Introduzione

Questo quaderno è basato sulle lezioni tenute da G. Metafune nel corso di Analisi Reale ed Equazioni Ellittiche per gli studenti di dottorato in Matematica dell'Università di Lecce, nell'anno accademico 2003-2004. Il quaderno è la naturale continuazione del quaderno 4/2004 dove vengono presentati metodi risolutivi L^2 e C^α, ma può essere letto indipendentemente.
La trattazione è divisa in due parti. Nella prima vengono trattati i teoremi classici di interpolazione di Riesz-Thorin e Marcinkiewicz cercando di mostrare una varietà di applicazioni anche al di fuori della teoria delle equazioni ellittiche. Per questa ragione sono stati inseriti risultati classici quali il teorema di derivazione dell'integrale di Lebesgue, i potenziali di Riesz, le immersioni di Sobolev.
La seconda parte inizia con la disuguaglianza di Calderón-Zygmund che permette di stimare le derivate seconde di una funzione in $W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$ ($1 < p < \infty$) col suo Laplaciano. Una volta ottenuto questo risultato, gli usuali metodi di perturbazione, localizzazione e congelamento dei coefficienti permettono di ottenere le stime a priori L^p per un operatore ellittico generale. La risolubilità del problema ellittico per il Laplaciano, le stime a priori e il metodo di continuità consentono poi di avere teoremi di esistenza e unicità. Per semplicità e per evitare una teoria delle tracce al bordo che comporterebbe l'introduzione di spazi di Sobolev frazionari, la trattazione è limitata al problema di Dirichlet con dato omogeneo al bordo.

V. Manco
G. Metafune
C. Spina
Lecce, 18 febbraio 2005

CAPITOLO 1

Alcuni teoremi classici di interpolazione

Questo capitolo è incentrato su due teoremi fondamentali della teoria classica di interpolazione: il Teorema di Riesz-Thorin ed il Teorema di Marcinkiewicz. Quest'ultimo in particolare sarà utile per la stima delle derivate seconde del potenziale newtoniano secondo l'approccio di Calderón e Zygmund.
Accanto a questi risultati, abbiamo ritenuto interessante presentare una serie di conseguenze e applicazioni che vanno dalla trasformata di Fourier agli operatori di convoluzione, dall'operatore massimale di Hardy-Littlewood ai potenziali di Riesz.

Nel seguito $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ denota uno spazio di misura dove $\mathcal{B}$ è una $\sigma-$algebra di sottoinsiemi di Ω e μ una misura positiva $\sigma-$finita su $\mathcal{B}$. Indichiamo poi con Σ l'insieme delle funzioni semplici

$$\left\{ \sum_{i=1}^{k} c_i \chi_{A_i} \ : \ \begin{array}{l} k \in \mathbb{N}, A_i \text{ misurabile }, 0 \leq \mu(A_i) < \infty \\ \text{e } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ per } i \neq j \end{array} \right\}$$

e con $\mathcal{M}(\Omega)$ quello delle funzioni misurabili in Ω. Le funzioni $p-$sommabili in Ω rispetto alla misura μ definiscono lo spazio $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$. Denotiamo con $\|\cdot\|_p$ la norma standard in $L^p(\Omega)$. Ricordiamo che Σ è denso in $L^p(\Omega)$ per ogni $p \in [1, \infty]$. Inoltre, data $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ è possibile trovare una successione di funzioni semplici convergente a f sia in $L^p(\Omega)$ che in $L^q(\Omega)$.

1.1. Il Teorema di interpolazione di Riesz-Thorin

Sia dato un operatore lineare $T : \Sigma \to \mathcal{M}(\Omega)$ per cui esistano $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$ con $(p_0, q_0) \neq (p_1, q_1)$ ed $M_0, M_1 > 0$ tali che $\|Tf\|_{q_0} \leq M_0 \|f\|_{p_0}$ e $\|Tf\|_{q_1} \leq M_1 \|f\|_{p_1}$ per ogni $f \in \Sigma$. Allora, per densità, si ha $T : L^{p_0}(\Omega) \to L^{q_0}(\Omega)$ e $T : L^{p_1}(\Omega) \to L^{q_1}(\Omega)$. Il Teorema di Riesz-Thorin permette di "interpolare" tra gli spazi intermedi, permette cioè di definire T anche da $L^{p_\vartheta}(\Omega)$ in $L^{q_\vartheta}(\Omega)$ con p_ϑ e q_ϑ compresi tra p_0 e p_1 (rispettivamente q_0 e q_1).

La dimostrazione di questo teorema si basa su due risultati di analisi complessa che enunciamo e proviamo di seguito. Il primo è un principio del massimo modulo per una funzione olomorfa limitata in una striscia.

LEMMA 1.1 (Phragmen-Lindelöf). *Sia $S = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1\}$ e sia f una funzione continua e limitata in S e olomorfa in $\overset{\circ}{S}$. Se $|f(z)| \leq M$ per ogni $z \in \partial S$, allora $|f(z)| \leq M$ per ogni $z \in S$.*

DIM. Supponiamo dapprima che $\lim_{|z|\to\infty,\ z\in S} |f(z)| = 0$. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $R > 0$ tale che

$$|f(z)| \leq \varepsilon$$

per ogni $z \in S \setminus Q_R$, dove $Q_R = \{z \in S : |Im\, z| \leq R\}$. Per il teorema del massimo modulo applicato al limitato Q_R abbiamo che

$$\sup_{z \in Q_R} |f(z)| \leq \max\{M, \varepsilon\},$$

da cui, mandando ε a zero e quindi R a $+\infty$, si ottiene la tesi.
Ora per ogni $n \in \mathbb{N}$ consideriamo la *funzione barriera*

$$f_n(z) = f(z) e^{\frac{z^2}{n}}, \quad z \in S.$$

Come si può facilmente osservare, risulta $\lim\limits_{\substack{|z|\to\infty \\ z\in S}} f_n(z) = 0$, sicché per il primo passo risulta

$$|f(z) e^{\frac{z^2}{n}}| \leq M e^{\frac{1}{n}}$$

per ogni $z \in S$. Passando al limite per $n \to \infty$ si ottiene la tesi. □

OSSERVAZIONE 1.2. Il Lemma 1.1 vale in una qualsiasi striscia del piano complesso. La dimostrazione segue da quella già vista, componendo la funzione con opportune traslazioni e rotazioni.

Dalla dimostrazione del Lemma 1.1 si vede che l'ipotesi che $f \in L^\infty(S)$ può essere indebolita richiedendo ad esempio che per ogni $\varepsilon > 0$ si abbia

$$\lim_{\substack{|z|\to\infty \\ z\in S}} f(z) e^{\varepsilon z^2} = 0.$$

E' inevitabile tuttavia imporre una condizione di crescita come dimostra il controesempio seguente.

ESEMPIO 1.3. Consideriamo la funzione $f(z) = e^{e^{iz}}$ definita in $S = \{z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{2} \leq Re\, z \leq \frac{\pi}{2}\}$. La funzione f ha modulo 1 su ∂S, mentre per $Re\, z = 0$

$$|f(z)| = e^{e^{-Im\, z}}$$

esplode per $Im\, z \to -\infty$.

La prossima proposizione raffina la stima del Lemma 1.1.

Proposizione 1.4 (Teorema delle tre rette). *Sia* $S = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1\}$ *e sia* f *una funzione continua e limitata in* S *e olomorfa in* $\overset{\circ}{S}$. *Supponiamo che*

(a) $|f(z)| \leq M_0$ *se* $\operatorname{Re} z = 0$,
(b) $|f(z)| \leq M_1$ *se* $\operatorname{Re} z = 1$.

Allora per ogni $\vartheta \in [0,1]$ *risulta*

$$|f(z)| \leq M_0^{1-\vartheta} M_1^{\vartheta} \qquad se \operatorname{Re} z = \vartheta. \tag{1.1}$$

Dim. Supponiamo $M_0, M_1 > 0$. Per ogni $z \in \mathbb{C}$, sia $g(z) = M_0^{1-z} M_1^z = e^{(1-z)\log M_0} e^{z \log M_1}$. La funzione g è olomorfa in $\mathbb{C}$ e tale che

$$0 < m \leq |g(z)| = M_0^{1-Re\, z} M_1^{Re\, z} \leq M$$

per ogni $z \in S$, dove m ed M sono rispettivamente il minimo ed il massimo tra M_0 e M_1. A questo punto applichiamo il Lemma 1.1 alla funzione $h = \dfrac{f}{g}$ ed otteniamo che

$$|h(z)| = \frac{|f(z)|}{|g(z)|} \leq \sup_{\partial S} |h(z)| = 1$$

per ogni $z \in S$. In particolare per $Re\, z = \vartheta$ si ha la (1.1).
Supponiamo adesso che almeno una delle due costanti M_0, M_1 sia nulla. Se, per esempio, $M_0 = 0$, allora $|f(z)| \leq \varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$ se $Re\, z = 0$. Dal passo precedente si ottiene

$$|f(z)| \leq \varepsilon^{1-\vartheta} M_1^{\vartheta}.$$

Facendo tendere $\varepsilon \to 0$ si ha $f \equiv 0$. □

Possiamo adesso dimostrare il risultato principale della sezione.

Teorema 1.5 (Riesz-Thorin). *Sia* $T : \Sigma \to \mathcal{M}(\Omega)$ *un operatore lineare e siano* $1 \leq p_0, q_0, p_1, q_1 \leq \infty$, *con* $(p_0, q_0) \neq (p_1, q_1)$, *tali che*

$$\|Tf\|_{q_0} \leq M_0 \|f\|_{p_0} \quad e \quad \|Tf\|_{q_1} \leq M_1 \|f\|_{p_1}$$

per ogni $f \in \Sigma$.
Per ogni $0 \leq \vartheta \leq 1$, *posti* $\dfrac{1}{p_\vartheta} = \dfrac{1-\vartheta}{p_0} + \dfrac{\vartheta}{p_1}$ *e* $\dfrac{1}{q_\vartheta} = \dfrac{1-\vartheta}{q_0} + \dfrac{\vartheta}{q_1}$, *si ha che*

$$\|Tf\|_{q_\vartheta} \leq M_0^{1-\vartheta} M_1^{\vartheta} \|f\|_{p_\vartheta}$$

per ogni $f \in \Sigma$.

Osservazione 1.6. Notiamo innanzitutto che, data la densità di Σ in $L^{p_i}(\Omega)$, $i = 0, 1$, l'operatore T può essere esteso a tutto lo spazio $L^{p_i}(\Omega)$ ottenendo così un operatore continuo

$$T_{p_i, q_i} : L^{p_i}(\Omega) \to L^{q_i}(\Omega).$$

Il teorema di Riesz-Thorin dice che per ogni $\vartheta \in [0,1]$ l'operatore T può essere esteso ad un operatore continuo

$$T_{p_\vartheta,q_\vartheta} : L^{p_\vartheta}(\Omega) \to L^{q_\vartheta}(\Omega),$$

dove p_ϑ è compreso tra p_0 e p_1 e q_ϑ è compreso tra q_0 e q_1.

DIM. Fissiamo $\vartheta \in [0,1]$.
(Passo 1) Supponiamo che $1 < p_0, q_0, p_1, q_1 < \infty$. Per ottenere la tesi è sufficiente provare che

$$\left| \int_\Omega Tf \cdot g \, d\mu \right| \le M_0^{1-\vartheta} M_1^{\vartheta} \|f\|_{p_\vartheta} \|g\|_{q'_\vartheta}$$

per ogni f e g funzioni semplici, dove con q'_ϑ indichiamo l'esponente coniugato di q_ϑ.
Siano allora $f = \sum_{k=1}^r c_k \chi_{A_k}$ e $g = \sum_{j=1}^s d_j \chi_{B_j}$, con $c_k, d_j \neq 0$, due funzioni semplici non nulle tali che $\|f\|_{p_\vartheta}, \|g\|_{q'_\vartheta} \le 1$. Per ogni $z \in \mathbb{C}$ con $0 \le Re\, z \le 1$ poniamo

$$\frac{1}{p_z} = \frac{1-z}{p_0} + \frac{z}{p_1} \quad \text{e} \quad \frac{1}{q'_z} = \frac{1-z}{q'_0} + \frac{z}{q'_1}.$$

Se $c_k = |c_k| e^{iu_k}$ e $d_j = |d_j| e^{iv_j}$, definiamo

$$f_z = \sum_{k=1}^r |c_k|^{\frac{p_\vartheta}{p_z}} e^{iu_k} \chi_{A_k} \quad \text{e} \quad g_z = \sum_{j=1}^s |d_j|^{\frac{q'_\vartheta}{q'_z}} e^{iv_j} \chi_{B_j}. \tag{1.2}$$

Osserviamo che $f_\vartheta = f$ e $g_\vartheta = g$. Per ogni $z \in \mathbb{C}$ poniamo

$$\Phi(z) = \int_\Omega Tf_z \cdot g_z \, d\mu = \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^s |c_k|^{\frac{p_\vartheta}{p_z}} e^{iu_k} |d_j|^{\frac{q'_\vartheta}{q'_z}} e^{iv_j} \int_\Omega T(\chi_{A_k}) \cdot \chi_{B_j} \, d\mu \,.$$

Evidentemente Φ è olomorfa in $\mathbb{C}$. Inoltre Φ è limitata in $S = \{0 \le Re\, z \le 1\}$ poiché

$$\left| |c_k|^{\frac{p_\vartheta}{p_z}} \right| = |c_k|^{p_\vartheta \left(\frac{1-Re\, z}{p_0} + \frac{Re\, z}{p_1} \right)} \quad \text{e} \quad \left| |d_j|^{\frac{q'_\vartheta}{q'_z}} \right| = |d_j|^{q'_\vartheta \left(\frac{1-Re\, z}{q'_0} + \frac{Re\, z}{q'_1} \right)}.$$

