CAPITOLO 2

L'equazione di Poisson

L'obiettivo di questo capitolo è quello di studiare l'equazione di Poisson $\lambda u - \Delta u = f$ con dato $f \in L^p$. Per far ciò proveremo la disuguaglianza di Calderón e Zygmund che consente di stimare la norma L^p delle derivate seconde di u con quella del suo Laplaciano. In questo modo se $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$ è soluzione dell'equazione ellittica $\lambda u - \Delta u = f$, con $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, allora $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$.

La disuguaglianza di Calderón-Zygmund si riduce ad un'uguaglianza nel caso $p = 2$ e si ottiene immediatamente con una semplice integrazione per parti. Per $p \neq 2$ la dimostrazione richiede, come vedremo, sforzi maggiori. Applicheremo infatti il teorema di interpolazione di Marcinkiewicz.

Prima di occuparci della disuguaglianza di Calderón-Zygmund facciamo vedere come si determina la soluzione dell'equazione di Poisson.

2.1. Il potenziale Newtoniano

Sia Ω un aperto non vuoto connesso limitato di $\mathbb{R}^N$, con frontiera di classe C^1 a tratti. Il Teorema della divergenza afferma che per ogni $f \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$

$$\int_\Omega \operatorname{div} f \, dx = \int_{\partial\Omega} f \cdot n \, d\sigma,$$

dove n è la normale esterna a Ω e $d\sigma$ la misura di Lebesgue su $\partial\Omega$. Prese $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$, dal Teorema della divergenza scaturiscono le identità di Green

$$\int_\Omega u\Delta v \, dx = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} \, d\sigma \tag{2.1}$$

$$\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u) \, dx = \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma. \tag{2.2}$$

La soluzione fondamentale dell'operatore di Laplace Δ è la funzione così definita

$$\Gamma(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \log|x| & \text{per } N = 2 \\ \frac{1}{N(2-N)\omega_N} \frac{1}{|x|^{N-2}} & \text{per } N \geq 3 \end{cases}$$

e soddisfa $\Delta\Gamma = 0$ in $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$. Risulta $\Gamma \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ e inoltre

$$D_i\Gamma(x) = \frac{1}{N\omega_N} \frac{x_i}{|x|^N}$$
$$D_{ij}\Gamma(x) = \frac{1}{N\omega_N} \left[\frac{\delta_{ij}}{|x|^N} - N \frac{x_i x_j}{|x|^{N+2}} \right].$$

Osserviamo che le derivate prime della Γ sono localmente sommabili, mentre le derivate del secondo ordine non lo sono. In generale

$$|D^k\Gamma(x)| = O\left(\frac{1}{|x|^{N-2+k}} \right) \qquad \text{per} \quad |x| \to 0, \ \infty \tag{2.3}$$

dove con D^k indichiamo una qualunque derivata di ordine k.

Data $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, definiamo *Potenziale Newtoniano* di f la funzione

$$N(f) = \Gamma * f = \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x-y) f(y) \, dy.$$

In particolare il Potenziale Newtoniano risulta ben definito per funzioni in $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ ed è soluzione dell'equazione di Poisson $\Delta u = f$, come proveremo nelle seguente proposizione.

PROPOSIZIONE 2.1. *Se $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ allora $N(f) \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ e*

$$\Delta N(f) = f.$$

DIM. Sia $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Poniamo $u = N(f)$. Per definizione

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x-y) f(y) \, dy = \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(y) f(x-y) \, dy$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^N$. Si verifica facilmente che è possibile derivare infinite volte sotto il segno di integrale e quindi che $u \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$. Inoltre

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(y) \Delta f(x-y) \, dy = \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(y-x) \Delta f(y) \, dy \\ &= \lim_{\rho \to 0} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(x,\rho)} \Gamma(y-x) \Delta f(y) \, dy. \end{aligned}$$

Sia $\Omega = B(x,R) \setminus B(x,\rho)$ con $R > 0$ tale che $B(x,R)$ contenga il supporto di f. Per l'identità di Green (2.2) applicata a $\Gamma(x-\cdot)$ ed a f risulta

$$\begin{aligned}\int_{B(x,R)\setminus B(x,\rho)} & \Gamma(y-x)\Delta f(y)\,dy \\ &= \int_{B(x,R)\setminus B(x,\rho)} \Delta\Gamma(y-x) f(y)\,dy \\ &+ \int_{\partial B(x,R)} \left(\Gamma(y-x)\frac{\partial f}{\partial n}(y) - \frac{\partial \Gamma}{\partial n}(y-x) f(y)\right) d\sigma(y) \\ &- \int_{\partial B(x,\rho)} \left(\Gamma(y-x)\frac{\partial f}{\partial n}(y) - \frac{\partial \Gamma}{\partial n}(y-x) f(y)\right) d\sigma(y).\end{aligned}$$

Poiché *supp* $f \subset B(x,R)$ e $\Delta\Gamma(y-x) = 0$ per $y \neq x$, da quest'ultima identità segue che

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B(x,\rho)} & \Gamma(y-x)\Delta f(y)\,dy \\ &= -\int_{\partial B(x,\rho)} \left(\Gamma(y-x)\frac{\partial f}{\partial n}(y) - \frac{\partial \Gamma}{\partial n}(y-x) f(y)\right) d\sigma(y).\end{aligned}$$

Risulta

$$\left|\int_{\partial B(x,\rho)} \Gamma(y-x)\frac{\partial f}{\partial n}(y)\,d\sigma(y)\right| \leq C\|\nabla f\|_\infty \frac{1}{\rho^{N-2}}\rho^{N-1}$$

e quindi

$$\int_{R^N\setminus B(x,\rho)} \Gamma(x-y)\Delta f(y)\,dy = O(\rho) + \frac{1}{N\omega_N \rho^{N-1}} \int_{\partial B(x,\rho)} f(y)\,d\sigma(y).$$

Facciamo allora tendere $\rho \to 0$ e otteniamo

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(y-x)\Delta f(y)\,dy = f(x),$$

ossia $\Delta u(x) = f(x)$. □

ESERCIZIO 2.2. Provare che se $f \in C_c^2(\mathbb{R}^N)$ allora $N(f) \in C^2(\mathbb{R}^N)$ e $\Delta N(f) = f$.

Per completezza diamo anche una formula di rappresentazione per funzioni $u \in C^2(\overline{\Omega})$.

