora esiste $C = C(N,p,\nu, M,\omega)$ tale che*

$$\|u\|_{2,p} \leq C(N,p,\nu,M,\omega)\ [\|u\|_p + \|Au\|_p]$$

per ogni $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N_+) \cap W^{1,p}_0(\mathbb{R}^N_+)$.

DIM. Dati $x_0 \in \mathbb{R}^N_+, r > 0$, sia $\eta \in C^\infty_c(B(x_0,r))$ tale che $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta = 1$ in $B(x_0, \frac{r}{2})$, $\|\nabla\eta\|_\infty \leq \frac{L}{r}$ e $\|D^2\eta\|_\infty \leq \frac{L}{r^2}$ per qualche $L > 0$. Scriviamo semplicemente $\|\cdot\|_{k,p,r}$, per $k = 0,1,2$ al posto di $\|\cdot\|_{W^{k,p}(B(x_0,r)\cap\mathbb{R}^N_+)}$. L'operatore

$$A_{x_0} = \sum_{i,j} a_{ij}(x_0)D_{ij}$$

è a coefficienti costanti. La Proposizione 4.6, applicata alla funzione $\eta u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N_+) \cap W^{1,p}_0(\mathbb{R}^N_+)$, fornisce

$$\|\eta u\|_{2,p} \leq C(N,p,\nu)\ [\|\eta u\|_p + \|A_{x_0}(\eta u)\|_p].$$

Da qui segue

$$\begin{aligned}
\|u\|_{2,p,\frac{r}{2}} &\leq C(N,p,\nu)\big[\|u\|_{p,r} + \big\|\eta A_{x_0}u + uA_{x_0}\eta + 2\sum_{i,j} a_{ij}D_iuD_j\eta\big\|_p\big] \\
&\leq C(N,p,\nu)[\|u\|_{p,r} + \|A_{x_0}u\|_{p,r} + \frac{ML}{r^2}\|u\|_{p,r} + \frac{ML}{r}\|\nabla u\|_{p,r}] \\
&= C(N,p,\nu)[\|A_{x_0}u\|_{p,r} + K(M,r)\|u\|_{1,p,r}] \\
&\leq C(N,p,\nu)[\|Au\|_{p,r} + \|(A_{x_0} - A)u\|_{p,r} + K(M,r)\|u\|_{1,p,r}] \\
&= C(N,p,\nu)\big[\|Au\|_{p,r} + \big\|\sum_{i,j}(a_{ij}(x_0) - a_{ij}(x))D_{ij}u\big\|_{p,r} \\
&\qquad +K(M,r)\|u\|_{1,p,r}\big] \\
&\leq C(N,p,\nu)[\|Au\|_{p,r} + \omega(r)\|D^2u\|_{p,r} + K(M,r)\|u\|_{1,p,r}] \\
&\leq C(N,p,\nu)[\|Au\|_{p,r} + \omega(r)\|u\|_{2,p,r} + K(M,r)\|u\|_{1,p,r}].
\end{aligned}$$

Elevando ambo i membri alla potenza p-esima, otteniamo

$$\|u\|^p_{2,p,\frac{r}{2}} \leq C(N,p,\nu)[\|Au\|^p_{p,r} + \omega^p(r)\|u\|^p_{2,p,r} + K^p(M,r)\|u\|^p_{1,p,r}]. \tag{4.11}$$

Sia $(B(x_n, \frac{r}{2}))$ una famiglia di palle ricoprente $\mathbb{R}^N_+$ con al più $\xi(N)$ tra le palle $B(x_n, r)$ aventi intersezione non vuota (come nel Lemma 3.3). Applichiamo la stima (4.11) in ciascuna delle $B(x_n, \frac{r}{2})$ e sommiamo su n. Otteniamo

$$\begin{aligned}
\|u\|^p_{2,p} &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \|u\|^p_{2,p,B(x_n,\frac{r}{2})} \\
&\leq C(N,p,\nu)\sum_{n\in\mathbb{N}}[\|Au\|^p_{p,B(x_n,r)} + \omega^p(r)\|u\|^p_{2,p,B(x_n,r)} \\
&\qquad +K^p(M,r)\|u\|^p_{1,p,B(x_n,r)}] \\
&\leq \xi(N)C(N,p,\nu)[\|Au\|^p_p + \omega^p(r)\|u\|^p_{2,p} + K^p(M,r)\|u\|^p_{1,p}].
\end{aligned}$$