Al fine di applicare il teorema delle tre rette stimiamo Φ al bordo di S.
Sia $z \in \mathbb{C}$, $Re\, z = 0$, allora $|f_z| = \sum_{k=1}^r |c_k|^{\frac{p_\vartheta}{p_0}} \chi_{A_k}$, $|g_z| = \sum_{j=1}^s |d_j|^{\frac{q'_\vartheta}{q'_0}} \chi_{B_j}$ e quindi

$$\|f_z\|_{p_0} = \|f\|_{p_\vartheta}^{\frac{p_\vartheta}{p_0}} \quad \text{e} \quad \|g_z\|_{q'_0} = \|g\|_{q'_\vartheta}^{\frac{q'_\vartheta}{q'_0}}, \quad Re\, z = 0. \tag{1.3}$$

Analogamente, se $z \in \mathbb{C}$ con $Re\, z = 1$, si ha $|f_z| = \sum_{k=1}^r |c_k|^{\frac{p_\vartheta}{p_1}} \chi_{A_k}$, $|g_z| = \sum_{j=1}^s |d_j|^{\frac{q'_\vartheta}{q'_1}} \chi_{B_j}$ e quindi

$$\|f_z\|_{p_1} = \|f\|_{p_\vartheta}^{\frac{p_\vartheta}{p_1}} \quad \text{e} \quad \|g_z\|_{q'_1} = \|g\|_{q'_\vartheta}^{\frac{p'_\vartheta}{q'_1}}, \quad Re\, z = 1. \tag{1.4}$$

Da (1.3) discende che se $Re\, z = 0$

$$|\Phi(z)| \leq \|Tf_z\|_{q_0}\|g_z\|_{q_0'} \leq M_0\|f\|_{p_\vartheta}^{\frac{p_\vartheta}{p_0}}\|g\|_{q_\vartheta'}^{\frac{q_\vartheta'}{q_0'}} \leq M_0,$$

mentre da (1.4) si ha che se $Re\, z = 1$

$$|\Phi(z)| \leq \|Tf_z\|_{q_1}\|g_z\|_{q_1'} \leq M_1\|f\|_{p_\vartheta}^{\frac{p_\vartheta}{p_1}}\|g\|_{q_\vartheta'}^{\frac{q_\vartheta'}{q_1'}} \leq M_1.$$

Per la Proposizione 1.4, ricordando che $f_\vartheta = f$ e $g_\vartheta = g$, abbiamo che

$$\left|\int_\Omega Tf \cdot g\, d\mu\right| = |\Phi(\vartheta)| \leq M_0^{1-\vartheta}M_1^\vartheta$$

che è proprio quello che ci proponevamo di dimostrare.

(Passo 2) Passiamo ora al caso generale in cui p_0, p_1, q_0, q_1 possono assumere i valori $1, \infty$. La dimostrazione presenta delle differenze rispetto al primo passo solo nei casi in cui $p_0 = p_1 = \infty$ o $q_0 = q_1 = 1$. Nel primo caso perde di significato la definizione di f_z per via dell'esponente p_ϑ che vale ∞. Prendiamo allora $f_z = f$ e g_z come in (1.2) e ripetiamo la dimostrazione del primo passo. Similmente, nel secondo caso, cioè il caso in cui $q_\vartheta' = \infty$, prendiamo f_z come in (1.2) e $g_z = g$. $\square$

OSSERVAZIONE 1.7. La dimostrazione del teorema di Riesz-Thorin nel caso in cui $p_0 = p_1$ si può semplificare. E' sufficiente infatti applicare la disuguaglianza di Hölder ed ottenere

$$\|Tf\|_{q_\vartheta} \leq \|Tf\|_{q_0}^{1-\vartheta}\|Tf\|_{q_1}^\vartheta \leq M_0^{1-\vartheta}M_1^\vartheta\|f\|_{p_0}.$$

Osserviamo inoltre che le estensioni dell'operatore T sono tali che se $f \in L^r(\Omega) \cap L^s(\Omega)$, con $p_0 \leq r, s \leq p_1$, allora $T_r f = T_s f$, dove con T_r e T_s indichiamo rispettivamente l'estensione di T a $L^r(\Omega)$ e l'estensione di T a $L^s(\Omega)$. Infatti, presa $f \in L^r(\Omega) \cap L^s(\Omega)$ esiste una successione di funzioni semplici $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ che converge a f in $L^r(\Omega)$ e in $L^s(\Omega)$. Per continuità e a meno di estratte si ha che $T_r f_n$ converge a $T_r f$ e $T_s f_n$ converge a $T_s f$ quasi ovunque. Ma $T_r f_n = T_s f_n = T f_n$ perché f_n è semplice e quindi $T_r f = T_s f$ quasi ovunque.

1.2. Applicazioni del Teorema di Riesz-Thorin

1.2.1. Trasformata di Fourier. In questa sezione assumiamo che la misura μ sia la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^N$. Richiamiamo la definizione di trasformata di Fourier ed alcune delle sue proprietà principali. Data una funzione f in $L^1(\mathbb{R}^N)$ indichiamo con $\mathcal{F}f$ o con $\hat{f}$ la trasformata di Fourier di f definita da

$$\mathcal{F}f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-2\pi i x\cdot\xi} f(x)\, dx\,, \qquad \xi \in \mathbb{R}^N\,. \tag{1.5}$$

La trasformata di Fourier è un isomorfismo da $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, dove $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ è la classe di Schwarz delle funzioni a decrescenza rapida all'infinito, con inverso dato dall'antitrasformata di Fourier, che indichiamo con $\mathcal{F}^{-1}f$ o con $\check{f}$, definita da

$$\mathcal{F}^{-1}f(\xi) = \mathcal{F}f(-\xi)\,, \qquad \xi \in \mathbb{R}^N\,.$$

Inoltre per ogni $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ valgono le seguenti proprietà:

(a) $\mathcal{F}(u * v)(\xi) = \mathcal{F}u(\xi) \cdot \mathcal{F}v(\xi)$ per ogni $\xi \in \mathbb{R}^N$;
(b) $D^\beta \mathcal{F}u(\xi) = \mathcal{F}v(\xi)$ per ogni multiindice $\beta \in \mathbb{N}_0^N$ e $\xi \in \mathbb{R}^N$, dove $v(x) = (-2\pi i x)^\beta u(x)$;
(c) $\mathcal{F}\big(D^\beta u\big)(\xi) = (2\pi i \xi)^\beta \mathcal{F}u(\xi)$ per ogni multiindice $\beta \in \mathbb{N}_0^N$ e $\xi \in \mathbb{R}^N$.

E' ben noto che

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^N) \to L^\infty(\mathbb{R}^N) \quad \text{con } \|\mathcal{F}\|_{1,\infty} \le 1$$

e che (Teorema di Plancherel) la trasformata di Fourier si estende ad un'isometria di $L^2(\mathbb{R}^N)$

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N) \quad \text{con } \|\mathcal{F}\|_{2,2} = 1.$$

Il teorema di Riesz-Thorin permette di dimostrare la continuità di $\mathcal{F}$ tra altri spazi funzionali.

TEOREMA 1.8 (Hausdorff-Young). *Se $1 \le p \le 2$, allora per ogni $f \in \Sigma$*

$$\|\mathcal{F}f\|_{p'} \le \|f\|_p.$$

DIM. Sia $1 \le p \le 2$ e sia $\vartheta \in [0,1]$ tale che $\frac{1}{p} = (1-\vartheta) + \frac{\vartheta}{2} = 1 - \frac{\vartheta}{2}$. Per il teorema di Riesz-Thorin, per ogni $f \in \Sigma$

$$\|\mathcal{F}f\|_{q_\vartheta} \le \|f\|_p$$

dove $\frac{1}{q_\vartheta} = \frac{1-\vartheta}{\infty} + \frac{\vartheta}{2} = \frac{\vartheta}{2}$. Ma allora q_ϑ è proprio l'esponente coniugato di p e quindi la tesi è provata. □

Possiamo allora estendere la trasformata di Fourier ad ogni L^p con $1 \le p \le 2$, ottenendo un operatore continuo

$$\mathcal{F} : L^p(\Omega) \to L^{p'}(\Omega), \quad \text{con } \|\mathcal{F}\|_{p,p'} \le 1.$$

Facciamo vedere adesso che queste sono le uniche estensioni possibili della trasformata di Fourier nell'ambito degli spazi L^p.

PROPOSIZIONE 1.9. *Siano* $1 \leq p, q \leq \infty$ *tali che* $\|\mathcal{F}f\|_q \leq C\|f\|_p$ *per ogni* $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$; *allora* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

DIM. Fissata $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ non nulla, per ogni $\lambda > 0$ poniamo $f_\lambda(x) = f(\lambda x)$. La trasformata di Fourier di f_λ è

$$\mathcal{F}f_\lambda(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-2\pi i x\cdot\xi} f_\lambda(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-2\pi i x\cdot\frac{\xi}{\lambda}} f(x)\lambda^{-N}\, dx = \lambda^{-N}\mathcal{F}f\left(\frac{\xi}{\lambda}\right).$$

Siccome $\|\mathcal{F}f_\lambda\|_q = \lambda^{-N+\frac{N}{q}}\|\mathcal{F}f\|_q$ e $\|f_\lambda\|_p = \lambda^{\frac{-N}{p}}\|f\|_p$, l'ipotesi implica immediatamente

$$\|\mathcal{F}f\|_q \leq C\lambda^{-N(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1)}\|f\|_p.$$

Se $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 > 0$ allora mandando $\lambda \to \infty$ si otterrebbe $\mathcal{F}f = 0$, da cui $f = 0$ contro l'ipotesi. Analogamente se $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 < 0$ (mandando $\lambda \to 0$). Allora necessariamente $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. □

La proposizione appena vista prova che la trasformata di Fourier può essere un operatore limitato solo da $L^p(\mathbb{R}^N)$ in $L^{p'}(\mathbb{R}^N)$, con p' esponente coniugato di p. Ora vogliamo vedere che la condizione $p \leq 2$ non può essere rimossa. A questo scòpo, consideriamo $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, non nulla, tale che $supp\, \hat{u} \subset B(0,1)$ (data $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ con $supp v \subset B(0,1)$, sia $u = \hat{v}$).
Per ogni $t > 0$ definiamo u_t tramite la sua trasformata di Fourier

$$\hat{u}_t(\xi) = \hat{u}(\xi)e^{it|\xi|^2}. \tag{1.6}$$

Siccome $\hat{u}_t \in C_c^\infty(B(0,1)) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, si ha $u_t \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

LEMMA 1.10. *Per ogni* $t > 0$

(a) $\|u_t\|_2 = \|u\|_2$
(b) $\|u_t\|_\infty \leq c\, t^{-\frac{N}{2}}\|u\|_1$.

DIM. (a) Applicando il teorema di Plancherel si ha immediatamente che $\|u_t\|_2 = \|\hat{u}_t\|_2 = \|\hat{u}\|_2 = \|u\|_2$.
(b) Per ogni $\varepsilon > 0$ definiamo $u_{t,\varepsilon}$ tramite $\hat{u}_{t,\varepsilon}(\xi) = \hat{u}(\xi)e^{-(\varepsilon-it)|\xi|^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Allora

$$u_{t,\varepsilon} = u * (\varepsilon - it)^{\frac{N}{2}} e^{\frac{-\pi^2|\cdot|^2}{(\varepsilon-it)}}$$

e

$$\|u_{t,\varepsilon}\|_\infty \leq \|u\|_1\, |\varepsilon - it|^{\frac{N}{2}}. \tag{1.7}$$

Per il teorema di convergenza dominata $\hat{u}_{t,\varepsilon} \to \hat{u}_t$ in L^2 per $\varepsilon \to 0$ e quindi, per il teorema di Plancherel, $u_{t,\varepsilon} \to u_t$ in L^2 per $\varepsilon \to 0$. Possiamo allora estrarre una successione $(u_{t,\varepsilon_n})_{n\in\mathbb{N}}$ da $u_{t,\varepsilon}$ che converge quasi ovunque a u e passare al limite per $\varepsilon = \varepsilon_n \to 0$ nella stima (1.7) ottenendo la (b). □

PROPOSIZIONE 1.11. *Supponiamo che la trasformata di Fourier si estenda ad un operatore continuo*

$$\mathcal{F} : L^p(\mathbb{R}^N) \to L^{p'}(\mathbb{R}^N),$$

allora $p \leq 2$.