PROPOSIZIONE 2.3. *Siano Ω aperto limitato di $\mathbb{R}^N$ di classe C^1 e $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Allora*

$$u(x) = \int_\Omega \Gamma(y-x)\Delta u(y)\,dy + \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial n}(y-x)u(y) - \Gamma(y-x)\frac{\partial u}{\partial n}(y)\right) d\sigma(y)$$

per ogni $x \in \Omega$.

OSSERVAZIONE 2.4. Se assumiamo inoltre che u abbia supporto compatto in Ω allora

$$u(x) = \int_\Omega \Gamma(y-x)\Delta u(y)\, dy,$$

cioè $u = N(\Delta u)$.

DIM. Fissiamo $x \in \Omega$. Per l'dentità di Green (2.2) applicata ad $\Omega \setminus B(x,\rho)$ risulta

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega\setminus B(x,\rho)} \Gamma(y-x)\Delta u(y)\, dy \\
&\qquad = \int_{\Omega\setminus B(x,\rho)} \Delta\Gamma(y-x)u(y)\, dy \\
&\qquad + \int_{\partial\Omega} \left(\Gamma(y-x)\frac{\partial u}{\partial n}(y) - \frac{\partial \Gamma}{\partial n}(y-x)u(y)\right) d\sigma(y) \\
&\qquad - \int_{\partial B(x,\rho)} \left(\Gamma(y-x)\frac{\partial u}{\partial n}(y) - \frac{\partial \Gamma}{\partial n}(y-x)u(y)\right) d\sigma(y),
\end{aligned}$$

dove, fra gli integrali a secondo membro, quello su $\Omega \setminus B(x,\rho)$ è nullo perché $\Delta\Gamma(y-x) = 0$ per $y \in \Omega \setminus B(x,\rho)$ e quello su $\partial B(x,\rho)$ converge ad $u(x)$ per $\rho \to 0$ come nella dimostrazione della Proposizione 2.1. Mandiamo allora ρ a zero ed otteniamo la tesi. □

Soffermiamoci sulle derivate del potenziale Newtoniano. Se $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, posto $u = N(f)$, per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha

$$|D^k u(x)| = O\left(\frac{1}{|x|^{N-2+k}}\right), \qquad \text{per } |x| \to \infty. \tag{2.4}$$

Infatti, scelto $R > 0$ tale che *supp* $f \subset B(0,R)$, si ha

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x-y)f(y)\, dy = \int_{B(0,R)} \Gamma(x-y)f(y)\, dy.$$

Allora per $|x| > R$

$$\begin{aligned}
|D^k u(x)| &= \left|\int_{B(0,R)} D^k\Gamma(x-y)f(y)\, dy\right| \le C\int_{B(0,R)} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{N-2+k}}\, dy \\
&\le \frac{C}{(|x|-R)^{N-2+k}} \int_{B(0,R)} |f|.
\end{aligned}$$

Come anticipato, per $p = 2$ la disuguaglianza di Calderón-Zygmund si ottiene facilmente integrando per parti. Nel seguito indichiamo con $D^2 u$ la matrice Hessiana di u. Inoltre poniamo $|D^2 u|^2 = \sum_{i,j} |D_{ij} u|^2$.

LEMMA 2.5. *Sia* $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, *allora*

$$\|D^2u\|_2 = \|\Delta u\|_2.$$

DIM. La tesi segue immediatamente integrando per parti. Infatti

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u|^2 &= \sum_{i,j=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} D_{ii}uD_{jj}u = -\sum_{i,j=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} D_iuD_{ijj}u \\ &= \sum_{i,j=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} D_{ij}uD_{ij}u = \int_{\mathbb{R}^N} |D^2u|^2.\end{aligned}$$

□

Come nel lemma precedente, dalla Proposizione 2.1 discende il risultato seguente dal quale dedurremo esistenza, unicità e regolarità in L^2.

PROPOSIZIONE 2.6. *Data* $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ *e posto* $u = N(f)$, *si ha*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |D^2u|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |f|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u|^2.$$

DIM. Fissato $R > 0$ consideriamo la palla $B(0,R)$ di raggio R e centro l'origine. Per ogni $i,j = 1,\dots,N$

$$\begin{aligned}\int_{B(0,R)} D_{ii}uD_{jj}u &= -\int_{B(0,R)} D_iuD_{ijj}u + \int_{\partial B(0,R)} D_iuD_{jj}u\ \nu_i\ d\sigma \\ &= \int_{B(0,R)} D_{ij}uD_{ij}u - \int_{\partial B(0,R)} D_iuD_{ij}u\ \nu_j\ d\sigma \\ &\quad + \int_{\partial B(0,R)} D_iuD_{jj}u\ \nu_i\ d\sigma.\end{aligned}$$

Sommando l'uguaglianza precedente su i,j, usando $\Delta u = f$ e (2.4), si ha

$$\int_{B(0,R)} |f|^2 = \int_{B(0,R)} |\Delta u|^2 = \int_{B(0,R)} |D^2u|^2 + O\left(\frac{1}{R^N}\right).$$

Per avere la tesi è sufficiente far tendere R all'infinito. □

Studiamo adesso le derivate prime del potenziale Newtoniano.

LEMMA 2.7. *Sia* Ω *aperto limitato e* $K \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. *L'operatore di convoluzione* T_K *definito da*

$$T_Kf(x) = \int_\Omega K(x-y)f(y)\ dy$$

è continuo da $L^p(\Omega)$ *in* $L^p(\Omega)$ *per ogni* $1 \le p \le \infty$.

DIM. Supponiamo $1 < p < \infty$: i casi $p = 1, \infty$ sono elementari. Poniamo

$$g(x) = \int_\Omega |K(x-y)||f(y)|dy$$

e sia R tale che $\Omega \subset B(R)$. Allora

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_\Omega |K(x-y)|^{\frac{1}{p}}|f(y)||K(x-y)|^{\frac{1}{p'}}dy \\ &\le \left(\int_\Omega |K(x-y)|dy\right)^{1-\frac{1}{p}}\left(\int_\Omega |K(x-y)||f(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\le \left(\int_{B(2R)} |K(r)|dr\right)^{1-\frac{1}{p}}\left(\int_\Omega |K(x-y)||f(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

Quindi

$$g(x)^p \le \|K\|^{p-1}_{L^1(B(2R))}\int_\Omega |K(x-y)||f(y)|^p dy$$

e, integrando su Ω,

$$\begin{aligned} \int_\Omega |g(x)|^p &\le \|K\|^{p-1}_{L^1(B(2R))}\int\int_{\Omega\times\Omega} |K(x-y)||f(y)|^p dxdy \\ &= \|K\|^{p-1}_{L^1(B(2R))}\int_\Omega |f(y)|^p dy \int_\Omega |K(x-y)|dx \\ &\le \|K\|^p_{L^1(B(2R))}\|f\|^p_p. \end{aligned}$$

Ne segue $T_k(f) \in L^p(\Omega)$ e

$$\|T_k f\|_p \le \|K\|_{L^1(B(2R))}\|f\|_p.$$

□

Il Potenziale Newtoniano è un operatore di convoluzione con nucleo localmente sommabile. Il lemma precedente ci dice allora che, se Ω è limitato,

$$N : L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$$

è un operatore continuo per ogni $1 \le p \le \infty$.
Lo stesso accade per il suo gradiente che è l'operatore di convoluzione associato al gradiente di Γ, anch'esso localmente sommabile.

