CAPITOLO 4

# Operatori ellittici in $\mathbb{R}^N_+$

Premettiamo alcune notazioni.

$$\mathbb{R}^N_+ = \{x = (x', x_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^N : x_N > 0\};$$

$$\partial\mathbb{R}^N_+ = \{x \in \mathbb{R}^N : x_N = 0\} \equiv \mathbb{R}^{N-1}.$$

Consideriamo l'operatore ellittico

$$Au = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} D_{ij} + \sum_{i=1}^{N} b_i D_i + c$$

dove $a_{ij} = a_{ji} \in BUC(\mathbb{R}^N_+)$, $b_{ij} \in L^\infty(\mathbb{R}^N_+)$ per $i,j = 1, ...., N$, $c \in L^\infty(\mathbb{R}^N_+)$. Inoltre i coefficienti $a_{ij}$ soddisfano la condizione di ellitticità

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \nu|\xi|^2$$

e la stima

$$\left|\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\right| \leq \Lambda|\xi|^2$$

per ogni $\xi \in \mathbb{R}^N_+$, $x \in \mathbb{R}^N$, dove

$$\nu = \inf_{x\in\mathbb{R}^N_+} \{\text{minimo autovalore di } a_{ij}(x)\};$$

$$\Lambda = \sup_{x\in\mathbb{R}^N} \{\text{massimo autovalore di } a_{ij}(x)\}.$$

Poniamo

$$M := \max\{\|a_{ij}\|_\infty, \|b_i\|_\infty, \|c\|_\infty\};$$

$$\omega(r) := \max_{i,j} \sup_{|x-y|<r} |a_{ij}(x) - a_{ij}(y)|.$$

In questa sezione ripercorreremo le varie tappe dello studio di operatori ellittici nell'intero spazio. Inizieremo col provare esistenza e unicità della soluzione del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \lambda u - \Delta u = f(x', x_N) & \text{in } \mathbb{R}^N_+ \\ u = 0 & \text{su } \partial\mathbb{R}^N_+. \end{cases}$$

Proveremo poi stime $L^p$ per operatori a coefficienti variabili. Servendoci del metodo di continuità, dedurremo che il problema di Dirichlet è ben posto.

In modo analogo al caso dell'intero spazio, si provano il lemma e la proposizione seguenti.

LEMMA 4.1. *Se* $1 < p < \infty$ *e* $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N_+) \cap W^{1,p}_0(\mathbb{R}^N_+)$, *allora*

$$\int_{\mathbb{R}^N_+} \Delta u \, u|u|^{p-2} \le 0 \, .$$

PROPOSIZIONE 4.2. *Sia* $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N_+)$ *con* $1 \le p < \infty$, *allora per ogni* $\varepsilon > 0$

$$\|\nabla u\|_p \le c\varepsilon \|D^2 u\|_p + \frac{c}{\varepsilon}\|u\|_p$$

*per una qualche costante* $c = c(p) > 0$. *Inoltre, minimizzando su* $\varepsilon$, *si ha*

$$\|\nabla u\|_p \le 2c\|D^2 u\|_p^{\frac{1}{2}} \|u\|_p^{\frac{1}{2}}.$$

TEOREMA 4.3. *Siano* $1 < p < \infty$ *e* $\lambda > 0$; *allora per ogni* $f \in L^p(\mathbb{R}^N_+)$ *esiste un'unica* $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N_+) \cap W^{1,p}_0(\mathbb{R}^N_+)$ *tale che*

$$\lambda u - \Delta u = f.$$

*Inoltre esiste* $C = C(N,p) > 0$ *tale che*

$$\lambda \|u\|_p \le \|f\|_p. \tag{4.1}$$

$$\lambda^{\frac{1}{2}} \|\nabla u\|_p \le C(N,p)\|f\|_p. \tag{4.2}$$

$$\|D^2 u\|_p \le C(N,p)\|f\|_p. \tag{4.3}$$

La dimostrazione poggia sul seguente lemma.