DIM. Supponiamo per assurdo che $p > 2$ e per ogni $t > 0$ condideriamo la funzione u_t definita in (1.6). Allora, applicando il Lemma 1.10, si ha

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |u_t|^p &= \int_{\mathbb{R}^N} |u_t|^{p-2}|u_t|^2 \leq \|u_t\|_\infty^{p-2}\|u_t\|_2^2 \\ &\leq \frac{c^{p-2}\|u\|_1^{p-2}}{t^{\frac{N}{2}(p-2)}}\|u\|_2^2 = c_1 t^{-\frac{N}{2}(p-2)}, \end{aligned} \tag{1.8}$$

dove $c_1 = c_1(p,u)$. Per la disuguaglianza di Hölder e data la continuità di $\mathcal{F}$ da L^p in $L^{p'}$, abbiamo che

$$\|\hat{u}_t\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |\hat{u}_t||\hat{u}_t| \leq \|\hat{u}_t\|_{p'}\|\hat{u}_t\|_p \leq C\|u_t\|_p\|\hat{u}_t\|_p. \tag{1.9}$$

Per il Lemma 1.10 e per le disuguaglianze (1.8) e (1.9)

$$\|u\|_2^2 = \|\hat{u}_t\|_2^2 \leq c_2\, \|\hat{u}_t\|_p\, t^{-\frac{N}{2}\frac{p-2}{p}} \leq c_2\, \|\hat{u}\|_\infty\, t^{-\frac{N}{2}\frac{p-2}{p}}, \tag{1.10}$$

dove $c_2 = c_2(p,u)$. Data l'ipotesi $p > 2$, l'esponente di t in (1.10) è strettamente minore di zero. Mandando $t \to +\infty$ otteniamo $u = 0$ contro l'ipotesi. □

1.2.2. Operatori di convoluzione. Fissiamo $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$. E' ben noto che per ogni $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ il prodotto di convoluzione $f * g$ appartiene a $L^p(\mathbb{R}^N)$ e vale la disuguaglianza di Young

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_p\, \|g\|_1.$$

Se $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^N)$, allora dalla disuguaglianza di Hölder segue che $f * g$ è in $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e

$$\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p\, \|g\|_{p'}.$$

TEOREMA 1.12 (Hausdorff-Young). *Siano* $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ *e* $1 \leq q \leq \infty$ *tale che* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \geq 0$. *Allora, posto* $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$, *per ogni* $g \in L^q(\mathbb{R}^N)$ *si ha che* $f * g \in L^r(\mathbb{R}^N)$ *e*

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p\, \|g\|_q.$$

DIM. Posto $T_f g = f * g$, per quanto richiamato prima, si ha

$$T_f : L^1(\mathbb{R}^N) \to L^p(\mathbb{R}^N)$$

con norma $\|T_f\|_{1,p} \leq \|f\|_p$ e

$$T_f : L^{p'}(\mathbb{R}^N) \to L^\infty(\mathbb{R}^N)$$

con norma $\|T_f\|_{p',\infty} \leq \|f\|_p$. Osserviamo che $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} - 1 \geq 0$ equivale a $1 \leq q \leq p'$. Sia allora $\vartheta \in [0,1]$ tale che $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1-\vartheta}{1} + \dfrac{\vartheta}{p'} = 1 - \dfrac{\vartheta}{p}$. Posto $\dfrac{1}{s} = \dfrac{1-\vartheta}{p} + \dfrac{\vartheta}{\infty} = \dfrac{1-\vartheta}{p}$, per il Teorema di Riesz-Thorin si ha che

$$T_f : L^q(\mathbb{R}^N) \to L^s(\mathbb{R}^N)$$

è un operatore continuo con norma $\|T_f\|_{q,s} \leq \|f\|_p$. A questo punto la tesi segue dal fatto che $r = s$, come si può facilmente verificare. □

Anche stavolta il risultato ottenuto è ottimale, nel senso precisato dal seguente esercizio.

ESERCIZIO 1.13. Provare che se $\|f * g\|_r \leq c\|f\|_p \, \|g\|_q$ per una costante $c > 0$ ed ogni $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L^q(\mathbb{R}^N)$ allora $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} - 1$.
(Suggerimento: Per ogni $\lambda > 0$ si applichi la disuguaglianza alle funzioni $f_\lambda \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e $g_\lambda \in L^q(\mathbb{R}^N)$ definite da $f_\lambda(x) = f(\lambda x)$ e $g_\lambda(x) = g(\lambda x)$ e se ne deduca la tesi come nella dimostrazione della Proposizione 1.9).

1.2.3. Interpolazione di operatori compatti. Nelle ipotesi del Teorema di Riesz-Thorin vediamo che se uno degli operatori T_0, T_1 è compatto, allora T_ϑ è compatto per ogni $0 < \vartheta < 1$.

TEOREMA 1.14. *Siano* $1 \leq p_0, q_0, p_1, q_1 \leq \infty$, *con* $(p_0, q_0) \neq (p_1, q_1)$ *e siano*

$$T_0 : L^{p_0}(\Omega) \to L^{q_0}(\Omega) \quad e \quad T_1 : L^{p_1}(\Omega) \to L^{q_1}(\Omega)$$

due operatori limitati, tali che $T_1 = T_0$ *su* Σ. *Se uno dei due operatori è compatto allora per ogni* $0 < \vartheta < 1$ *l'operatore*

$$T_\vartheta : L^{p_\vartheta}(\Omega) \to L^{q_\vartheta}(\Omega),$$

dato dal Teorema 1.5, è compatto.

DIM. Per semplicità di dimostrazione supponiamo che $\mu(\Omega) < \infty$. Supponiamo che T_0 sia compatto. Allora $K = T_0(B_{L^{p_0}})$ è relativamente compatto in $L^{q_0}(\Omega)$, dove $B_{L^{p_0}}$ è la palla chiusa di $L^{p_0}(\Omega)$. Siccome $\overline{K}$ è compatto, per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $f_1, f_2, \ldots, f_k \in \Sigma$ tali che

$$\overline{K} \subset \bigcup_{i=1}^{k} B(f_i, \varepsilon). \tag{1.11}$$

Possiamo scrivere le f_i nel modo seguente

$$f_i = \sum_{j=1}^{s} c_{ij}\, \chi_{A_j}$$

con A_j insiemi misurabili a due a due disgiunti e tali che $0 < \mu(A_j) < \infty$. Siano $1 \leq p \leq \infty$ e $g \in L^p(\Omega)$. Posto $span\{\chi_{A_j} : j = 1, \cdots, s\}$ l'inviluppo lineare delle funzioni caratteristiche χ_{A_j}, consideriamo l'operatore di rango finito $P : L^p(\Omega) \to span\{\chi_{A_j} : j = 1, \cdots, s\}$ definito per ogni $g \in L^p(\Omega)$ da

$$Pg = \sum_{j=1}^{s} \left(\frac{1}{\mu(A_j)} \int_{A_j} g\, d\mu \right) \chi_{A_j}.$$

Stimiamo la norma L^p di Pg. Per la disuguaglianza di Jensen,

$$|Pg|^p = \sum_{j=1}^{s} \left| \int_{A_j} g\, \frac{d\mu}{\mu(A_j)} \right|^p \chi_{A_j} \leq \sum_{j=1}^{s} \left(\int_{A_j} |g|^p\, \frac{d\mu}{\mu(A_j)} \right) \chi_{A_j}$$

e quindi

$$\int_\Omega |Pg|^p\, d\mu \leq \sum_{j=1}^{s} \int_{A_j} |g|^p\, d\mu \leq \int_\Omega |g|^p d\mu.$$

Allora $P : L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$ ha norma ≤ 1 e in quanto operatore di rango finito è compatto. Inoltre per ogni funzione semplice del tipo $s = \sum_{j=1}^{n} d_j \chi_{A_j}$ si ha che $Ps = s$.
Da (1.11) segue che per ogni $f \in B_{L^{p_0}}$ esiste f_i tale che $\|T_0 f - f_i\| < \varepsilon$. Pertanto

$$\begin{aligned} \|T_0 f - PT_0 f\| &\leq \|T_0 f - f_i\| + \|f_i - PT_0 f\| \\ &= \|T_0 f - f_i\| + \|Pf_i - PT_0 f\| \leq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Consideriamo allora gli operatori $T_0 - PT_0 : L^{p_0}(\Omega) \to L^{q_0}(\Omega)$ di norma $\|T_0 - PT_0\| \leq 2\varepsilon$ e $T_1 - PT_1 : L^{p_1}(\Omega) \to L^{q_1}(\Omega)$ di norma $\|T_1 - PT_1\| \leq 2M_1$, dove $M_1 = \|T_1\|$. Per il Teorema di Riesz-Thorin, per ogni $0 \leq \vartheta \leq 1$

$$\|T_\vartheta - PT_\vartheta\|_{p_\vartheta, q_\vartheta} \leq (2\varepsilon)^{1-\vartheta} (2M_1)^\vartheta,$$

dove T_ϑ, p_ϑ e q_ϑ sono quelli dell'enunciato del Teorema di Riesz-Thorin. Quest'ultima stima ci dice che per $0 \leq \vartheta < 1$ possiamo approssimare in norma T_ϑ con operatori di rango finito e quindi che T_ϑ è un operatore compatto. □

1.3. Il teorema di interpolazione di Marcinkiewicz

Sia $f \in \mathcal{M}(\Omega)$. Per ogni $\alpha > 0$ poniamo $\lambda(\alpha) = \lambda_f(\alpha) = \mu\{|f| > \alpha\}$. Notiamo che λ è una funzione decrescente in $(0, \infty)$. Nei prossimi due lemmi presentiamo le proprietà di base di λ.

LEMMA 1.15. *Sia $f \in \mathcal{M}(\Omega)$; allora*

$$\int_\Omega |f|\, d\mu = \int_0^\infty \lambda(\alpha)\, d\alpha.$$

DIM. Sia $G = \{(t,x) \in (0,\infty) \times \Omega : 0 \le t \le |f(x)|\}$ e indichiamo con m la misura di Lebesgue sull'intervallo $(0,\infty)$; allora

$$\begin{aligned}(m \times \mu)(G) &= \int_\Omega |f(x)|\, d\mu(x) = \int_\Omega d\mu(x) \int_0^{|f(x)|} dt \\ &= \int_0^\infty dt \int_{\{|f|>t\}} d\mu(x) = \int_0^\infty \lambda(t)\, dt.\end{aligned}$$

□

LEMMA 1.16. *Sia $f \in \mathcal{M}(\Omega)$; allora*

$$\int_\Omega |f|^p\, d\mu = p \int_0^\infty \alpha^{p-1} \lambda(\alpha)\, d\alpha.$$

DIM. Per il lemma precedente

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f|^p\, d\mu &= \int_0^\infty \mu\{|f|^p > \alpha\}\, d\alpha = \int_0^\infty \mu\{|f| > \alpha^{\frac{1}{p}}\}\, d\alpha \\ &= p \int_0^\infty \mu\{|f| > \beta\}\, \beta^{p-1} d\beta.\end{aligned}$$

□

Introduciamo gli spazi L^p deboli così definiti

$$L^p_w(\Omega) = \left\{ f \in \mathcal{M}(\Omega) : \exists A > 0 \quad \lambda(\alpha) \le \frac{A^p}{\alpha^p} \right\}.$$

Se $f \in L^p(\Omega)$ con $p < \infty$, allora per la disuguaglianza di Chebychev

$$\lambda(\alpha) = \mu\{|f| > \alpha\} \le \frac{\|f\|_p^p}{\alpha^p} \tag{1.12}$$

e quindi $L^p(\Omega) \subset L^p_w(\Omega)$. I due spazi sono però diversi, per esempio la funzione $f(x) = \dfrac{1}{x^{\frac{1}{p}}}$ appartiene a $L^p_w(0,1)$ ma non a $L^p(0,1)$.

Dati $p_1 < p_2$ consideriamo lo spazio vettoriale

$$L^{p_1} + L^{p_2} = \{f = f_1 + f_2 : f_i \in L^{p_i}\}.$$

Se $p_1 < p < p_2$ allora

$$L^{p_1} \cap L^{p_2} \hookrightarrow L^p \subset L^{p_1} + L^{p_2}.$$

Proviamo la prima immersione.
Essendo $p_1 < p < p_2$, si ha $\frac{1}{p_2} < \frac{1}{p} < \frac{1}{p_1}$ e quindi esiste $t \in (0,1)$ tale che

$\frac{1}{p} = \frac{t}{p_2} + \frac{1-t}{p_1}$. Osserviamo che $|u|^{p(1-t)} \in L^{\frac{p_1}{p(1-t)}}$ e $|u|^{pt} \in L^{\frac{p_2}{pt}}$. Inoltre $\frac{p(1-t)}{p_1} + \frac{pt}{p_2} = 1$. Allora, presa $u \in L^{p_1}(\Omega) \cap L^{p_2}(\Omega)$, per la disuguaglianza di Hölder, vale

$$\int_\Omega |u|^p = \int_\Omega |u|^p(1-t)|u|^pt \leq \|u\|_{p_1}^{p(1-t)} \|u\|_{p_2}^{pt} < \infty.$$

Dimostriamo la seconda inclusione. Sia $f \in L^p$ e sia $\gamma > 0$. Definiamo

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } |f(x)| > \gamma \\ 0 & \text{se } |f(x)| \leq \gamma \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |f(x)| > \gamma \\ f(x) & \text{se } |f(x)| \leq \gamma \end{cases}.$$

$f_1 \in L^{p_1}$ ed $f_2 \in L^{p_2}$, come risulta dalle seguenti disuguaglianze

$$\int |f_1|^{p_1} = \int_{\{|f|>\gamma\}} |f|^{p_1-p}|f|^p \leq \gamma^{p_1-p} \int |f|^p,$$

$$\int |f_2|^{p_2} = \int_{\{|f|\leq\gamma\}} |f|^{p_2-p}|f|^p \leq \gamma^{p_2-p} \int |f|^p.$$

Chiaramente $f = f_1 + f_2$.

DEFINIZIONE 1.17. *Sia $T : L^p(\Omega) \to \mathcal{M}(\Omega)$ un operatore (non necessariamente lineare).*
Se $1 \leq p < \infty$, T di dice di tipo debole (p,p) se esiste $A_p > 0$ tale che per ogni $f \in L^p(\Omega)$

$$\mu\{|Tf| > \alpha\} \leq \left(\frac{A_p\|f\|_p}{\alpha}\right)^p$$

per ogni $\alpha > 0$.
Se $p = \infty$, T si dice di tipo debole (∞,∞) se esiste $A_\infty > 0$ tale che per ogni $f \in L^\infty(\Omega)$

$$\|Tf\|_\infty \leq A_\infty \|f\|_\infty.$$

In particolare se T è lineare allora T è continuo da $L^\infty(\Omega)$ in sé.

OSSERVAZIONE 1.18. Un'operatore limitato da $L^p(\Omega)$ in sé è in particolare di tipo debole (p,p) come si verifica facilmente usando la (1.12).

Fatte queste premesse siamo ora in grado di enunciare e dimostrare il teorema di interpolazione di Marcinkiewicz che generalizza quello di Riesz-Thorin, ma è meno preciso nelle stime di alcune costanti.

TEOREMA 1.19 (Marcinkiewicz). *Siano $1 \leq p < r \leq \infty$ e sia $T : L^p(\Omega) \cap L^r(\Omega) \to \mathcal{M}(\Omega)$ tale che*

(i) $|T(f+g)| \leq |Tf| + |Tg|$, *per ogni $f, g \in L^p(\Omega) \cap L^r(\Omega)$;*
(ii) *T è di tipo debole (p,p);*
(iii) *T è di tipo debole (r,r).*

Allora per ogni $p < q < r$ esiste $A_q > 0$ tale che

$$\|Tf\|_q \le A_q \|f\|_q$$

per ogni $f \in L^p(\Omega) \cap L^r(\Omega)$.