PROPOSIZIONE 2.8. *Se Ω è limitato, allora*

(i) $f \in L^\infty(\Omega) \Rightarrow N(f) \in C^1(\mathbb{R}^N) \subset C^1(\overline{\Omega})$
(ii) $N : L^p(\Omega) \to W^{1,p}(\Omega)$ *è continuo per ogni* $1 \le p \le \infty$.

DIM. (i) Sia $f \in L^\infty(\Omega)$. Poniamo $u = N(f)$ e $v = \int_\Omega \nabla\Gamma(\cdot - y)f(y)\,dy$. Consideriamo una funzione $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $0 \le \eta \le 1$, $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$ tale che

$$\eta(x) = \begin{cases} 0 & -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2} \\ 1 & |x| \ge 1\,. \end{cases}$$

Per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ poniamo

$$u_\varepsilon(x) = \int_\Omega \Gamma(x-y)\eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) f(y)\,dy.$$

Le funzioni u_ε convergono uniformemente ad u per $\varepsilon \to 0$, infatti

$$\begin{aligned} |u(x) - u_\varepsilon(x)| &\le \int_\Omega |\Gamma(x-y)| \left[1 - \eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right)\right] |f(y)|\,dy \\ &\le \|f\|_\infty \int_{|x-y|\le\varepsilon} |\Gamma(x-y)|\,dy = \|f\|_\infty \int_{|z|\le\varepsilon} |\Gamma(z)|\,dz \\ &= \frac{\|f\|_\infty}{N(N-2)\omega_N} \int_{|z|\le\varepsilon} \frac{1}{|z|^{N-2}} \stackrel{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Consideriamo adesso ∇u_ε. Risulta per ogni $x \in \mathbb{R}^N$

$$\begin{aligned} \nabla u_\varepsilon(x) &= \int_\Omega \nabla\Gamma(x-y)\eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) f(y)\,dy \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega \Gamma(x-y)\eta'\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right)\frac{x-y}{|x-y|} f(y)\,dy. \end{aligned}$$

Proviamo che $\nabla u_\varepsilon \to v$ uniformemente per $\varepsilon \to 0$.

$$\begin{aligned} |v(x) - \nabla u_\varepsilon(x)| &\le \int_\Omega |\nabla\Gamma(x-y)| \left[1 - \eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right)\right] |f(y)|\,dy \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega |\Gamma(x-y)| \left|\eta'\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right)\right| |f(y)|\,dy \\ &\le \frac{\|f\|_\infty}{N\omega_N} \int_{|z|\le\varepsilon} \frac{1}{|z|^{N-1}}\,dz \\ &\quad + \frac{\|\eta'\|_\infty \|f\|_\infty}{N(N-2)\omega_N}\,\frac{1}{\varepsilon} \int_{|z|\le\varepsilon} \frac{1}{|z|^{N-2}}\,dz \\ &\le C\left(\int_0^\varepsilon \frac{1}{r^{N-1}}\, r^{N-1} dr + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon \frac{1}{r^{N-2}}\, r^{N-1} dr\right) \\ &= \frac{3}{2} C\varepsilon \stackrel{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

dove $C = \|f\|_\infty \max\left\{1, \frac{\|\eta'\|_\infty}{N-2}\right\}$. Possiamo concludere allora che $u \in C^1(\mathbb{R}^N)$ e $\nabla u = v$.

(ii) Sia $f \in L^p(\Omega)$ e sia $f_n \subset L^\infty(\Omega)$ tale che f_n converge ad f in $L^p(\Omega)$.

Siccome N è un operatore continuo da $L^p(\Omega)$ in $L^p(\Omega)$, $N(f_n) \to N(f)$ in $L^p(\Omega)$. Per il punto (i) $N(f_n) \in C^1(\overline{\Omega})$ e per il Lemma 2.7 risulta

$$\nabla N(f_n) = \nabla\Gamma * f_n \to \nabla\Gamma * f$$

in $L^p(\Omega)$. Pertanto $N(f) \in W^{1,p}(\Omega)$ con $\nabla N(f) = \nabla\Gamma * f$ e

$$\|N(f)\|_{1,p} = \|N(f)\|_p + \|\nabla N(f)\|_p = \|\Gamma * f\|_p + \|\nabla\Gamma * f\|_p \leq C\|f\|_p.$$

□

Come ci si può aspettare una soluzione dell'equazione di Poisson con dato L^p è data dal potenziale Newtoniano. Nella proposizione che segue dimostreremo questo fatto per $p = 2$. Punto essenziale di questa verifica è l'uguaglianza provata nella Proposizione 2.6. Per generalizzare questo risultato ad un $p \neq 2$ sarà necessaria quindi la stima di Calderón-Zygmund che proveremo nella prossima sezione.

PROPOSIZIONE 2.9. *Il Potenziale Newtoniano N è continuo da $L^2(\Omega)$ in $W^{2,2}(\Omega)$. Inoltre*

$$\Delta N(f) = f$$

per ogni $f \in L^2(\Omega)$.

DIM. Sia $f \in L^2(\Omega)$ e sia $(f_n) \subset C_c^\infty(\Omega)$ convergente a f in $L^2(\Omega)$. Per la proposizione precedente $N(f_n)$ converge a $N(f)$ in $W^{1,2}(\Omega)$. Proviamo la convergenza L^2 delle derivate seconde. Per la Proposizione 2.6

$$\begin{aligned}\|D^2[N(f_n) - N(f_m)]\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|D^2[N(f_n) - N(f_m)]\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\ &= \|\Delta[N(f_n) - N(f_m)]\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\ &= \|f_n - f_m\|_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Da qui segue che $(N(f_n))$ è una successione di Cauchy in $W^{2,2}(\Omega)$. Allora $N(f) \in W^{2,2}(\Omega)$ e $\|N(f)\|_{2,2} \leq C\|f\|_2$. Per finire

$$\Delta N(f) = \lim_{n\to\infty} \Delta N(f_n) = \lim_{n\to\infty} f_n = f.$$

□

2.2. La disuguaglianza di Calderón-Zygmund

Lo strumento principale per la dimostrazione della disuguaglianza di Calderón-Zygmund è il teorema di interpolazione di Marcinkiewicz. Al fine di applicare quest'ultimo abbiamo bisogno del procedimento di decomposizione in cubi di Calderón-Zygmund, qui di seguito illustrato.