LEMMA 4.4. *Sia* $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ *con* $1 \le p < \infty$, *tale che* $u(x', -x_N) = -u(x', x_N)$. *Allora* $u_{|\mathbb{R}^N_+} \in W^{1,p}_0(\mathbb{R}^N_+)$.

DIM. Regolarizziamo la funzione $u$ prendendo come funzioni approssimanti $u_\varepsilon = u * \phi_\varepsilon$ dove $\phi$ è un mollificatore pari nella variabile $x_N$. Allora $u_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^N) \cap W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e $u_\varepsilon \to u$ in $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Risulta inoltre

$$u_\varepsilon(x', -x_N) = -u_\varepsilon(x', x_N)$$

da cui segue

$$u_\varepsilon(x', 0) = 0$$

e quindi $u_\varepsilon \in W^{1,p}_0(\mathbb{R}^N_+)$. In quanto limite di funzioni in $W^{1,p}_0(\mathbb{R}^N_+)$ anche $u$ appartiene allo stesso spazio. $\square$

DIM.(Teorema 4.3)
*"Unicità + stima (4.1)"*: Siano $f \in L^p(\mathbb{R}^N_+)$ ed $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N_+) \cap W^{1,p}_0(\mathbb{R}^N_+)$ tali che $\lambda u - \Delta u = f$. Moltiplicando per $u|u|^{p-2}$ otteniamo

$$\lambda|u|^p - \Delta u\, u|u|^{p-2} = fu|u|^{p-2}.$$

Integrando su $\mathbb{R}^N_+$ ed usando il Lemma 4.1 e la disuguaglianza di Hölder

$$\begin{aligned}\lambda\int_{\mathbb{R}^N_+}|u|^p &\leq \lambda\int_{\mathbb{R}^N_+}|u|^p - \int_{\mathbb{R}^N_+}\Delta u\, u|u|^{p-2}\\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N_+}|f||u|^{p-1} \leq \|f\|_p\, \|u\|_p^{p-1}.\end{aligned}$$

Quindi, dividendo primo e secondo membro per $\|u\|_p^{p-1}$, si ha

$$\lambda\|u\|_p \leq \|f\|_p. \tag{4.4}$$

Questa disuguaglianza implica l'unicità della soluzione.
*"Esistenza"*: Sia $f \in L^p(\mathbb{R}^N_+)$. Consideriamo la funzione $\widetilde{f}$ ottenuta da $f$ mediante una riflessione dispari.

$$\widetilde{f}(x', x_N) = \begin{cases} f(x', x_N) & \text{se } x_N \geq 0\\ -f(x', -x_N) & \text{se } x_N < 0.\end{cases}$$

Risulta evidentemente $\|\widetilde{f}\|_{p,\mathbb{R}^N} \leq 2\|f\|_{p,\mathbb{R}^N_+}$. Per il Teorema 2.18, esiste un'unica $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$ tale che

$$\lambda u - \Delta u = \widetilde{f} \tag{4.5}$$

in $\mathbb{R}^N$ ed esiste $C = C(N,p) > 0$ tale che

$$\lambda^{\frac{1}{2}}\|\nabla u\|_{p,\mathbb{R}^N} \leq C(N,p)\|\widetilde{f}\|_{p,\ R^N} \leq 2C(N,p)\|f\|_{p,\mathbb{R}^N_+}; \tag{4.6}$$

$$\|D^2u\|_{p,\mathbb{R}^N} \leq C(N,p)\|\widetilde{f}\|_{p,\ R^N} \leq 2C(N,p)\|f\|_{p,\mathbb{R}^N_+}. \tag{4.7}$$

La restrizione di $u$ a $\mathbb{R}^N_+$ è la funzione candidata a risolvere l'equazione nel semispazio. Da (4.6) e (4.7) rispettivamente deduciamo che essa soddisfa (4.2) e (4.3). Resta da provare la sua appartenenza allo spazio $W^{1,p}_0(\mathbb{R}^N_+)$. Sia $v(x', x_N) = -u(x', -x_N)$. Allora

$$\begin{aligned}\lambda v(x', x_N) - \Delta v(x', x_N) &= -\lambda u(x', -x_N) + \Delta u(x', -x_N)\\ &= -\widetilde{f}(x', -x_N) = \widetilde{f}(x', x_N).\end{aligned}$$