DIM. Prendiamo $f \in L^p(\Omega) \cap L^r(\Omega)$ e fissiamo $\alpha > 0$. Definiamo

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } |f(x)| > \alpha \\ 0 & \text{se } |f(x)| \le \alpha \end{cases} \qquad f_2(x) = f(x) - f_1(x).$$

Osserviamo che $|f_i| \le |f|$ e quindi $f_i \in L^p(\Omega) \cap L^r(\Omega)$ per $i = 1, 2$.
(Caso $r < \infty$) Per (i) $|Tf| \le |Tf_1| + |Tf_2|$, sicché

$$\{|Tf| > \alpha\} \subset \left\{|Tf_1| > \frac{\alpha}{2}\right\} \bigcup \left\{|Tf_2| > \frac{\alpha}{2}\right\}.$$

Da quest'ultima inclusione e da (ii) e (iii) discende che

$$\begin{aligned} \mu\{|Tf| > \alpha\} &\le \mu\left\{|Tf_1| > \frac{\alpha}{2}\right\} + \mu\left\{|Tf_2| > \frac{\alpha}{2}\right\} \\ &\le \left(\frac{2A_p\|f_1\|_p}{\alpha}\right)^p + \left(\frac{2A_r\|f_2\|_r}{\alpha}\right)^r. \end{aligned}$$

Per il Lemma 1.16

$$\begin{aligned} \int_\Omega |Tf|^q \, d\mu &= q\int_0^\infty \alpha^{q-1}\mu\{|Tf| > \alpha\} \, d\alpha \\ &\le q2^pA_p^p \int_0^\infty \alpha^{q-1-p} \int_\Omega |f_1|^p \, d\mu \, d\alpha \\ &\qquad + q2^rA_r^r \int_0^\infty \alpha^{q-1-r} \int_\Omega |f_2|^r \, d\mu \, d\alpha \\ &= q2^pA_p^p \int_0^\infty \alpha^{q-1-p} \, d\alpha \int_{\{|f| > \alpha\}} |f(x)|^p \, d\mu(x) \\ &\qquad + q2^rA_r^r \int_0^\infty \alpha^{q-1-r} \, d\alpha \int_{\{|f| \le \alpha\}} |f(x)|^r \, d\mu(x) \\ &= q2^pA_p^p \int_\Omega |f(x)|^p \, d\mu(x) \int_0^{|f(x)|} \alpha^{q-1-p} \, d\alpha \\ &\qquad + q2^rA_r^r \int_\Omega |f(x)|^r \, d\mu(x) \int_{|f(x)|}^\infty \alpha^{q-1-r} \, d\alpha \\ &= \left(\frac{q2^pA_p^p}{q-p} + \frac{q2^rA_r^r}{r-q}\right) \int_\Omega |f|^q \, d\mu \, . \end{aligned}$$

(Caso $r = \infty$) Per la (iii) esiste $A_\infty > 0$ tale che $\|Tf_2\|_\infty \le A_\infty\|f_2\|_\infty \le A_\infty\alpha$. Perciò, posto $\beta = 2A_\infty\alpha$, abbiamo che

$$\{|Tf| > \beta\} \subset \left\{|Tf_1| > \frac{\beta}{2}\right\}.$$

Da questa inclusione e da (ii) discende che

$$\mu\{|Tf| > \beta\} \leq \left(\frac{2A_p\|f_1\|_p}{\beta}\right)^p.$$

Come nel passo precedente, per il Lemma 1.16 si ha che

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |Tf|^q \, d\mu &= q\int_0^\infty \beta^{q-1}\mu\{|Tf| > \beta\}\, d\beta \\
&\leq q2^pA_p^p \int_0^\infty \beta^{q-1-p} \int_{\{|f|>\frac{\beta}{2A_\infty}\}} |f|^p \, d\mu \\
&= q2^pA_p^p \int_\Omega |f(x)|^p \, d\mu(x) \int_0^{2A_\infty|f(x)|} \beta^{q-1-p}\, d\beta \\
&= \frac{q2^qA_p^pA_\infty^{q-p}}{q-p}\int_\Omega |f|^q \, d\mu.
\end{aligned}$$

□

OSSERVAZIONE 1.20. (a) Supponiamo che T sia lineare. Allora T si estende ad un operatore lineare limitato da $L^q(\Omega)$ in $L^q(\Omega)$.
(b) Sia sempre T lineare. Nell'enunciato del teorema di Marcinkiewicz abbiamo considerato un operatore T definito su $L^p(\Omega) \cap L^r(\Omega)$. Spesso però in letteratura T è definito su $L^p(\Omega) + L^r(\Omega)$. Ciò non cambia di fatto il teorema in quanto le due ipotesi su T sono equivalenti.
Infatti, dato $T : L^p(\Omega) + L^r(\Omega) \to \mathcal{M}(\Omega)$, possiamo definire gli operatori $T_p : L^p(\Omega) \to \mathcal{M}(\Omega)$ e $T_r : L^r(\Omega) \to \mathcal{M}(\Omega)$ come le restrizioni di T a $L^p(\Omega)$ e ad $L^r(\Omega)$ rispettivamente. Allora se prendiamo $f \in L^p(\Omega) \cap L^r(\Omega)$ si ha che $T_pf = T_rf = Tf$.
Viceversa se ho due operatori $T_p : L^p(\Omega) \to \mathcal{M}(\Omega)$ e $T_r : L^r(\Omega) \to \mathcal{M}(\Omega)$ che coincidono su $L^p(\Omega)\cap L^r(\Omega)$, allora presa $f = f_1+f_2 \in L^p(\Omega)+L^r(\Omega)$ definiamo l'operatore $T : L^p(\Omega)+L^r(\Omega) \to \mathcal{M}(\Omega)$ ponendo $Tf = T_pf_1+T_rf_2$. Verifichiamo solo che la definizione di T non dipenda dalla scelta di f_1 ed f_2. Siano $g_1 \in L^p(\Omega)$ e $g_2 \in L^r(\Omega)$ tali che $f_1 + f_2 = g_1 + g_2$ allora $f_1 - g_1 = g_2 - f_2 \in L^p(\Omega) \cap L^r(\Omega)$, ma poiché T_p coincide con T_r nell'intersezione degli spazi, abbiamo che $T_pf_1 - T_pg_1 = -T_rf_2 + T_rg_2$ e quindi $T_pf_1 + T_rf_2 = T_pg_1 + T_rg_2$.

1.4. Applicazioni del Teorema di Marcinkiewicz

1.4.1. La funzione massimale di Hardy-Littlewood.

DEFINIZIONE 1.21. *Data $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ si definisce funzione massimale di Hardy-Littlewood di f la funzione $Mf : \mathbb{R}^N \to \overline{\mathbb{R}}$ così definita*

$$Mf(x) = \sup_{r>0}\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(y)|\, dy$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^N$.

Vediamo quali sono le proprietà di base della funzione massimale.

PROPOSIZIONE 1.22. *Sia* $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, *allora*

1) $Mf = M|f|$;
2) $M(f+g) \leq Mf + Mg$;
3) *se* $f \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ *allora* $Mf \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ *e* $\|Mf\|_\infty \leq \|f\|_\infty$;
4) Mf *è semicontinua inferiormente;*
5) *se* $Mf \in L^1(\mathbb{R}^N)$ *allora* $f = 0$.

DIM. Le proprietà 1), 2) e 3) si verificano facilmente.
4) Per ogni $r > 0$ la funzione $f_r(x) = \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(y)|\, dy$ è continua in x. Allora Mf è semicontinua inferiormente perché estremo superiore di funzioni continue.
5) Supponiamo $f \neq 0$; allora esiste $R > 0$ tale che $\int_{B(0,R)} |f(x)|\, dx = a > 0$. Sia $|x| \geq R$, allora

$$\begin{aligned} Mf(x) &\geq \frac{1}{|B(x,2|x|)|}\int_{B(x,2|x|)} |f(y)|\, dy \\ &\geq \frac{1}{|B(x,2|x|)|}\int_{B(0,R)} |f(y)|\, dy = \frac{a}{2^N \omega_N |x|^N}. \end{aligned}$$

Siccome la funzione $x \mapsto |x|^{-N}$ non è sommabile in $\mathbb{R}^N$ risulta $Mf \notin L^1(\mathbb{R}^N)$. □

Un'utile conseguenza della semicontinuità inferiore della funzione massimale di Hardy-Littlewood è il seguente

COROLLARIO 1.23. *Per ogni* $\alpha > 0$ *l'insieme* $\{Mf > \alpha\}$ *è un sottoinsieme aperto di* $\mathbb{R}^N$.

Ogni funzione semicontinua inferiormente ha soprallivelli aperti, quindi il corollario precedente è di fatto dimostrato. Presentiamo tuttavia una dimostrazione che sfrutta direttamente la definizione della funzione massimale.

DIM. Sia $x_0 \in \mathbb{R}^N$ tale che $Mf(x_0) > \alpha$. Fissiamo $\beta \in \mathbb{R}$ tale che $Mf(x_0) > \beta > \alpha$. Data la definizione di $Mf(x_0)$, in corrispondenza di β esiste $r > 0$ tale che

$$\int_{B(x_0,r)} |f| > \beta |B(x_0,r)| > \alpha |B(x_0,r)|.$$

Prendiamo allora $\delta > 0$ tale che $\frac{(r+\delta)^N}{r^N} < \frac{\beta}{\alpha}$. Un tale δ esiste perché $\frac{\beta}{\alpha} > 1$ e $\frac{(r+\delta)^N}{r^N} \to 1$ per $\delta \to 0$.
Per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ tale che $|x - x_0| < \delta$ risulta che $B(x_0, r) \subset B(x, r+\delta)$ e quindi, data la scelta di δ, si ha che

$$\int_{B(x,r+\delta)} |f| \geq \int_{B(x_0,r)} |f| > \beta\, \omega_N\, r^N > \alpha\, \omega_N\, (r+\delta)^N = \alpha |B(x, r+\delta)|.$$

Quest'ultima disuguaglianza ci dice allora che $Mf(x) > \alpha$ per ogni $x \in B(x_0, \delta)$ e ciò prova che l'insieme $\{Mf > \alpha\}$ è aperto. □

Per ogni $1 \leq p < \infty$ possiamo definire l'operatore

$$M : L^p(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{M}(\mathbb{R}^N), \qquad f \mapsto Mf.$$

Per la Proposizione 1.22 (punti 2 e 3) M è sublineare e di tipo debole (∞, ∞). Nel Teorema 1.25 proveremo che M è di tipo debole $(1,1)$. Concluderemo pertanto, grazie al teorema di Marcinkiewicz, che $M : L^p(\mathbb{R}^N) \to L^p(\mathbb{R}^N)$ è un operatore limitato per ogni $1 < p \leq \infty$.

Il seguente lemma di ricoprimento sarà utilizzato nella dimostrazione della disuguaglianza massimale.

LEMMA 1.24 (di ricoprimento di Vitali). *Sia $W \subset \bigcup_{i=1}^m B(x_i, r_i)$. Allora esiste $S \subset \{1, 2, \ldots, m\}$ tale che*

(i) $B(x_i, r_i) \cap B(x_j, r_j) = \emptyset$ *per ogni* $i, j \in S$ *con* $i \neq j$;
(ii) $W \subset \bigcup_{i \in S} B(x_i, 3r_i)$.

DIM. Consideriamo preliminarmente due palle $B(x, r)$ e $B(y, s)$, con $r \geq s$, tali che $B(x,r) \cap B(y,s) \neq \emptyset$. Allora $|x - y| < r + s \leq 2r$ e quindi $B(y, s) \subset B(x, s + 2r) \subset B(x, 3r)$.
Supponiamo che $r_1 \geq r_2 \geq \cdots \geq r_m$. Partiamo da r_1 e poniamo $B_1 = B(x_1, r_1)$ e $i_1 = 1$. Quindi, posto i_2 il primo degli $i > 1$ tale che $B(x_i, r_i) \cap B(x_1, r_1) = \emptyset$, poniamo $B_2 = B(x_{i_2}, r_{i_2})$. Procedendo in questo modo dopo un numero finito di passi avremo individuato l'insieme di indici $S = \{i_1, i_2, \ldots, i_r\}$ le cui rispettive palle $B_j = B(x_{i_j}, r_{i_j})$ sono a due a due disgiunte e, per quanto osservato nella prima parte della dimostrazione, verificano la (ii). □

TEOREMA 1.25 (Disuguaglianza massimale di Hardy-Littlewood). *Se $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, allora per ogni $\alpha > 0$ si ha*

$$|\{Mf > \alpha\}| \leq 3^N \frac{\|f\|_1}{\alpha}, \tag{1.13}$$

ossia M è di tipo debole $(1,1)$.

DIM. Sia K un compatto contenuto in $\{Mf > \alpha\}$. Per ogni $x \in K$, $Mf(x) > \alpha$ e quindi esiste un $r(x) > 0$ tale che

$$\int_{B(x,r(x))} |f| > \alpha |B(x, r(x))|. \tag{1.14}$$

Siccome K è compatto esistono $\{x_1, \ldots, x_m\} \subset K$ tali che K è contenuto nell'insieme $\bigcup_{i=1}^m B(x_i, r(x_i))$. Per il Lemma 1.24 esiste $S \subset \{1, 2, \ldots, m\}$ tale che $K \subset \bigcup_{i \in S} B(x_i, 3r(x_i))$ e le palle $B(x_i, r(x_i))$, al variare di i in S, sono a due a due disgiunte. La (1.14) implica che

$$\begin{aligned} |K| &\leq \sum_{i \in S} |B(x_i, 3r(x_i))| = 3^N \sum_{i \in S} |B(x_i, r(x_i))| \\ &\leq \frac{3^N}{\alpha} \sum_{i \in S} \int_{B(x_i, r(x_i))} |f| = \frac{3^N}{\alpha} \int_{\bigcup_{i \in S} B(x_i, r(x_i))} |f| \leq \frac{3^N}{\alpha} \|f\|_1. \end{aligned}$$

Siccome $|\{Mf > \alpha\}| = \sup \Big\{ |K| : K \text{ compatto }, K \subset \{Mf > \alpha\} \Big\}$ si ha la tesi. □

COROLLARIO 1.26. *Se $1 < p \leq \infty$ allora esiste $A_p > 0$ tale che*

$$\|Mf\|_p \leq A_p \|f\|_p$$

per ogni $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$.