LEMMA 2.10 (decomposizione in cubi). *Siano $0 \leq f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e $t > 0$. Esistono Ω, F misurabili tali che $\mathbb{R}^N = \Omega \cup F$ con $\Omega \cap F = \emptyset$ e*

(i) $f \leq t$ *su* F;

(ii) $\Omega = \cup_{k=1}^{\infty} Q_k$, *dove* (Q_k) *sono cubi coi lati paralleli agli assi tali che* $\overset{\circ}{Q}_k \cap \overset{\circ}{Q}_h = \emptyset$ *per* $k \neq h$ *e*

$$t < \frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k} f \leq 2^N t$$

per ogni $k \in \mathbb{N}$.

DIM. Sia $\mathcal{G}$ una griglia di $\mathbb{R}^N$, cioè una suddivisione di $\mathbb{R}^N$ in cubi di lati paralleli agli assi tale che se $Q \in \mathcal{G}$ allora

$$\frac{1}{|Q|}\int_{Q} f \leq t.$$

Per ottenere $\mathcal{G}$ basta suddividere $\mathbb{R}^N$ in cubi congruenti di misura $|Q|$ tale che $\frac{1}{|Q|}\int_{\mathbb{R}^N} f \leq t$.
Fissiamo un cubo $Q \in \mathcal{G}$. Dividendo ogni suo lato in due parti uguali suddividiamo Q in 2^N sottocubi congruenti e sia Q' uno di questi sottocubi. Possono verificarsi due eventualità:

$$1) \quad \frac{1}{|Q'|}\int_{Q'} f > t \qquad\qquad 2) \quad \frac{1}{|Q'|}\int_{Q'} f \leq t.$$

Se Q' verifica la 1), allora Q' è uno dei cubi che andrà a formare l'insieme Ω. Se invece Q' verifica la 2) suddividiamo Q' in 2^N sottocubi congruenti e ripetiamo per ognuno di essi quanto fatto per Q'. Quindi continuiamo indefinitamente a suddividere i cubi che verificano la 2) ed a selezionare e porre in Ω i cubi che verificano la 1).
Ripetendo quanto fatto per il fissato cubo Q per ognuno dei cubi che costituiscono la griglia $\mathcal{G}$ otteniamo la decomposizione in cubi cercata. Infatti Ω risulta unione numerabile di cubi Q_k i cui interni sono a due a due disgiunti e tali che

$$t < \frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k} f \leq \frac{|Q'|}{|Q_k|}\frac{1}{|Q'|}\int_{Q'} f \leq 2^N t$$

dove Q' è il cubo di cui Q_k è la 2^N-esima parte e per il quale quindi $\frac{1}{|Q'|}\int_{Q'} f \leq t$.
Poniamo $F = \mathbb{R}^N \setminus \Omega$ e proviamo che $f \leq t$ su F. Se $x \in F$ allora esiste una successione di cubi $(\tilde{Q}_k)$ con $\frac{1}{|\tilde{Q}_k|}\int_{\tilde{Q}_k} f \leq t$ tale che $x \in \tilde{Q}_k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e $\tilde{Q}_k \to x$ nel senso della Definizione 1.32. Poiché per il Teorema 1.30 quasi ogni $x \in \mathbb{R}^N$ è un punto di Lebesgue di f, possiamo assumere x punto di Lebesgue di f e per il Corollario 1.33 risulta

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{|\tilde{Q}_k|}\int_{\tilde{Q}_k} f \leq t.$$

□

OSSERVAZIONE 2.11. L'insieme F della decomposizione in cubi del lemma precedente è sicuramente non vuoto. Infatti se F fosse vuoto allora $\Omega = \mathbb{R}^N$ e, contraddicendo la sommabilità di f, avremmo

$$\int_{\mathbb{R}^N} f = \sum_{k\in\mathbb{N}} \int_{Q_k} f > t \sum_{k\in\mathbb{N}} |Q_k| = \infty.$$

L'insieme Ω può invece essere vuoto e questo si verifica se e solo se $f \le t$ q.o. in $\mathbb{R}^N$.

TEOREMA 2.12 (Calderón-Zygmund). *Sia $1 < p < \infty$; allora esiste $c = c(N,p) > 0$ tale che*

$$\|D_{ij}N(f)\|_p \le c\|f\|_p \tag{2.5}$$

per ogni $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$.

DIM. Per ogni $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ poniamo $Sf = D_{ij}N(f) = D_{ij}(\Gamma * f)$.
"*Caso* $1 < p < 2$": Sappiamo che $\|Sf\|_2 \le \|f\|_2$ per ogni $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Per densità allora S si estende ad una contrazione da $L^2(\mathbb{R}^N)$ in sé. Vogliamo provare che S è di tipo debole $(1,1)$, cioè che esiste una costante $c > 0$ tale che $m\{|Sf| \ge t\} \le c\dfrac{\|f\|_1}{t}$ per ogni $t > 0$ e $f \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$, in modo tale da poter poi applicare il teorema di interpolazione di Marcinkiewicz ed ottenere la (2.5) per $1 < p < 2$.
Siano $f \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$ e $t > 0$. Per il Lemma 2.10 possiamo considerare la decomposizione in cubi di Calderón-Zygmund $\mathbb{R}^N = \Omega \cup F$ relativa a $|f|$ e a t. Spezziamo ora $|f|$ in una parte buona g definita da

$$g(x) = \begin{cases} |f(x)| & \text{se } x \in F \\ \frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k} |f| & \text{se } x \in Q_k, k = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

e in una parte cattiva b data da

$$b(x) = |f(x)| - g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in F \\ |f(x)| - \frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k} |f| & \text{se } x \in Q_k, k = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Osserviamo che $\displaystyle\int_{Q_k} b = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Risulta $|g| \le 2^N t$ e quindi $g \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$,

$$\begin{aligned} \|g\|_1 = \int_{\mathbb{R}^N} |g| &= \int_F |g| + \int_\Omega |g| = \int_F |f| + \sum_{k\in\mathbb{N}} \int_{Q_k} |f| \\ &= \int_F |f| + \int_\Omega |f| \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |f| = \|f\|_1 \end{aligned}$$

ed inoltre

$$\|g\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |g|^2 \le 2^N t \int_{\mathbb{R}^N} |g| = 2^N t \|f\|_1 \tag{2.6}$$