Scegliendo r in modo tale che $\omega^p(r)^p\xi(N)C(N,p,\nu)) \leq \frac{1}{2}$, otteniamo

$$\|u\|^p_{2,p} \leq C(N,p,\nu)[\|Au\|^p_p + K^p(M,r)\|u\|^p_{1,p}]$$

da cui

$$\|u\|_{2,p} \leq C(N,p,\nu)[\|Au\|_p + K(M,r)\|u\|_{1,p}].$$

Per le stime interpolative,

$$\|u\|_{2,p} \leq C(N,p,\nu)[\|Au\|_p + K(M,r)\varepsilon\|D^2u\|_p + \frac{K(M,r)}{\varepsilon}\|u\|_p].$$

Scegliendo infine ε in modo tale che $C(N,p,\nu)K(M,r)\varepsilon \leq \frac{1}{2}$ otteniamo la tesi. □

TEOREMA 4.8 (Agmon). *Sia $1 < p < \infty$. Esistono λ_0, $C > 0$ dipendenti da N, p, ν, M, ω tali che $\forall\ u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N_+) \cap W^{1,p}_0(\mathbb{R}^N_+)$, $\forall\ \lambda \geq \lambda_0$*

$$\lambda\|u\|_p + \lambda^{\frac{1}{2}}\|\nabla u\|_p + \|D^2u\|_p \leq C\|(\lambda - A)u\|_p.$$

DIM. Consideriamo l'operatore ellittico

$$A_1 := A + D_{tt}$$

in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N_+ = \mathbb{R}^{N+1}_+$. Osserviamo che le nuove grandezze $N_1, \nu_1, M_1, \omega_1$ relative ad A_1 sono legate alle precedenti dalle seguenti relazioni:

$$N_1 = N + 1 \quad \nu_1 = \min\{\nu, 1\} \quad M_1 = \max\{M, 1\} \quad \omega_1 = \omega.$$

Sia $\eta \in C^\infty_c(\mathbb{R})$, $\eta \leq 1$ tale che $\eta \equiv 1$ in $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ e $supp\,\eta \subseteq [-1, 1]$. Applichiamo il Teorema 4.7 all'operatore A_1 e alla funzione $v(t,x) := \eta(t)e^{irt}u(x)$, con $r \in \mathbb{R}$. Otteniamo

$$\begin{aligned}
\|v\|_{2,p,\mathbb{R}^{N+1}_+} &\leq C(N,p,\nu,M,\omega)[\|v\|_{p,\mathbb{R}^N_+ \times \mathbb{R}} + \|A_1 v\|_{p,\mathbb{R}^{N+1}}] \\
&\leq C(N,p,\nu,M,\omega) \\
&\quad \times [\|u\|_p + \|\eta e^{irt} Au + u\eta'' e^{irt} + 2ire^{irt}\eta' u - r^2 \eta e^{irt} u\|_{p,\mathbb{R}^{N+1}}] \\
&\leq C(N,p,\nu,M,\omega)[\|u\|_p + \|(A - r^2)u\|_{p,\mathbb{R}^{N+1}} + (1+2r)\|u\|_p] \\
&\leq C(N,p,\nu,M,\omega)[(1+r)\|u\|_p + \|(A-r^2)u\|_p].
\end{aligned}$$