DIM. La tesi segue immediatamente dal teorema di Marcinkiewicz. □

La Proposizione 1.22(5) mostra che il Corollario 1.26 non è vero per $p = 1$. Vale tuttavia il seguente semplice risultato

COROLLARIO 1.27. *Se $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ allora $Mf(x) < \infty$ per q.o. $x \in \mathbb{R}^N$.*

DIM. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ risulta $\{Mf = \infty\} \subset \{Mf > n\}$. Allora per la (1.13)

$$|\{Mf = \infty\}| \leq |\{Mf > n\}| \leq \frac{3^N \|f\|_1}{n}.$$

Se mandiamo $n \to \infty$ abbiamo che $|\{Mf = \infty\}| = 0$ e quindi la tesi. □

1.4.2. Punti di Lebesgue.

DEFINIZIONE 1.28. *Sia $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Un punto $x \in \mathbb{R}^N$ si dice punto di Lebesgue di f (scriveremo $x \in \mathcal{L}(f)$) se*

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| \, dy = 0.$$

OSSERVAZIONE 1.29. (i) Se x è un punto di Lebesgue di f allora

$$f(x) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(y)\, dy.$$

Infatti,

$$\left| f(x) - \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(y) dy \right| \le \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(x) - f(y)| dy \to 0.$$

(ii) Se f è continua in x allora $x \in \mathcal{L}(f)$. Infatti, fissato $\varepsilon > 0$ esiste un $r_0 > 0$ tale che $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ se $|x - y| < r_0$. Allora per ogni $r < r_0$

$$\frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|\, dy < \varepsilon.$$

TEOREMA 1.30 (Lebesgue). *Se* $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ *allora* $|R^N \setminus \mathcal{L}(f)| = 0$

DIM. Fissato $r > 0$ poniamo

$$T_r f(x) = \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|\, dy$$

e $Tf(x) = \limsup_{r \to 0^+} T_r f(x)$. Dobbiamo provare che $Tf = 0$ q.o. in $\mathbb{R}^N$. Per la densità di $L^1(\mathbb{R}^N) \cap C(\mathbb{R}^N)$ in $L^1(\mathbb{R}^N)$, dato $\varepsilon > 0$ esiste $g \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap C(\mathbb{R}^N)$ tale che $\|f - g\|_1 < \varepsilon$. Per l'Osservazione 1.29(ii)

$$Tg = 0 \text{ in } \mathbb{R}^N. \tag{1.15}$$

Poniamo $h = f - g$,

$$\begin{aligned} T_r h(x) &= \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |h(y) - h(x)|\, dy \qquad (1.16) \\ &\le \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |h(y)|\, dy + |h(x)| \le Mh(x) + |h(x)|, \end{aligned}$$

dove Mh è la funzione massimale di Hardy-Littlewood. E' evidente che T_r è sublineare, quindi $T_r f \le T_r g + T_r h$. Passando al limsup per $r \to 0$, da (1.15) e (1.16) otteniamo che

$$Tf \le Tg + Th = Th \le Mh + |h|.$$

Da quest'ultima disuguaglianza discende che per ogni $\alpha > 0$

$$\{Tf \ge \alpha\} \subset \left\{ Mh \ge \frac{\alpha}{2} \right\} \cup \left\{ |h| \ge \frac{\alpha}{2} \right\}$$

e quindi per il Teorema 1.25 e per la disuguaglianza di Chebychev

$$\begin{aligned} |\{Tf \ge \alpha\}| &\le \left| \left\{ Mh \ge \frac{\alpha}{2} \right\} \right| + \left| \left\{ |h| \ge \frac{\alpha}{2} \right\} \right| \\ &\le \frac{2\, 3^N}{\alpha} \|h\|_1 + \frac{2}{\alpha} \|h\|_1 \\ &\le \left(\frac{2\, 3^N}{\alpha} + \frac{2}{\alpha} \right) \varepsilon. \end{aligned}$$

Mandiamo ε a zero ed otteniamo che $|\{Tf \geq \alpha\}| = 0$ per ogni $\alpha > 0$. Allora $\{Tf > 0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{Tf > \frac{1}{n}\}$ ha misura nulla e quindi $Tf = 0$ q.o. in $\mathbb{R}^N$. □

OSSERVAZIONE 1.31. Il Teorema 1.30 vale anche per funzioni $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Infatti per ogni $R > 0$ la funzione $f\chi_{B(0,R)} \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e quindi q.o. $x \in B(0, \frac{R}{2})$ è un punto Lebesgue di f.

Vediamo alcune conseguenze del teorema di Lebesgue.

DEFINIZIONE 1.32. *Sia* $\{E_h\}_{h\geq 0}$ *una famiglia di sottoinsiemi di* $\mathbb{R}^N$ *e sia* $x \in \mathbb{R}^N$. *Diciamo che* $\{E_h\}$ *converge a* x *per* $h \to 0$ *se esistono* $\alpha > 0$ *e numeri reali* $r_h \to 0$ *tali che per ogni* h *risulti*

$$E_h \subset B(x, r_h) \quad e \quad |E_h| \geq \alpha |B(x, r_h)|.$$

COROLLARIO 1.33. *Siano* $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, $x \in \mathcal{L}(f)$ *e* $\{E_h\} \to x$, *allora*

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{|E_h|} \int_{E_h} |f(y) - f(x)|\, dy = 0.$$

DIM. Infatti

$$\frac{1}{|E_h|} \int_{E_h} |f(y) - f(x)|\, dy \leq \frac{1}{\alpha|B(x, r_h)|} \int_{B(x,r_h)} |f(y) - f(x)|\, dy$$

che tende a zero al tendere di $h \to 0$ perché x è un punto di Lebesgue di f. □

Dal corollario precedente segue un risultato di derivazione dell'integrale di Lebesgue in dimensione 1.

COROLLARIO 1.34. *Per ogni* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *la funzione* $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$ *è derivabile q.o. con* $F' = f$ *q.o.*

DIM. Sia $x \in \mathcal{L}(f)$. Per ogni $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$, ed $x \in \mathbb{R}$, poniamo $E_h = [x, x+h]$ se $h > 0$ e $E_h = [x+h, x]$ se $h < 0$. Secondo la Definizione 1.32 $\{E_h\} \to x$ per $h \to 0$. Allora per il Corollario 1.33

$$\frac{1}{h}F(x+h) - F(x) = \frac{\int_x^{x+h} f(t)\, dt}{h} = \frac{1}{|E_h|} \int_{E_h} f(t)\, dt \tag{1.17}$$

converge a $f(x)$. Questo prova che F è derivabile q.o. e che $F' = f$ q.o. □

COROLLARIO 1.35. *Sia* $f = \chi_E$ *con* E *sottoinsieme misurabile di* $\mathbb{R}^N$. *Allora*

$$\frac{|E \cap B(x,r)|}{|B(x,r)|} \longrightarrow \begin{cases} 1 & q.o.\ in\ E \\ 0 & q.o.\ in\ E^c. \end{cases} \tag{1.18}$$

I punti $x \in \mathbb{R}^N$ *per cui vale (1.18) si chiamano punti di densità per* E.

DIM.

$$\frac{|E \cap B(x,r)|}{|B(x,r)|} = \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} \chi_E(y)\, dy$$

che per l'Osservazione 1.31 converge q.o. a χ_E. $\square$

I punti interni di E sono punti di densità per E. Infatti preso x interno in E basta prendere una palla $B(x,r_0) \subset E$ e per ogni $r < r_0$

$$\frac{|E \cap B(x,r)|}{|B(x,r)|} = \frac{|B(x,r)|}{|B(x,r)|} = 1\,.$$

Il viceversa è falso. Si consideri ad esempio un insieme E di misura non nulla con interno vuoto.

La definizione di punto di Lesbegue si generalizza in modo naturale a quella di p-punto di Lebesgue.

DEFINIZIONE 1.36. *Siano* $1 \le p < \infty$*;* $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$ *ed* $x \in \mathbb{R}^N$*,* x *si dice p-punto di Lebesgue di* f *e scriviamo* $x \in p\text{-}\mathcal{L}(f)$*, se esiste*

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|^p\, dy = 0$$

Applicando la disuguaglianza di Jensen si vede subito che se x è un p-punto di Lebesgue per una funzione $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$ per qualche $p > 1$, allora x è un punto di Lebesgue per f. Infatti risulta

$$\left(\int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|\, \frac{dy}{|B(x,r)|}\right)^p \le \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|^p\, \frac{dy}{|B(x,r)|}\,.$$

COROLLARIO 1.37. *Se* $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$ *con* $1 \le p < \infty$*, allora* $|\mathbb{R}^N \setminus p\text{-}\mathcal{L}(f)| = 0$.

DIM. Sia $\{q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ un sottoinsieme denso di $\mathbb{C}$. Siccome $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$, per ogni $i \in \mathbb{N}$ si ha che $|f - q_i|^p \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Allora, per il Teorema 1.30, per ogni i esiste $N_i \subset \mathbb{R}^N$ di misura nulla tale che se $x \notin N_i$ risulta

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(y) - q_i|^p\, dy = |f(x) - q_i|^p. \tag{1.19}$$

Poniamo $N = \bigcup_i N_i$. Evidentemente N ha misura nulla. L'identità (1.19) vale allora per ogni $x \notin N$ e per ogni $i \in \mathbb{N}$.
Prendiamo adesso $x \notin N$ e fissiamo $\varepsilon > 0$. Data la densità dei q_i in $\mathbb{C}$ esiste

un indice i tale che $|f(x) - q_i| < \varepsilon$. Si ha allora che

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|^p\, dy \\
&\qquad = \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(y) - q_i + q_i - f(x)|^p\, dy \\
&\qquad \le \frac{2^{p-1}}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(y) - q_i|^p\, dy \\
&\qquad\quad + \frac{2^{p-1}}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(x) - q_i|^p\, dy \\
&\qquad \le \frac{2^{p-1}}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(y) - q_i|^p\, dy + 2^{p-1}\varepsilon^p.
\end{aligned}$$

Tenendo conto della (1.19), si ha

$$\limsup_{r\to 0} \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(y)-f(x)|^p\, dy \le 2^{p-1}|f(x)-q_i|^p + 2^{p-1}\varepsilon^p \le 2^p\varepsilon^p.$$

Data l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ x è un p-punto di Lebesgue per f. □

1.4.3. Convergenza puntuale di operatori di convoluzione. Come noto una funzione $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, con $1 \le p < \infty$, p uò essere approssimata in norma L^p da funzioni più regolari, usando prodotti di convoluzione. In questa sezione vedremo sotto quali ipotesi tale approssimazione diventa puntuale quasi ovunque. Ricordiamo che, presa $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^N)$ con $\int_{\mathbb{R}^N} \varphi = 1$ e posto per ogni $\varepsilon > 0$ $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-N}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, si ha

$$\varphi_\varepsilon * f \to f$$

per $\varepsilon \to 0$ in norma L^p.

Assumendo inoltre che $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e *supp* $\varphi \subset B(0,1)$ si dimostra facilmente che

$$\varphi_\varepsilon * f \to f \quad \text{q.o.},$$

infatti

$$\begin{aligned}
|\varphi_\varepsilon * f(x) - f(x)| &\le \varepsilon^{-N}\int_{\mathbb{R}^N} \left|\varphi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)\right| |f(x-y) - f(x)|\, dy \\
&= \varepsilon^{-N}\int_{B(0,\varepsilon)} \left|\varphi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)\right| |f(x-y) - f(x)|\, dy \\
&\le \varepsilon^{-N}\|\varphi\|_\infty \int_{B(0,\varepsilon)} |f(x-y) - f(x)|\, dy \\
&= \frac{\|\varphi\|_\infty \omega_N}{|B(x,\varepsilon)|}\int_{B(x,\varepsilon)} |f(y) - f(x)|\, dy.
\end{aligned}$$

Da questa stima segue subito che $\varphi_\varepsilon * f(x)$ converge ad $f(x)$ per $\varepsilon \to 0$ in tutti i punti di Lebesgue di f e quindi quasi ovunque in $\mathbb{R}^N$.

Le ipotesi su φ affinchè la convergenza quasi ovunque sia verificata possono essere indebolite, come vedremo nel prossimo teorema. Premettiamo un lemma tecnico.

LEMMA 1.38. *Sia $\psi(x) = g(|x|) \in L^1(\mathbb{R}^N)$, con $g :]0,\infty[\to \mathbb{R}^+$ funzione decrescente e sia $f \geq 0$. Allora*

$$(\psi * f)(x) \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} \psi\right) Mf(x).$$

DIM. Per ipotesi $\psi \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e quindi

$$\int_{\mathbb{R}^N} \psi(x)dx = N\omega_N \int_0^\infty r^{N-1} g(r)\, dr < \infty.$$

Fissiamo $n \in \mathbb{N}$ e definiamo per ogni $t \in \mathbb{R}$

$$g_n(t) = \sum_{k=0}^\infty g\left(\frac{k+1}{n}\right) \chi_{]\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}]}(t). \tag{1.20}$$

Osserviamo che, fissato t, la serie che definisce $g_n(t)$ si riduce ad un unico termine. Risulta inoltre $0 \leq g_n \leq g$ e $g_n(t) \to g(t)$ nei punti t in cui g è continua. Dato che g è monotona, è continua q.o. e quindi

$$g_n(t) \to g(t)$$

per q.o. $t \in \mathbb{R}$.
Fissato t riscriviamo $g_n(t)$ come segue,

$$\begin{aligned}
g_n(t) &= \sum_{k=0}^\infty g\left(\frac{k+1}{n}\right) \chi_{]\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}]}(t) \\
&= \sum_{k=0}^\infty \left[g\left(\frac{k+1}{n}\right) \chi_{]0,\frac{k+1}{n}]}(t) - g\left(\frac{k+1}{n}\right) \chi_{]0,\frac{k}{n}]}(t)\right] \\
&= \sum_{k=1}^\infty \left[g\left(\frac{k}{n}\right) \chi_{]0,\frac{k}{n}]}(t) - g\left(\frac{k+1}{n}\right) \chi_{]0,\frac{k}{n}]}(t)\right] \\
&= \sum_{k=1}^\infty \left[g\left(\frac{k}{n}\right) - g\left(\frac{k+1}{n}\right)\right] \chi_{]0,\frac{k}{n}]}(t).
\end{aligned}$$

Siccome g è decrescente, il termine generale della serie $a_{k,n} = g\left(\frac{k}{n}\right) - g\left(\frac{k+1}{n}\right)$ è positivo.