Pertanto $b = |f| - g \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$.
Poiché S è lineare, $Sf = Sg + Sb$ e quindi

$$\mu\{|Sf| \geq t\} \leq \mu\left\{|Sg| \geq \frac{t}{2}\right\} + \mu\left\{|Sb| \geq \frac{t}{2}\right\}. \tag{2.7}$$

Stimiamo separatamente i due addendi a secondo membro della (2.7). Per il primo, usando la disuguaglianza di Chebyshev e la (2.6), si ottiene subito che

$$\mu\left\{|Sg| \geq \frac{t}{2}\right\} \leq \frac{4\|Sg\|_2^2}{t^2} \leq \frac{4\|g\|_2^2}{t^2} \leq \frac{2^{N+2}}{t}\|f\|_1. \tag{2.8}$$

Stimare $\mu\left\{|Sb| \geq \frac{t}{2}\right\}$ risulta molto meno immediato.
Per ogni $k \in \mathbb{N}$ poniamo $b_k = b\chi_{Q_k}$. Poiché $b \in L^2(\mathbb{R}^N)$, $b = 0$ su F e i Q_k hanno interni a due a due disgiunti si ha che $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = b$ in $L^2(\mathbb{R}^N)$ e quindi, poiché S è continuo da $L^2(\mathbb{R}^N)$ in $L^2(\mathbb{R}^N)$, $\sum_{k=1}^{\infty} Sb_k = Sb$ in $L^2(\mathbb{R}^N)$.
Fissiamo $k \in \mathbb{N}$. La funzione b_k appartiene a $L^1(Q_k) \cap L^2(Q_k)$ e soddisfa $\int_{Q_k} b_k = 0$. Sia $(b_{k,l})_{l \in \mathbb{N}} \subset C_c^{\infty}(Q_k)$ con $\displaystyle\int_{Q_k} b_{k,l} = 0$ tale che $b_{k,l} \to b_k$ in $L^2(Q_k)$ per $l \to \infty$.
Per ogni $x \in \mathbb{R}^N \setminus \overline{Q_k} := \overline{Q_k}^c$

$$Sb_{k,l}(x) = D_{ij}(\Gamma * b_{k,l})(x) = \int_{Q_k} D_{ij}\Gamma(x-y) b_{k,l}(y)\, dy.$$

Sia y_k il centro del cubo Q_k e δ_k il suo diametro. Dato che $\displaystyle\int_{Q_k} b_{k,l} = 0$ si ha che

$$Sb_{k,l}(x) = \int_{Q_k} (D_{ij}\Gamma(x-y) - D_{ij}\Gamma(x-y_k)) b_{k,l}(y)\, dy$$

per ogni $x \in \overline{Q_k}^c$. Ora, per qualche $\xi \in \overline{yy_k}$, risulta

$$\begin{aligned}
|D_{ij}\Gamma(x-y) - D_{ij}\Gamma(x-y_k)| &\leq |\nabla D_{ij}\Gamma(x-\xi)| \cdot |y - y_k| \\
&\leq \frac{C}{|x-\xi|^{N+1}}|y-y_k| \\
&\leq \frac{C}{[\mathrm{dist}(x, Q_k)]^{N+1}}\, \delta_k
\end{aligned}$$

e quindi

$$|Sb_{k,l}(x)| \leq \frac{C\delta_k}{[\mathrm{dist}(x, Q_k)]^{N+1}} \int_{Q_k} |b_{k,l}(y)|\, dy \tag{2.9}$$

per ogni $x \in \overline{Q_k}^c$. Sappiamo che $b_{k,l} \to b_k$ in $L^2(\mathbb{R}^N)$ e quindi anche $Sb_{k,l} \to Sb_k$ in $L^2(\mathbb{R}^N)$. Possiamo inoltre sempre suppore che tali convergenze valgano anche quasi ovunque. Allora, passando al limite per $l \to \infty$

in (2.9), abbiamo che per quasi ogni $x \in \overline{Q_k}^c$

$$|Sb_k(x)| \leq \frac{C\delta_k}{[\mathrm{dist}(x, Q_k)]^{N+1}} \int_{Q_k} |b_k(y)|\, dy. \tag{2.10}$$

Consideriamo adesso la palla B_k di centro y_k e raggio δ_k. Per ogni $x \in B_k^c$

$$|x - y_k| \leq \mathrm{dist}(x, Q_k) + \frac{\delta_k}{2} \leq \mathrm{dist}(x, Q_k) + \frac{|x - y_k|}{2}$$

e quindi

$$\mathrm{dist}(x, Q_k) \geq \frac{1}{2}|x - y_k|.$$

Da quest'ultima e dalla (2.10) segue che

$$\begin{aligned} \int_{B_k^c} |Sb_k(x)|\, dx &\leq C\delta_k \int_{Q_k} |b_k(y)|\, dy \int_{|x-y_k|\geq\delta_k} \frac{1}{|x - y_k|^{N+1}}\, dx \\ &= C\delta_k \int_{Q_k} |b(y)|\, dy \int_{\delta_k}^{\infty} \frac{1}{r^2}\, dr \\ &= C \int_{Q_k} |b(y)|\, dy. \end{aligned} \tag{2.11}$$

A questo punto poniamo $\Omega^* = \cup_k B_k$ e $F^* = \mathbb{R}^N \setminus \Omega^*$. Per la (2.11), poiché $F^* \subset B_k^c$ per ogni k, si ha che $\int_{F^*} |Sb_k| \leq C \int_{Q_k} |b|$ $\forall k$, e quindi per il Teorema di Beppo Levi

$$\begin{aligned} \int_{F^*} \sum_k |Sb_k| &= \sum_k \int_{F^*} |Sb_k| \leq C \sum_k \int_{Q_k} |b| \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^N} |b| \leq C(\|f\|_1 + \|g\|_1) \\ &= 2C\|f\|_1. \end{aligned}$$

Sicché $\sum_k |Sb_k(x)| < \infty$ per q.o. $x \in F^*$ e, dato che $\sum_k Sb_k = Sb$ in $L^2(\mathbb{R}^N)$, per unicità del limite $\sum_k Sb_k(x) = Sb(x)$ per q.o. $x \in F^*$. Allora

$$\int_{F^*} |Sb| \leq 2C\|f\|_1$$

e quindi per la disuguaglianza di Chebyshev

$$\mu\left\{x \in F^* : |Sb| \geq \frac{t}{2}\right\} \leq \frac{2\|Sb\|_{L^1(F^*)}}{t} \leq \frac{C}{t}\|f\|_1. \tag{2.12}$$