Inoltre

$$\begin{aligned}
\|v\|^p_{2,p,\mathbb{R}^{N+1}_+} &\geq \|v\|^p_{2,p,[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]\times\mathbb{R}^N_+} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^N_+} \sum_{|\alpha|\leq 2} |D^\alpha(e^{irt}u(x))|^p dt dx \\
&= \|u\|^p_p + \|\nabla u\|^p_p + \|D^2 u\|^p_p + r^p\|u\|^p_p \\
&\quad + r^{2p}\|u\|^p_p + 2r^p\|\nabla u\|^p_p \\
&\geq \|D^2 u\|^p_p + r^p\|\nabla u\|^p_p + r^{2p}\|u\|^p_p.
\end{aligned}$$

Pertanto

$$\|D^2 u\|_p + r\|\nabla u\|_p + r^2\|u\|_p \leq C(N,p,\nu,M,\omega)[(1+r)\|u\|_p + \|(A-r^2)u\|_p].$$

Scegliendo r_0 in modo tale che, se $r \geq r_0$, $r^2 - C(N,p,\nu,M,\omega)(1+r) \geq \frac{r^2}{2}$, otteniamo infine

$$\|D^2 u\|_p + r\|\nabla u\|_p + \frac{1}{2}r^2\|u\|_p \leq C(N,p,\nu,M,\omega)\|(A-r^2)u\|_p. \tag{4.12}$$

per ogni $r \geq r_0$. Riscrivendo (4.12) per $\lambda = r^2$ e ponendo $\lambda_0 := r_0^2$, segue la tesi. □

Abbiamo a questo punto gli strumenti necessari per applicare il metodo di continuità e dedurre il teorema di esistenza e unicità per operatori arbitrari.

TEOREMA 4.9. *Sia $1 < p < \infty$. Esistono λ_0, C dipendenti da N, p, ν, M, ω tali che per ogni $\lambda \geq \lambda_0$ l'operatore $\lambda - A : W^{2,p}(\mathbb{R}^N_+) \cap W^{1,p}_0(\mathbb{R}^N_+) \to L^p(\mathbb{R}^N_+)$ è invertibile e le seguenti disuguaglianze sono verificate (la norma è quella operatoriale in L^p)*

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \frac{C}{\lambda}; \tag{4.13}$$

$$\|\nabla(\lambda - A)^{-1}\| \le \frac{C}{\sqrt{\lambda}}; \tag{4.14}$$

$$\|D^2(\lambda - A)^{-1})\| \le C. \tag{4.15}$$

DIM. Consideriamo anche qui gli spazi

$$X = W^{2,p}(\mathbb{R}^N_+) \cap W^{1,p}_0(\mathbb{R}^N_+), \qquad Y = L^p(\mathbb{R}^N_+)$$

e gli operatori

$$L_0 = \lambda - \Delta, \quad L_1 = \lambda - A, \quad L_t = \lambda - [(1-t)\Delta + tA].$$

Per il Teorema 4.3, l'operatore L_0 è invertibile. Per il Teorema 4.8 applicato all'operatore $A_t := (1-t)\Delta + tA$, esistono $C = C(N, p, \nu_t, M_t, \omega_t)$ e λ_0 dipendente dagli stessi parametri tali che

$$\|u\|_{2,p} \le C\|(\lambda - A_t)u\|_p$$

per ogni $\lambda \ge \lambda_0$. Osserviamo che, come già fatto notare in $\mathbb{R}^N$,

$$M_t \le \max\{1, M\}, \quad \nu_t \ge \min\{1, \nu\}, \quad \omega_t = t\omega \le \omega,$$

possiamo pertanto eliminare la dipendenza della costante da t. Applicando il Teorema 3.6 otteniamo l'invertibilità dell'operatore $L_1 = \lambda - A$.
Le disuguaglianze (4.13), (4.14) e (4.15) seguono immediatamente dal Teorema 4.8. □

OSSERVAZIONE 4.10. Con dimostrazione analoga si provano nel semispazio i risultati ottenuti per operatori ellittici in forma divergenza in tutto lo spazio.

ESERCIZIO 4.11. Data $f \in L^p(\mathbb{R}^N_+)$, provare esistenza e unicità per l'equazione

$$\lambda u - \Delta u = f$$

nello spazio $W^{2,p}(\mathbb{R}^N_+)$ e con condizioni di Neumann al bordo.