Definiamo a meno di un insieme di misura nulla

$$\psi_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,n}\, \chi_{B\left(0,\frac{k}{n}\right)}(x)$$

e stimiamo il seguente prodotto di convoluzione

$$\begin{aligned}
\psi_n * f(x) &= \int_{\mathbb{R}^N} \psi_n(y) f(x-y)\, dy = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,n} \int_{B\left(x,\frac{k}{n}\right)} f(y)\, dy \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,n} \int_{B\left(x,\frac{k}{n}\right)} f(y)\, dy \cdot \frac{\left|B\left(0,\frac{k}{n}\right)\right|}{\left|B\left(x,\frac{k}{n}\right)\right|} \\
&\le Mf(x) \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,n} \left|B\left(0,\frac{k}{n}\right)\right| = Mf(x) \int_{\mathbb{R}^N} \psi_n.
\end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned}
\psi * f(x) &= \int_{\mathbb{R}^N} \psi(y) f(x-y)\, dy \le \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \psi_n(y) f(x-y)\, dy \\
&\le Mf(x) \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \psi_n(y)\, dy = Mf(x) \int_{\mathbb{R}^N} \psi,
\end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato il teorema di convergenza dominata dato che $\psi_n(x) = g_n(|x|) \le g(|x|) = \psi(x) \in L^1(\mathbb{R}^N)$. □

Il lemma precedente ci permette di sostituire l'ipotesi di limitatezza e la condizione sul supporto di φ con ipotesi più deboli. E' sufficiente infatti che φ sia dominata in valore assoluto da una funzione sommabile, radiale e decrescente.

TEOREMA 1.39. *Sia* $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^N)$, $\int_{\mathbb{R}^N} \varphi = 1$, $|\varphi(x)| \le g(|x|)$ *con* $g :]0,\infty[\to \mathbb{R}^+$ *decrescente e supponiamo che* $\psi(x) = g(|x|) \in L^1(\mathbb{R}^N)$. *Allora*

$$\varphi_\varepsilon * f \to f \quad q.o. \ in\ \mathbb{R}^N$$

per ogni $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, *con* $1 \le p < \infty$.

DIM. Per ogni $\varepsilon > 0$ poniamo

$$G_\varepsilon f(x) = \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi_\varepsilon(y)(f(x-y) - f(x))|\, dy$$

e $Gf(x) = \limsup_{\varepsilon\to 0^+} G_\varepsilon f(x)$. Per ottenere la tesi è sufficiente provare che $Gf = 0$ quasi ovunque.
Osserviamo che se $f \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ ed è continua in x_0 allora $Gf(x_0) = 0$.

Infatti, scelto $r > 0$ tale che $|f(x_0 - y) - f(x_0)| < \varepsilon$, per ogni $y \in B(0, r)$

$$\begin{aligned}
|G_\varepsilon f(x_0)| &\leq \int_{B(0,r)} |\varphi_\varepsilon(y)(f(x_0 - y) - f(x_0))|\, dy \\
&\qquad + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,r)} |\varphi_\varepsilon(y)(f(x_0 - y) - f(x_0))|\, dy \\
&\leq \varepsilon \int_{B(0,r)} |\varphi_\varepsilon(y)|\, dy + 2\|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,r)} |\varphi_\varepsilon(y)|\, dy \\
&\leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi(y)|\, dy + 2\|f\|_\infty \int_{|y| \geq \frac{r}{\varepsilon}} |\varphi(y)|\, dy \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0.
\end{aligned}$$

In generale se $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $h \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tale che

$$\|f - h\|_p < \frac{1}{n}. \tag{1.21}$$

$Gh = 0$ perché h è continua e limitata in $\mathbb{R}^N$. Poniamo $r = f - h$, allora per la sublinearità di G_ε

$$G_\varepsilon f \leq G_\varepsilon h + G_\varepsilon r$$

e, passando al limsup per $\varepsilon \to 0$,

$$Gf \leq Gh + Gr = Gr. \tag{1.22}$$

Per il Lemma 1.38

$$\begin{aligned}
G_\varepsilon r(x) &= \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi_\varepsilon(y)||r(x - y) - r(x)|\, dy \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\psi_\varepsilon(y)||r(x - y) - r(x)|\, dy \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\psi_\varepsilon(y)||r(x - y)|\, dy + \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\psi|\right) |r(x)| \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\psi|\right) (Mr(x) + |r(x)|),
\end{aligned}$$

e quindi

$$Gr(x) \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\psi|\right) (Mr(x) + |r(x)|). \tag{1.23}$$

Posto $C = \int_{\mathbb{R}^N} |\psi|$, per ogni $\alpha > 0$, da (1.22) e (1.23) risulta

$$\{Gf \geq \alpha\} \subset \left\{Mr \geq \frac{\alpha}{2C}\right\} \cap \left\{|r| \geq \frac{\alpha}{2C}\right\}$$

e quindi, per il Corollario 1.26 e per la (1.21)

$$|\{Gf \geq \alpha\}| \leq \frac{A_p^p\, \|r\|_p^p\, (2C)^p}{\alpha^p} + \frac{\|r\|_p^p\, (2C)^p}{\alpha^p} = O\left(\frac{1}{n^p}\right)$$

per $n \to \infty$. Quindi $|\{Gf \geq \alpha\}| = 0$ per ogni $\alpha > 0$ e $Gf = 0$ q.o. $\square$

1.4.4. Potenziali di Riesz. Siano $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ e $0 < Re\,\gamma < N$. Posto $\varphi(x) = \frac{1}{|x|^{N-\gamma}} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, definiamo potenziale di Riesz di densità f la funzione $I_\gamma f$ definita da

$$I_\gamma f(x) = f * \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|y|^{N-\gamma}} f(x-y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|x-y|^{N-\gamma}} f(y)\,dy$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^N$.

Lemma 1.40. *Sia $1 \le p < \infty$. Se $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e $0 < \mathrm{Re}\,\gamma < \frac{N}{p}$ allora l'integrale che definisce $I_\gamma f$ converge assolutamente per q.o. $x \in \mathbb{R}^N$.*

Dim. Dato che dobbiamo provare la convergenza assoluta dell'integrale, possiamo supporre senza perdita di generalità che $f \geq 0$ e che $0 < \gamma < \frac{N}{p}$. Fissato $R > 0$ spezziamo l'integrale in due parti

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|y|^{N-\gamma}} f(x-y)\,dy &= \int_{B(0,R)} \frac{1}{|y|^{N-\gamma}} f(x-y)\,dy \\ &\quad + \int_{B(0,R)^c} \frac{1}{|y|^{N-\gamma}} f(x-y)\,dy.\end{aligned}$$

Il primo integrale converge per q.o. $x \in \mathbb{R}^N$ perché prodotto di convoluzione di $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e di $\varphi\chi_{B(0,R)} \in L^1(\mathbb{R}^N)$, dove $\varphi(x) = |x|^{\gamma - N}$. La convergenza del secondo integrale discende dalla disuguaglianza di Hölder. Infatti, indicato con p' l'esponente coniugato di p, per l'ipotesi $0 < \gamma < \frac{N}{p}$, risulta $\varphi \in L^{p'}(B(0,R)^c)$ e quindi

$$\int_{B(0,R)^c} \frac{1}{|y|^{N-\gamma}} f(x-y)\,dy \le \|f\|_p \left(\int_{B(0,R)^c} \frac{1}{|y|^{(N-\gamma)p'}}\,dy \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^N$. □

Fissato $1 \le p < \infty$, supponiamo che esistano $1 \le q < \infty$ ed una costante $C > 0$ tali che per ogni $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ risulti

$$\|I_\gamma f\|_q \le C \|f\|_p, \tag{1.24}$$

cioè che $I_\gamma : L^p(\mathbb{R}^N) \to L^q(\mathbb{R}^N)$ sia un operatore limitato, e vediamo che relazione deve sussistere fra p, q e γ.
Fissata $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, per ogni $\lambda > 0$ consideriamo la funzione f_λ definita da $f_\lambda(x) = f(\lambda x)$. Si verifica facilmente che $f_\lambda \in L^p(\mathbb{R}^N)$ con $\|f_\lambda\|_p = \lambda^{-\frac{N}{p}} \|f\|_p$ e che

$$(I_\gamma f_\lambda)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|y|^{N-\gamma}} f(\lambda x - \lambda y)\,dy = \lambda^{-\gamma}(I_\gamma f)(\lambda x).$$

Allora $I_\gamma f_\lambda \in L^q(\mathbb{R}^N)$ con $\|I_\gamma f_\lambda\|_q = \lambda^{-Re\,\gamma-\frac{N}{q}}\|I_\gamma f\|_q$ e per la (1.24) con f_λ al posto di f

$$\|I_\gamma f\|_q \leq C\lambda^{-\frac{N}{p}+\frac{N}{q}+Re\,\gamma}\,\|f\|_p.$$

L'arbitrarietà di λ implica che $-\dfrac{N}{p}+\dfrac{N}{q}+Re\,\gamma=0$.
Possiamo concludere allora che se esiste un q per cui il potenziale di Riesz risulta un operatore limitato da $L^p(\mathbb{R}^N)$ in $L^q(\mathbb{R}^N)$, allora necessariamente

$$\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{Re\,\gamma}{N}.$$

Osserviamo inoltre che q risulta strettamente maggiore di p e che $\dfrac{Re\,\gamma}{N}<\dfrac{1}{p}$. Quest'ultima condizione, come visto nel Lemma 1.40, garantisce l'assoluta convergenza dell'integrale che definisce I_γ.

TEOREMA 1.41. *Siano* $1<p<\infty$ *e* $\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{p}-\dfrac{\mathrm{Re}\,\gamma}{N}$, *con* $0<\mathrm{Re}\,\gamma<\dfrac{N}{p}$. *Il potenziale di Riesz definisce un operatore limitato*

$$I_\gamma : L^p(\mathbb{R}^N)\to L^q(\mathbb{R}^N).$$

DIM. Sia $f\in L^p(\mathbb{R}^N)$. Fissato $R>0$, per ogni $x\in\mathbb{R}^N$ stimiamo $|I_\gamma f(x)|$ nel modo seguente

$$|I_\gamma f(x)| \leq \int_{B(0,R)}\frac{1}{|y|^{N-Re\,\gamma}}|f(x-y)|\,dy+\int_{B(0,R)^c}\frac{1}{|y|^{N-Re\,\gamma}}|f(x-y)|\,dy. \tag{1.25}$$

Per ogni $y\in\mathbb{R}^N\setminus\{0\}$ poniamo $\psi(y)=|y|^{Re\,\gamma-N}\chi_{B(0,R)}(y)$. Risulta che $\psi(y)=g(|y|)$ con $g:]0,\infty[\to\mathbb{R}^+$ funzione decrescente così definita

$$g(t)=\begin{cases} t^{Re\,\gamma-N} & \text{se } |t|<R\\ 0 & \text{se } |t|\geq R\,.\end{cases}$$

Per il Lemma 1.38 risulta

$$\begin{aligned}\int_{B(0,R)}\frac{1}{|y|^{N-Re\,\gamma}}|f(x-y)|\,dy &= \psi * |f|(x)\\ &\leq \left(\int_{B(0,R)}\psi(y)\,dy\right)Mf(x)=\frac{N\omega_N}{Re\,\gamma}R^{Re\,\gamma}\,Mf(x).\end{aligned}\tag{1.26}$$

Siccome $0 < Re\,\gamma < \frac{N}{p}$ la funzione $y \mapsto \dfrac{1}{|y|^{N-Re\,\gamma}}$ è p'-sommabile e quindi possiamo stimare il secondo integrale in (1.25) per mezzo della disuguaglianza di Hölder, ottenendo

$$\begin{aligned}
&\int_{B(0,R)^c} \frac{1}{|y|^{N-Re\,\gamma}} |f(x-y)|\, dy \\
&\leq \left(\int_{B(0,R)^c} |f(x-y)|^p\, dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B(0,R)^c} \frac{1}{|y|^{(N-Re\,\gamma)\frac{p}{p-1}}}\, dy \right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&\leq \|f\|_p \left(N\omega_N \int_R^\infty \frac{1}{r^{(N-Re\,\gamma)\frac{p}{p-1}}}\, r^{N-1} dr \right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&= \left(\frac{N\omega_N (p-1)}{N - pRe\,\gamma} \right)^{\frac{p-1}{p}} R^{Re\,\gamma - \frac{N}{p}}\, \|f\|_p
\end{aligned} \tag{1.27}$$

Mettendo assieme (1.26) e (1.27) si ha

$$|I_\gamma f(x)| \leq C\big[Mf(x) R^{Re\,\gamma} + \|f\|_p R^{Re\,\gamma - \frac{N}{p}} \big]$$

dove C è una costante che dipende solo da N, p e γ. Questa stima vale per ogni $R > 0$. Scegliamo in particolare R in modo tale che risulti $Mf(x)R^{Re\,\gamma} = \|f\|_p R^{Re\,\gamma - \frac{N}{p}}$, quindi prendiamo $R = \left(\dfrac{\|f\|_p}{Mf(x)} \right)^{\frac{p}{N}}$. Per tale valore di R allora si ha

$$|I_\gamma f(x)| \leq 2CMf(x)R^{Re\,\gamma} = 2C\big(Mf(x)\big)^{1 - \frac{pRe\,\gamma}{N}} \|f\|_p^{\frac{pRe\,\gamma}{N}}.$$