Vale anche che

$$\begin{aligned}
\mu\left\{x \in \Omega^* : |Sb| \geq \frac{t}{2}\right\} &\leq \mu(\Omega^*) \leq \sum_k \mu(B_k) \\
&= \omega_N \sum_k \delta_k^N = \omega_N N^{\frac{N}{2}} \sum_k l_k^N \\
&= C(N) \sum_k |Q_k| \leq \frac{C(N)}{t} \|f\|_1, \quad (2.13)
\end{aligned}$$

dove con l_k indichiamo il lato del cubo Q_k. Per la (2.7), mettendo assieme (2.8), (2.12) e (2.13) otteniamo che

$$\mu\{|Sf| \geq t\} \leq \frac{C(N)}{t} \|f\|_1$$

per una costante $C(N) > 0$ dipendente solo dalla dimensione dello spazio N. Quest'ultima stima altro non è che la $(1,1)$-debole continuità dell'operatore S.

Possiamo finalmente applicare il teorema di Marcinkiewciz. Allora esiste una costante $C(N,p) > 0$ tale che

$$\|D_{ij} N(f)\|_p = \|Sf\|_p \leq C(N,p)\|f\|_p.$$

"*Caso* $p > 2$": Questo caso si ottiene per dualità dal caso precedente, siccome S è autoaggiunto. Infatti per ogni $f, g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} (Sf)\, g &= \int_{\mathbb{R}^N} D_{ij}(\Gamma * f)\, g = \int_{\mathbb{R}^N} (\Gamma * f)\, D_{ij} g \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} f\,(\Gamma * D_{ij} g) = \int_{\mathbb{R}^N} f\, D_{ij}(\Gamma * g) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} f\,(Sg).
\end{aligned}$$

Allora, fissato $p > 2$ e indicato con p' l'esponente coniugato, si ha che

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N} Sf\, g\right| \leq \|f\|_p \, \|Sg\|_{p'} \leq c(N,p')\|f\|_p \, \|g\|_{p'}$$

e quindi

$$\|Sf\|_p \leq C(N,p')\|f\|_p.$$

□

COROLLARIO 2.13. *Se* $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$, $1 < p < \infty$, *allora esiste* $C(N,p) > 0$ *tale che*

$$\|D^2 u\|_p \leq C(N,p)\|\Delta u\|_p. \quad (2.14)$$

DIM. Per la Proposizione 2.1 e per il Teorema di Calderón-Zygmund se $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, allora $u = N(\Delta u)$ e quindi

$$\|D^2 u\|_p = \|D^2 N(\Delta u)\|_p \leq C\|\Delta u\|_p.$$

La stima si estende a $W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$ per densità. $\square$

ESERCIZIO 2.14. Siano $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, $(Du)_{ij} = (D_i u_j)_{i,j}$ la matrice jacobiana di u e $Eu = \frac{Du+(Du)^*}{2}$ la sua parte simmetrica. Allora

$$\int_{\mathbb{R}^N} |Du|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} (\text{div u})^2 = 2\int_{\mathbb{R}^N} |\text{Eu}|^2.$$

[Suggerimento: integrare per parti].

2.3. Alcune stime interpolative in L^p

In questa sezione proviamo alcune disuguaglianze interpolative che permettono di stimare la norma L^p delle derivate prime di una funzione con le norme della funzione stessa e delle sue derivate seconde. Consideriamo dapprima il caso unidimensionale.

Sia $u \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ e sia $x \in \mathbb{R}$. Per la formula di Taylor con resto integrale per $h > 0$ si ha che

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + \int_0^h (h-t)u''(x+t)\, dt$$

da cui, portando $u'(x)$ a primo membro e dividendo tutto per h, si ottiene

$$u'(x) = \frac{u(x+h)-u(x)}{h} - \frac{1}{h}\int_0^h (h-t)u''(x+t)\, dt.$$

Se prendiamo le norme L^p allora

$$\begin{aligned} \|u'\|_p &\le \frac{2}{h}\|u\|_p + \frac{1}{h}\int_0^h (h-t)\|u''(\cdot+t)\|_p\, dt \\ &= \frac{2}{h}\|u\|_p + \frac{h}{2}\|u''\|_p. \end{aligned}$$

Posto $\varepsilon = \frac{h}{2}$ scriviamo la prima disuguaglianza interpolativa cercata

$$\|u'\|_p \le \varepsilon\|u''\|_p + \frac{1}{\varepsilon}\|u\|_p. \tag{2.15}$$

La disuguglianza vale per ogni $\varepsilon > 0$. Se minimizziamo su ε otteniamo una seconda disuguaglianza interpolativa e cioè

$$\|u'\|_p \le 2\|u''\|_p^{\frac{1}{2}}\, \|u\|_p^{\frac{1}{2}}.$$

Sia ora $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Fissati $\varepsilon > 0$ ed $i = 1, \ldots, N$ dalla (2.15) segue che

$$\int_{\mathbb{R}} |D_i u|^p\, dx_i \le 2^{p-1}\left(\varepsilon^p \int_{\mathbb{R}} |D_{ii}u|^p\, dx_i + \frac{1}{\varepsilon^p}\int_{\mathbb{R}} |u|^p\, dx_i\right),$$

da cui per il Teorema di Fubini si ha

$$\int_{\mathbb{R}^N} |D_i u|^p \, dx \leq 2^{p-1} \left(\varepsilon^p \int_{\mathbb{R}^N} |D_{ii} u|^p \, dx + \frac{1}{\varepsilon^p} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p \, dx \right)$$

e quindi

$$\|D_i u\|_p \leq c \left[\varepsilon \|D_{ii} u\|_p + \frac{1}{\varepsilon} \|u\|_p \right] \leq c \left[\varepsilon \|D^2 u\|_p + \frac{1}{\varepsilon} \|u\|_p \right] \tag{2.16}$$

per una qualche costante $c > 0$ dipendente solo da p.