Le funzioni $v(x', x_N)$ e $u(x', x_N)$ risolvono allora la stessa equazione ellittica in $\mathbb{R}^N$ e per unicità coincidono. Pertanto

$$u(x', x_N) = v(x', x_N) = -u(x', -x_N)$$

e dal Lemma 4.4 segue che $u_{|\mathbb{R}^N_+} \in W^{1,p}_0(\mathbb{R}^N_+)$. □

Dal teorema appena provato deduciamo immediatamente stime $L^p$ per l'operatore di Laplace.

COROLLARIO 4.5. *Sia $1 < p < \infty$. Esiste $C = C(N,p) > 0$ tale che*

$$\|u\|_{2,p} \le C(N,p)(\|u\|_p + \|\Delta u\|_p) \tag{4.8}$$

*per ogni $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N_+) \cap W^{1,p}_0(\mathbb{R}^N_+)$.*

DIM. Basta applicare le stime (4.1), (4.2) e (4.3) con $f = u - \Delta u$ e $\lambda = 1$. $\square$

Come in $\mathbb{R}^N$, proviamo stime $L^p$ per l'operatore a coefficienti costanti

$$A_0 = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} D_{ij}$$

con $a = (a_{ij})$ matrice reale simmetrica e costante di ellitticità $\nu > 0$.

PROPOSIZIONE 4.6. *Se $1 < p < \infty$, allora esiste $C = C(N,p,\nu)$ tale che*

$$\|u\|_{2,p} \le C(N,p,\nu)\ [\|u\|_p + \|A_0 u\|_p]$$

*per ogni $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N_+) \cap W^{1,p}_0(\mathbb{R}^N_+)$.*

DIM. La dimostrazione è analoga a quella fatta in $\mathbb{R}^N$ dove ci si riconduce all'operatore di Laplace con un cambio di variabile. Tuttavia è necessario assicurarsi che $\mathbb{R}^N_+$ sia invariante rispetto alle trasformazioni usate.
Sia $Q_1$ matrice ortogonale tale che $Q_1 a Q_1^* = D_\lambda$ dove $D_\lambda$ è la matrice diagonale avente come elementi gli autovalori di $a$, $\lambda_1, \ldots\ldots, \lambda_N$. Poniamo $Q_2 := D_{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}} Q_1$ dove $D_{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}}$ è la matrice diagonale i cui elementi sono $\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{\lambda_N}}$. Allora

$$Q_2 a Q_2^* = D_{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}} Q_1 a Q_1^* D_{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}} = D_{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}} D_\lambda D_{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}} = I.$$

Non è detto però che $Q_2(\mathbb{R}^N_+)$ coincida con $\mathbb{R}^N_+$. Per questo motivo introduciamo una nuova matrice ortogonale $S$ tale che $S(Q_2(\mathbb{R}^N_+)) = \mathbb{R}^N_+$. Per costruzione, posto $Q = SQ_2$, $Q : \mathbb{R}^N_+ \to \mathbb{R}^N_+$ e $Q(\mathbb{R}^{N-1}) = \mathbb{R}^{N-1}$. Risulta inoltre

$$QaQ^* = SQ_2 a Q_2^* S^* = SIS^* = I.$$

Sia $v \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N_+) \cap W^{1,p}_0(\mathbb{R}^N_+)$ tale che $u(x) = v(Qx)$, allora

$$D^2 u(x) = Q^* D^2 v(Qx) Q$$

e

$$\begin{aligned} A_0 u(x) &= tr(aD^2u(x)) = tr(aQ^* D^2 v(Qx) Q) \\ &= tr(QaQ^* D^2 v(Qx)) = tr(D^2 v(Qx)). \end{aligned}$$