Ma per ipotesi $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{Re\,\gamma}{N}$ e quindi $\dfrac{pRe\,\gamma}{N} = 1 - \dfrac{p}{q}$. Allora

$$|I_\gamma f(x)| \leq 2C\big(Mf(x)\big)^{\frac{p}{q}} \|f\|_p^{1-\frac{p}{q}}.$$

Infine per il Corollario 1.26

$$\int_{\mathbb{R}^N} |I_\gamma f(x)|^q\, dx \leq 2^q C^q \|f\|_p^{q-p} \int_{\mathbb{R}^N} \big(Mf(x)\big)^p\, dx \leq 2^q C^q A_p^p\, \|f\|_p^q$$

da cui discende che

$$\|I_\gamma f\|_q \leq C' \|f\|_p$$

dove C' è una costante dipendente da N, p e γ. □

OSSERVAZIONE 1.42. L'ipotesi $p > 1$ non è dovuta alla tecnica dimostrativa adoperata, ma è una restrizione essenziale.
Infatti se $p = 1$, allora q sarà dato dalla relazione $\dfrac{1}{q} = 1 - \dfrac{\gamma}{N}$. Supponiamo per assurdo che $I_\gamma : L^1(\mathbb{R}^N) \to L^q(\mathbb{R}^N)$ sia limitato, ossia esista $C > 0$ tale che $\|I_\gamma f\|_q \leq C\|f\|_1$ per ogni $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Sia ora $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\varphi \geq 0$ con $\int_{\mathbb{R}^N} \varphi = 1$. Per ogni $\varepsilon > 0$ definiamo $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-N}\varphi(x/\varepsilon)$. Posta

$\psi(x) = \dfrac{1}{|x|^{N-\gamma}}$, $I_\gamma \varphi_\varepsilon = \varphi_\varepsilon * \psi \in L^q(\mathbb{R}^N)$ e per l'ipotesi di limitatezza di I_γ risulta

$$\|\varphi_\varepsilon * \psi\|_q = \|I_\gamma \varphi_\varepsilon\|_q \le C\|\varphi_\varepsilon\|_1 = C.$$

Siccome (φ_ε) è una famiglia di mollificatori, $I_\gamma\varphi_\varepsilon$ converge a ψ in $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ per $\varepsilon \to 0$ e possiamo quindi estrarre una successione φ_{ε_n} tale che

$$\varphi_{\varepsilon_n} * \psi(x) \to \psi(x)$$

per q.o. $x \in \mathbb{R}^N$. Per il lemma di Fatou

$$\|\psi\|_q \le \liminf_{n\to\infty} \|\varphi_{\varepsilon_n} * \psi\|_q \le C$$

ma questo è assurdo perché

$$\|\psi\|_q^q = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|x|^N}\, dx = \infty.$$

1.4.5. Potenze frazionarie del Laplaciano. Presa una funzione $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, per le note formule che legano derivazione e trasformata di Fourier richiamate nel Paragrafo 1.2.1 risulta

$$(-\Delta f)\hat{}(\xi) = (2\pi|\xi|)^2 \hat{f}(\xi)$$

per ogni $\xi \in \mathbb{R}^N$.
Da questa identità nasce l'idea di definire le potenze frazionarie dell'operatore di Laplace per mezzo della trasformata di Fourier. Presi $\beta \in \mathbb{C}$ e $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, definiamo $(-\Delta)^\beta f$ come quella funzione la cui trasformata di Fourier è data da

$$((-\Delta)^\beta f)\hat{}(\xi) = (2\pi|\xi|)^{2\beta} \hat{f}(\xi)$$

per ogni $\xi \in \mathbb{R}^N$.
In questa sezione proveremo che se $0 < Re\,\gamma < N$, allora esiste una costante $c(\gamma) > 0$ tale che

$$(-\Delta)^{-\frac{\gamma}{2}} = c(\gamma) I_\gamma.$$

Il senso in cui va intesa questa identità verrà chiarito nel Teorema 1.44.

Lemma 1.43. *Se $0 < \mathrm{Re}\,\gamma < N$, posto $c(\gamma) = \dfrac{\Gamma\left(\frac{N-\gamma}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)\ \pi^{\frac{N}{2}}\ 2^\gamma}$, allora*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|x|^{N-\gamma}} \overline{\varphi(x)}\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{(2\pi)^{-\gamma}}{c(\gamma)}\ \frac{1}{|\xi|^\gamma} \overline{\hat{\varphi}(\xi)}\, d\xi$$

per ogni $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. In altre parole $\dfrac{(2\pi)^{-\gamma}}{c(\gamma)}\ \dfrac{1}{|\xi|^\gamma}$ è la trasformata di Fourier (nel senso delle distribuzioni temperate) di $\dfrac{1}{|x|^{N-\gamma}}$.

DIM. Sia $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Preso $\delta > 0$, consideriamo la funzione $\psi(x) = e^{-\pi\delta|x|^2}$. E' ben noto che $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ e che $\hat{\psi}(\xi) = \delta^{-\frac{N}{2}} e^{-\frac{\pi|\xi|^2}{\delta}}$. Per l'identità di Parseval si ha che

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\pi\delta|x|^2}\overline{\varphi(x)}\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} \delta^{-\frac{N}{2}} e^{-\frac{\pi|\xi|^2}{\delta}}\overline{\hat{\varphi}(\xi)}\,d\xi.$$

Moltiplichiamo ambo i membri per $\delta^{\frac{N-\gamma}{2}-1}$ ed integriamo formalmente in δ

$$\int_0^\infty d\delta \int_{\mathbb{R}^N} \delta^{\frac{N-\gamma}{2}-1} e^{-\pi\delta|x|^2}\overline{\varphi(x)}\,dx = \int_0^\infty d\delta \int_{\mathbb{R}^N} \delta^{-\frac{\gamma}{2}-1} e^{-\frac{\pi|\xi|^2}{\delta}}\overline{\hat{\varphi}(\xi)}\,d\xi. \tag{1.28}$$

Perché l'uguaglianza (1.28) sia vera, dobbiamo provare che gli integrali a primo e secondo membro convergono.
Integriamo il modulo della funzione integranda del primo integrale prima in δ e poi in x. Integrando in δ, per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^N$ si ha

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \left|\delta^{\frac{N-\gamma}{2}-1}\right| e^{-\pi\delta|x|^2}\left|\overline{\varphi(x)}\right|\,d\delta &= \frac{|\varphi(x)|}{\pi^{\frac{N-Re\,\gamma}{2}}\,|x|^{N-Re\,\gamma}}\int_0^\infty s^{\frac{N-Re\,\gamma}{2}-1}\,e^{-s}\,ds \\ &= \frac{|\varphi(x)|}{\pi^{\frac{N-Re\,\gamma}{2}}\,|x|^{N-Re\,\gamma}}\,\Gamma\left(\frac{N-Re\,\gamma}{2}\right),\end{aligned}$$

dove l'integrale che definisce $\Gamma(\frac{N-Re\,\gamma}{2})$ converge perché per ipotesi $Re\,\gamma < N$. Se poi integriamo in x, allora

$$\frac{\Gamma\left(\frac{N-Re\,\gamma}{2}\right)}{\pi^{\frac{N-Re\,\gamma}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{|x|^{N-Re\,\gamma}}|\varphi(x)|\,dx < \infty$$

perché localmente $\dfrac{1}{|x|^{N-Re\,\gamma}}$ è sommabile e all'infinito φ è a decrescenza rapida. Per il Teorema di Tonelli allora l'integrale a primo membro della (1.28) converge assolutamente.
Integriamo allo stesso modo il modulo della funzione integranda dell'integrale a secondo membro della (1.28). Ponendo $s = \frac{\pi|\xi|^2}{\delta}$ si ha

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \delta^{\frac{-Re\,\gamma}{2}-1}\,e^{-\frac{\pi|\xi|^2}{\delta}}\left|\overline{\hat{\varphi}(\xi)}\right|\,d\delta &= \frac{|\hat{\varphi}(\xi)|}{\pi^{\frac{Re\,\gamma}{2}}|\xi|^{Re\,\gamma}}\int_0^\infty s^{\frac{Re\,\gamma}{2}-1}\,e^{-s}\,ds \\ &= \frac{|\hat{\varphi}(\xi)|}{\pi^{\frac{Re\,\gamma}{2}}|\xi|^{Re\,\gamma}}\,\Gamma\left(\frac{Re\,\gamma}{2}\right),\end{aligned}$$

dove l'integrale che definisce $\Gamma(\frac{Re\,\gamma}{2})$ converge perché per ipotesi $Re\,\gamma > 0$. Come per il primo integrale

$$\frac{\Gamma\left(\frac{Re\,\gamma}{2}\right)}{\pi^{\frac{Re\,\gamma}{2}}}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{|\xi|^{Re\,\gamma}}|\hat{\varphi}(\xi)|\,d\xi < \infty$$

e quindi, ancora una volta per il Teorema di Tonelli, l'integrale a secondo membro della (1.28) risulta assolutamente convergente.
Allora la (1.28) è soddisfatta e per il Teorema di Fubini abbiamo che

$$\int_{\mathbb{R}^N} \overline{\varphi(x)}\, dx \int_0^\infty \delta^{\frac{N-\gamma}{2}-1}\, e^{-\pi\delta|x|^2}\, d\delta = \int_{\mathbb{R}^N} \overline{\hat\varphi(\xi)}\, d\xi \int_0^\infty \delta^{-\frac{\gamma}{2}-1}\, e^{-\frac{\pi|\xi|^2}{\delta}}\, d\delta$$

e quindi

$$\frac{\Gamma\left(\frac{N-\gamma}{2}\right)}{\pi^{\frac{N-\gamma}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|x|^{N-\gamma}} |\varphi(x)|\, dx = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{\pi^{\frac{\gamma}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|\xi|^\gamma} |\hat\varphi(\xi)|\, d\xi.$$

Da quest'ultima discende immediatamente la tesi. □

Teorema 1.44. *Siano $0 < \operatorname{Re}\gamma < N$ e $c(\gamma)$ definito come nel Lemma precedente. Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, allora*

$$c(\gamma) I_\gamma f = (-\Delta)^{-\frac{\gamma}{2}} f,$$

cioè $c(\gamma)(I_\gamma f)\hat{}(\xi) = (2\pi|\xi|)^{-\gamma} \hat f(\xi)$ nel senso delle distribuzioni temperate.

Dim. Sia $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Per il Lemma 1.43

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|x|^{N-\gamma}} \overline{\varphi(x)}\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{(2\pi)^{-\gamma}}{c(\gamma)} \frac{1}{|\xi|^\gamma} \overline{\hat\varphi(\xi)}\, d\xi \tag{1.29}$$

per ogni $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Fissato $x \in \mathbb{R}^N$ poniamo $\varphi = \overline{f(x-\cdot)}$, sostituiamo in (1.29) ed otteniamo

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|y|^{N-\gamma}} f(x-y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{(2\pi)^{-\gamma}}{c(\gamma)} \frac{e^{2\pi i x\cdot\xi}}{|\xi|^\gamma} \hat f(\xi)\, d\xi. \tag{1.30}$$

Osserviamo che il primo membro della (1.30) è $I_\gamma f(x)$.
Prendiamo adesso $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, moltiplichiamo ambo i membri della (1.30) per $\hat g(x)$ ed integriamo in x. Allora

$$\int_{\mathbb{R}^N} I_\gamma f(x)\, \hat g(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} \hat g(x)\, dx \int_{\mathbb{R}^N} \frac{(2\pi)^{-\gamma}}{c(\gamma)} \frac{e^{2\pi i x\cdot\xi}}{|\xi|^\gamma} \hat f(\xi)\, d\xi.$$

Come si può facilmente verificare entrambi gli integrali a primo e a secondo membro convergono assolutamente. Possiamo perciò usare il teorema di Fubini e invertire l'ordine di integrazione, ottenendo

$$\int_{\mathbb{R}^N} I_\gamma f(x)\, \hat g(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{(2\pi)^{-\gamma}}{c(\gamma)} \frac{e^{2\pi i x\cdot\xi}}{|\xi|^\gamma} \hat f(\xi)\, g(\xi)\, d\xi.$$

Quest'ultima uguaglianza, valida per ogni $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, afferma che la trasformata di Fourier nel senso delle distribuzioni temperate di $I_\gamma f$ è la funzione $\dfrac{(2\pi|\xi|)^{-\gamma}\hat f}{c(\gamma)}$, ossia la tesi. □

1.4.6. Immersioni di Sobolev. Una dimostrazione dei teoremi di immersione di Sobolev per $1 < p \leq \infty$ può essere fatta con l'ausilio dei potenziali di Riesz. Il Teorema 1.41 ci permette infatti di dedurre le disuguaglianze di Sobolev, dopo aver osservato che vale la seguente rappresentazione per funzioni $C_c^1(\mathbb{R}^N)$.

LEMMA 1.45. *Sia $f \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$, allora per ogni $x \in \mathbb{R}^N$*

$$f(x) = \frac{1}{N\omega_N} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla f(x-y) \cdot \frac{y}{|y|^N} \, dy. \tag{1.31}$$

DIM. Sia $x \in \mathbb{R}^N$. Fissato $\omega \in S^{N-1}$, per ogni $t \in \mathbb{R}$ poniamo $g(t) = f(x - t\omega)$. Per il teorema fondamentale del calcolo integrale

$$f(x) = g(0) = -\int_0^\infty g'(t) \, dt = \int_0^\infty \nabla f(x - t\omega) \cdot \omega \, dt.$$

Integriamo l'identità precedente rispetto a ω su S^{N-1} ed otteniamo

$$\begin{aligned} |S^{N-1}| f(x) &= \int_{S^{N-1}} d\sigma(\omega) \int_0^\infty \nabla f(x - t\omega) \cdot \frac{t\omega}{t^N} \, t^{N-1} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla f(x-y) \cdot \frac{y}{|y|^N} \, dy, \end{aligned}$$

dove $|S^{N-1}| = N\omega_N$ è la misura (N-1)-dimensionale della sfera S^{N-1}. □

Proviamo dapprima le disuguaglianze di Sobolev in tutto $\mathbb{R}^N$ per $1 < p < N$. Osserviamo che questa tecnica dimostrativa non consente di ottenere le stime nel caso $p = 1$.