Proposizione 2.15. *Sia $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$ con $1 \leq p < \infty$, allora per ogni $\varepsilon > 0$*

$$\|\nabla u\|_p \leq c\varepsilon \|D^2 u\|_p + \frac{c}{\varepsilon} \|u\|_p$$

per una qualche costante $c = c(p) > 0$. Inoltre, minimizzando su ε, si ha

$$\|\nabla u\|_p \leq 2c \|D^2 u\|_p^{\frac{1}{2}} \|u\|_p^{\frac{1}{2}}. \tag{2.17}$$

Dim. Se $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, allora dalla (2.16) si ricava che per ogni $\varepsilon > 0$

$$\|\nabla u\|_p \leq c\varepsilon \|D^2 u\|_p + \frac{c}{\varepsilon} \|u\|_p.$$

Quindi la stima si estende per densità a $W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$. □

Mettendo assieme la stima ottenuta nella proposizione precedente e quella del Corollario 2.13 possiamo stimare la norma L^p del gradiente di una funzione con quella della funzione stessa e delle sue derivate seconde pure.

Corollario 2.16. *Sia $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$ con $1 < p < \infty$, allora esiste $C = C(N,p) > 0$ tale che per ogni $\varepsilon > 0$ risulta*

$$\|\nabla u\|_p \leq \varepsilon \|\Delta u\|_p + \frac{C}{\varepsilon} \|u\|_p.$$

Il corollario seguente afferma che l'operatore Δ con dominio $W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$ è un operatore chiuso.

Corollario 2.17. *Se $1 < p < \infty$, allora esiste $C = C(N,p) > 0$ tale che*

$$\|u\|_{2,p} \leq C(N,p) \left[\|u\|_p + \|\Delta u\|_p \right]$$

per ogni $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$.

2.4. Esistenza e unicità per il Laplaciano in $\mathbb{R}^N$

Siamo a questo punto in grado di provare esistenza e unicità per l'equazione

$$\lambda u - \Delta u = f$$

con $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e $\lambda > 0$.

TEOREMA 2.18. *Siano $1 < p < \infty$ e $\lambda > 0$, allora per ogni $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ esiste un'unica $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$ tale che*

$$\lambda u - \Delta u = f.$$

Inoltre

$$\lambda \|u\|_p + \lambda^{\frac{1}{2}} \|\nabla u\|_p + \|D^2 u\|_p \leq C \|f\|_p. \tag{2.18}$$

Per provare il teorema abbiamo bisogno del seguente

LEMMA 2.19. *Se $1 < p < \infty$ e $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$ allora*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Delta u \, u |u|^{p-2} \leq 0\,.$$

DIM. Distinguiamo i due casi: $p \geq 2$ e $1 < p < 2$.
"$p \geq 2$": Se $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$ allora $u|u|^{p-2} \in W^{1,p'}(\mathbb{R}^N)$. Integrando per parti otteniamo

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Delta u \; u|u|^{p-2} = -(p-1) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 |u|^{p-2} \leq 0. \tag{2.19}$$

"$p < 2$": In questo caso non è detto che $u|u|^{p-2}$ sia in $W^{1,p'}(\mathbb{R}^N)$. Proviamo dapprima la tesi per funzioni regolari a supporto compatto. Sia $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ e dato $\delta > 0$ poniamo

$$u_\delta := u(u^2 + \delta)^{\frac{p-2}{2}} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Per le funzioni u_δ è valida la formula d'integrazione per parti:

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(u^2 + \delta)^{\frac{p-2}{2}} \Delta u = - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 (u^2 + \delta)^{\frac{p-4}{2}} ((p-1)u^2 + \delta) \leq 0$$

e quindi

$$\int_{\mathbb{R}^N} u|u|^{p-2} \Delta u = \lim_{\delta \to 0} \int_{\mathbb{R}^N} u(u^2 + \delta)^{\frac{p-2}{2}} \Delta u \leq 0.$$

Siano adesso $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$ e $(u_n) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tale che $u_n \to u$ in $W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$. Allora $u_n|u_n|^{p-2} \to u|u|^{p-2}$ in $L^{p'}(\mathbb{R}^N)$, $\Delta u_n \to \Delta u$ in $L^p(\mathbb{R}^N)$ e quindi

$$u_n |u_n|^{p-2} \Delta u_n \to u|u|^{p-2} \Delta u$$

in $L^1(\mathbb{R}^N)$. Ne segue

$$\int_{\mathbb{R}^N} u|u|^{p-2} \Delta u = \lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}^N} u_n |u_n|^{p-2} \Delta u_n \leq 0.$$

□

DIM.(Teorema 2.18)
"Unicità + stima": Siano $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ ed $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$ tali che $\lambda u - \Delta u = f$. Moltiplichiamo per $u|u|^{p-2}$ ed otteniamo

$$\lambda |u|^p - \Delta u \, u |u|^{p-2} = f u |u|^{p-2}.$$

Integriamo su $\mathbb{R}^N$ ed usiamo il Lemma 2.19 e la disuguaglianza di Hölder

$$\begin{aligned}\lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p &\le \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p - \int_{\mathbb{R}^N} \Delta u\, u|u|^{p-2} \\ &\le \int_{\mathbb{R}^N} |f||u|^{p-1} \le \|f\|_p \, \|u\|_p^{p-1}.\end{aligned}$$

Quindi, dividendo primo e secondo membro per $\|u\|_p^{p-1}$, si ha

$$\lambda \|u\|_p \le \|f\|_p. \tag{2.20}$$

Questa disuguaglianza implica l'unicità della soluzione. A questo punto, per il Teorema di Calderón-Zygmund

$$\|D^2 u\|_p \le C\|\Delta u\|_p = C\|\lambda u - f\|_p \le 2C\|f\|_p \tag{2.21}$$

e per la disuguaglianza interpolativa (2.17)

$$\lambda^{\frac{1}{2}} \|\nabla u\|_p \le \lambda^{\frac{1}{2}}\, 2c\, \|D^2 u\|_p^{\frac{1}{2}} \, \|u\|_p^{\frac{1}{2}} \le 2\sqrt{2}c\sqrt{C}\|f\|_p. \tag{2.22}$$

Mettiamo insieme (2.20), (2.21) e (2.22) e, ridefinendo opportunamente la costante C, otteniamo la stima cercata.
"Esistenza": Data $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, la soluzione in $W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$ di $\lambda u - \Delta u = f$ è la funzione $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ la cui trasformata di Fourier è data da

$$\hat{u} = \frac{\hat{f}}{\lambda + |\xi|^2}.$$

Sia ora $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ tale che f_n converga ad f in $L^p(\mathbb{R}^N)$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $u_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ la soluzione di $\lambda u_n - \Delta u_n = f_n$. Per la (2.18) per ogni $n, m \in \mathbb{N}$

$$\|u_n - u_m\|_{2,p} \le k\|f_n - f_m\|_p,$$

per una qualche costante $k > 0$, cioè la successione u_n è di Cauchy e quindi convergente in $W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$ ad una $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$. Allora, passando al limite in $\lambda u_n - \Delta u_n = f_n$, si ha

$$\lambda u - \Delta u = f.$$

□

2.5. I casi $p = 1$, $p = \infty$

Le stime della precedente sezione non valgono nei casi $p = 1$ e $p = \infty$. I seguenti esempi mostrano infatti come non sia possibile controllare le norme L^1 o L^∞ delle singole derivate seconde di una funzione con quelle del suo laplaciano.

Esempio 2.20. *Sia $N = 2$. Non esiste C costante positiva tale che per ogni $u \in C_c^\infty(B(0,1))$ risulti*

$$\|D_{xy}u\|_\infty \le C\,[\|\Delta u\|_\infty + \|u\|_\infty + \|\nabla u\|_\infty]. \tag{2.23}$$

DIM. Consideriamo, per ogni $0 < \varepsilon \leq 1$, le funzioni

$$u_\varepsilon(x,y) = \eta(xy)xy\log(\varepsilon + x^2 + y^2)$$

dove $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$, $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta \equiv 1$ in $B(0, \frac{1}{2})$ e *supp* $\eta \subset B(0,1)$. Risulta $u_\varepsilon \in C_c^\infty(B(0,1))$. Inoltre si prova facilmente che esiste $M > 0$ tale che

$$\|u_\varepsilon\|_\infty + \|\nabla u\|_\infty + \|\Delta u_\varepsilon\|_\infty \leq M \qquad \forall\, 0 < \varepsilon \leq 1.$$

D'altra parte si ottiene

$$\|D_{xy}u_\varepsilon\|_\infty \geq |D_{xy}u_\varepsilon(0,0)| = |\log \varepsilon|$$

quindi non esiste una costante C tale che valga (2.23) per ogni $\varepsilon > 0$. □

ESEMPIO 2.21. *Sia $N = 2$. Non esiste C costante positiva tale che per ogni $u \in C_c^\infty(B(0,1))$ risulti*

$$\|D_{xy}u\|_1 \leq C\left[\|\Delta u\|_1 + \|u\|_{1,1}\right]. \tag{2.24}$$

DIM. Supponiamo che esista $C > 0$ tale che valga (2.24) per ogni $u \in C_c^\infty(B(0,1))$. Sia $v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ con *supp* $v \subset B(0,\rho)$ e sia $R \geq \rho$. Poniamo $u(x,y) = v(Rx,Ry)$. Risulta $u \in C_c^\infty(B(0,1))$ e, usando (2.24),

$$\begin{aligned} R^2\int_{B(0,1)} |D_{xy}v(Rx,Ry)| \quad &\leq \quad C\Big[R^2\int_{B(0,1)} |\Delta v(Rx,Ry)| \\ &\qquad + R\int_{B(0,1)} |\nabla v(Rx,Ry)| \\ &\qquad + \int_{B(0,1)} |v(Rx,Ry)|\Big] \end{aligned}$$

da cui

$$\int_{\mathbb{R}^2} |D_{xy}v| \leq C\left[\int_{\mathbb{R}^2} |\Delta v| + \frac{1}{R}\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla v| + \frac{1}{R^2}\int_{\mathbb{R}^2} |v|\right].$$

Facendo tendere R a $+\infty$ otteniamo

$$\int_{\mathbb{R}^2} |D_{xy}v| \leq C\int_{\mathbb{R}^2} |\Delta v| \tag{2.25}$$

per ogni $v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ e, per densità, per ogni $v \in W^{2,1}(\mathbb{R}^2)$.
Siano ora $f, g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ e consideriamo $\tilde{f}$, $\tilde{g} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ tali che $\tilde{f} - \Delta\tilde{f} = f$ e $\tilde{g} - \Delta\tilde{g} = g$, ossia

$$\tilde{f} = (I-\Delta)^{-1}f; \qquad \tilde{g} = (I-\Delta)^{-1}g.$$

Integrando per parti si ha

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} (I-\Delta)^{-1}fg \quad &= \quad \int_{\mathbb{R}^2} (I-\Delta)^{-1}f(\tilde{g} - \Delta\tilde{g}) \\ &= \quad \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{f}(\tilde{g} - \Delta\tilde{g}) = \int_{\mathbb{R}^2} (\tilde{f} - \Delta\tilde{f})\tilde{g} = \int_{\mathbb{R}^2} f(I-\Delta)^{-1}g. \end{aligned}$$

Integrando ancora una volta per parti, applicando l'uguaglianza sopra provata e usando la commutatività dell'operatore risolvente con le derivate seconde, segue che

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} D_{xy} f g &= \int_{\mathbb{R}^2} D_{xy}(I-\Delta)^{-1}(I-\Delta) f g \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} (I-\Delta)^{-1} D_{xy}(I-\Delta) f g \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} D_{xy}(I-\Delta) f (I-\Delta)^{-1} g \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} (I-\Delta) f D_{xy}(I-\Delta)^{-1} g
\end{aligned}$$

da cui, applicando (2.25) e tenendo presente che $\|\tilde{g}\|_1 \leq \|g\|_1$, otteniamo

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}^2} D_{xy} f g \right| &\leq \|(I-\Delta) f\|_\infty \|D_{xy}(I-\Delta)^{-1} g\|_1 \\
&\leq C\|(I-\Delta) f\|_\infty \|\Delta(I-\Delta)^{-1} g\|_1 \\
&= C\|(I-\Delta) f\|_\infty \|g-(I-\Delta)^{-1} g\|_1 \\
&\leq 2C\|g\|_1 \|(I-\Delta) f\|_\infty
\end{aligned}$$

e quindi

$$\|D_{xy} f\|_\infty \leq 2C[\|f\|_\infty + \|\Delta f\|_\infty],$$

che contraddice (2.23). □

ESERCIZIO 2.22. Provare che

$$D_{ij}(I-\Delta)^{-1} h = (I-\Delta)^{-1} D_{ij} h$$

se $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

ESERCIZIO 2.23. Provare che

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Delta h(sign\ h) \leq 0 \qquad \text{con } h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

e

$$sign\ h = \begin{cases} 1 & \text{se } h > 0 \\ -1 & \text{se } h < 0 \\ 0 & \text{se } h = 0 \end{cases}$$

facendo tendere p a 1 nel Lemma 2.19. Dedurre quindi che $\|\tilde{g}\|_1 \leq \|g\|_1$ nell'Esempio (2.21).

ESERCIZIO 2.24. Provare che se $\Delta u \in L^1$ allora $\nabla u \in L^p$ per ogni $p < \frac{N}{N-1}$.