TEOREMA 1.46 (Sobolev). *Siano $1 < p < N$ e $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$. Allora esiste $C > 0$ tale che*

$$\|f\|_{p^*} \leq C \|\nabla f\|_p \tag{1.32}$$

per ogni $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, cioè $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$.

DIM. Per la densità di $C_c^1(\mathbb{R}^N)$ in $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ è sufficiente provare la stima (1.32) per le funzioni di $C_c^1(\mathbb{R}^N)$. Sia allora $f \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$. Per il lemma precedente

$$|f(x)| \leq \frac{1}{N\omega_N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|\nabla f(x-y)|}{|y|^{N-1}} \, dy = \frac{1}{N\omega_N} I_1(|\nabla f|), \tag{1.33}$$

dove $I_1(|\nabla f|)$ è il potenziale di Riesz di densità $|\nabla f|$ di parametro $\gamma = 1$. Per il Teorema 1.41, I_1 è continuo da $L^p(\mathbb{R}^N)$ a $L^{p*}(\mathbb{R}^N)$. Questo fatto insieme alla (1.33) implica che

$$\|f\|_{p*} \leq \frac{1}{N\omega_N} \|I_1(|\nabla f|)\|_q \leq C_{N,p} \|\nabla f\|_p,$$

dove $C_{N,p}$ è una costante che dipende da N e da p. □

E' immediato verificare che le stime provate sopra continuano a valere per spazi di Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$, con Ω aperto di $\mathbb{R}^N$.

COROLLARIO 1.47 (Sobolev). *Siano Ω aperto non vuoto di $\mathbb{R}^N$, $1 < p < N$ e $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$. Allora esiste $C > 0$ tale che*

$$\|f\|_{p^*} \le C\|\nabla f\|_p \tag{1.34}$$

per ogni $f \in W_0^{1,p}(\Omega)$, cioè $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$.

DIM. Presa $f \in C_c^1(\Omega)$, possiamo estenderla a zero fuori di Ω ed ottenere una funzione, che indichiamo ancora con f, che appartiene a $C_c^1(\mathbb{R}^N)$. Per il Teorema 1.46, esiste una costante $C_{N,p} > 0$ indipendente da f tale che

$$\|f\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \le C_{N,p}\|\nabla f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Poiché la f ha supporto compatto in Ω si ha che $\|f\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} = \|f\|_{L^{p^*}(\Omega)}$ e $\|\nabla f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \|\nabla f\|_{L^p(\Omega)}$. La tesi segue allora per densità. □

Vediamo adesso come dal Lemma 1.45 si possa ricavare anche la disuguaglianza di Morrey.

OSSERVAZIONE 1.48. Con un semplice cambio di variabili, riscriviamo la (1.31) per un aperto qualsiasi di $\mathbb{R}^N$. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto non vuoto e sia $f \in C_c^1(\Omega)$; allora

$$f(x) = \frac{1}{N\omega_N}\int_\Omega \nabla f(y)\cdot\frac{(x-y)}{|x-y|^N}\,dy$$

per ogni $x \in \Omega$.
Infatti, se prendiamo $f \in C_c^1(\Omega)$ e la estendiamo a zero al di fuori di Ω, allora, per il Lemma 1.45,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{N\omega_N}\int_{\mathbb{R}^N} \nabla f(x-y)\cdot\frac{y}{|y|^N}\,dy = \frac{1}{N\omega_N}\int_{\mathbb{R}^N} \nabla f(y)\cdot\frac{(x-y)}{|x-y|^N}\,dy \\ &= \frac{1}{N\omega_N}\int_\Omega \nabla f(y)\cdot\frac{(x-y)}{|x-y|^N}\,dy \end{aligned}$$

per ogni $x \in \Omega$.

LEMMA 1.49. *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto non vuoto, $g :]0,\infty[\to [0,\infty[$ funzione decrescente e $\psi(x) = g(|x|) \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Se $|\Omega| = |B(0,R)|$ per qualche $R > 0$, allora*

$$\int_\Omega \psi(x)\,dx \le \int_{B(0,R)} \psi(x)\,dx.$$

DIM. Valgono le seguenti identità

$$|\Omega\backslash B(0,R)| = |\Omega|-|\Omega\cap B(0,R)| \quad \text{e} \quad |B(0,R)\backslash\Omega| = |B(0,R)|-|\Omega\cap B(0,R)|,$$

dalle quali, tenuto conto che $|\Omega| = |B_R(0)|$, segue che

$$|\Omega \setminus B_R(0)| = |B_R(0) \setminus \Omega|.$$

Siccome

$$\int_{B(0,R)} \psi = \int_{B(0,R)\backslash\Omega} \psi + \int_{B(0,R)\cap\Omega} \psi \quad \text{e} \quad \int_\Omega \psi = \int_{\Omega\backslash B(0,R)} \psi + \int_{\Omega\cap B(0,R)} \psi \tag{1.35}$$

risulta

$$\begin{aligned} \int_{B(0,R)} \psi - \int_\Omega \psi &= \int_{B(0,R)\backslash\Omega} g(|x|) - \int_{\Omega\backslash B(0,R)} g(|x|) \\ &\geq g(R)\,|B(0,R)\setminus\Omega| - g(R)\,|\Omega\setminus B(0,R)| = 0. \end{aligned}$$

□

TEOREMA 1.50 (Morrey). *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto limitato e sia $p > N$. Allora*

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega).$$

DIM. Sia $f \in C_c^1(\Omega)$. Per l'Osservazione 1.48 per ogni $x \in \Omega$ risulta

$$|f(x)| \leq \frac{1}{N\omega_N} \int_\Omega \frac{|\nabla f(y)|}{|x-y|^{N-1}}\, dy.$$

L'ipotesi $p > N$ implica che $\dfrac{1}{|x-y|^{N-1}}$ appartiene ad $L^{p'}_{loc}(\mathbb{R}^N)$, sicché applicando la disuguaglianza di Hölder si ha

$$|f(x)| \leq \frac{1}{N\omega_N} \left(\int_\Omega |\nabla f(y)|^p\, dy\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega \frac{dy}{|x-y|^{(N-1)p'}}\right)^{\frac{1}{p'}} \tag{1.36}$$

per ogni $x \in \Omega$.

Sia adesso $R > 0$ tale che $|\Omega| = |B(0,R)| = \omega_N R^N$. Per il Lemma 1.49

$$\left(\int_\Omega \frac{dy}{|x-y|^{(N-1)p'}}\right)^{\frac{1}{p'}} \leq \left(\int_{B(0,R)} \frac{dy}{|y|^{(N-1)p'}}\right)^{\frac{1}{p'}} = c\, R^{1-\frac{N}{p}}, \tag{1.37}$$

dove $c = c(N,p) > 0$ è una costante che dipende da N e da p. Mettendo assieme (1.36) e (1.37) otteniamo che

$$\|f\|_\infty \leq c(N,p)\, \|\nabla f\|_p\, R^{1-\frac{N}{p}} = c(N,p,\Omega)\, \|\nabla f\|_p.$$

La tesi segue per densità. □

COROLLARIO 1.51. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto limitato di classe C^1. Allora*

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega).$$

Dim. Sia Ω' aperto limitato di $\mathbb{R}^N$ tale che $\Omega \subset\subset \Omega'$. Allora esiste un operatore di estensione

$$E : W^{1,p}(\Omega) \to W_0^{1,p}(\Omega')$$

$$u \mapsto Eu$$

tale che $\|Eu\|_{W_0^{1,p}(\Omega')} \le C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ per ogni $u \in W^{1,p}(\Omega)$ e qualche $C > 0$ (vedi ad esempio [**1**, Teorema III.3.16, Teorema IV.4.26].) Per il Teorema 1.50 $Eu \in L^\infty(\Omega')$ ed esiste $C' > 0$ tale che

$$\|Eu\|_{L^\infty(\Omega')} \le C'\|Eu\|_{W_0^p(\Omega')}.$$

Pertanto

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \le \|Eu\|_{L^\infty(\Omega')} \le C''\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

□

Proviamo ora le immersioni degli spazi di Sobolev con $p > N$ in spazi di funzioni hölderiane.

Lemma 1.52. *Siano Ω un aperto convesso limitato di $\mathbb{R}^N$, $u \in C^1(\overline{\Omega})$, $S \subset \Omega$ di misura non nulla. Posti $u_S = \frac{1}{|S|}\int_S u$ e $d = \mathrm{diam}(\Omega)$ risulta per ogni $x \in \Omega$*

$$|u(x) - u_S| \le \frac{d^N}{N|S|}\int_\Omega \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{N-1}}\, dy.$$

Dim. Siano x, y due distinti elementi di Ω. Poniamo $\omega = \frac{y-x}{|y-x|}$ e $g(t) = u(x + t\omega)$ per $0 \le t \le |y-x|$. La convessità di Ω assicura che la funzione g è ben definita. Per il Teorema fondamentale del calcolo integrale si ha

$$\begin{aligned} u(y) - u(x) &= g(|y-x|) - g(0) = \int_0^{|y-x|} g'(t)\, dt \\ &= \int_0^{|y-x|} \nabla u(x + t\omega) \cdot \omega\, dt\, . \end{aligned}$$

Integrando rispetto a y su S e dividendo per $|S|$ ambo i membri di quest'ultima uguaglianza risulta

$$u_S - u(x) = \frac{1}{|S|}\int_S dy \int_0^{|y-x|} \nabla u(x + t\omega) \cdot \omega\, dt.$$

Posto

$$V = \begin{cases} |\nabla u| & \text{in } \Omega \\ 0 & \text{fuori,} \end{cases} \tag{1.38}$$

risulta

$$
\begin{aligned}
|u_S - u(x)| &\leq \frac{1}{|S|} \int_{|y-x|\leq d} dy \int_0^\infty V(x+t\omega)\, dt \\
&= \frac{1}{|S|} \int_0^d \rho^{N-1}\, d\rho \int_{S^{N-1}} d\sigma(\omega) \int_0^\infty V(x+t\omega)\, dt \cdot \frac{t^{N-1}}{t^{N-1}} \\
&= \frac{d^N}{N|S|} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{V(x+z)}{|z|^{N-1}}\, dz = \frac{d^N}{N|S|} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{V(x-z)}{|z|^{N-1}}\, dz \\
&= \frac{d^N}{N|S|} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{V(y)}{|x-y|^{N-1}}\, dy = \frac{d^N}{N|S|} \int_\Omega \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{N-1}}\, dy.
\end{aligned}
$$

□

PROPOSIZIONE 1.53. *Siano* $u \in W^{1,p}(B(x_0,R))$ *e* $N < p \leq \infty$; *allora*

(i) $u \in C(\overline{B}(x_0,R))$
(ii) $\|u\|_\infty \leq c(N,R,p)\|u\|_{W^{1,p}(B(x_0,R))}$
(iii) $|u(x) - u_{B(x_0,R)}| \leq c(N,p)\|\nabla u\|_{L^p(B(x_0,R))} R^{1-\frac{N}{p}}$ *per* $x \in B(x_0,R)$.

OSSERVAZIONE 1.54. Dalla (iii) discende immediatamente che

$$|u(x) - u(y)| \leq 2c(N,p)\|\nabla u\|_{L^p(B(x_0,R))} R^{1-\frac{N}{p}}$$

per ogni $x, y \in B(x_0,R)$.

DIM. (Proposizione 1.53) (Passo 1) Supponiamo $p < \infty$.
Sia $u \in C^1(\overline{B(x_0,R)})$. Per il Lemma 1.52, posti $S = \Omega = B(x_0,R)$, abbiamo che

$$|u(x) - u_{B(x_0,R)}| \leq \frac{2^N}{N\omega_N} \int_{B(x_0,R)} \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{N-1}}\, dy \tag{1.39}$$

per ogni $x \in B(x_0,R)$. Siccome $p > N$ la funzione $\psi(y) = \dfrac{1}{|x-y|^{N-1}} \in L^{p'}(B(x_0,R))$ e per il Lemma 1.49 $\int_{B(x_0,R)} \psi(y)dy \leq \int_{B(x,R)} \psi(y)dy$. Per la disuguaglianza di Hölder, dalla (1.39) discende

$$
\begin{aligned}
|u(x) - u_{B(x_0,R)}| &\le \frac{2^N}{N\omega_N}\left(\int_{B(x_0,R)} |\nabla u(y)|^p\, dy\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\qquad \times \left(\int_{B(x_0,R)} \frac{1}{|x-y|^{(N-1)p'}}\, dy\right)^{\frac{1}{p'}} \\
&\le \frac{2^N}{N\omega_N}\|\nabla u\|_{L^p(B(x_0,R))}\left(\int_{B(0,R)} \frac{1}{|z|^{(N-1)p'}}\, dz\right)^{\frac{1}{p'}} \\
&= \frac{2^N}{N\omega_N}\|\nabla u\|_{L^p(B(x_0,R))}\left(N\omega_N\int_0^R r^{N-1-(N-1)\frac{p}{p-1}}\, dr\right)^{1-\frac{1}{p}} \\
&= \frac{2^N}{N\omega_N}\|\nabla u\|_{L^p(B(x_0,R))}\left(N\omega_N\,\frac{R^{N-(N-1)\frac{p}{p-1}}}{N-(N-1)\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&= \frac{2^N\,(N\omega_N)^{-\frac{1}{p}}}{\left(N-(N-1)\frac{p}{p-1}\right)^{\frac{p-1}{p}}}\, R^{1-\frac{N}{p}}\, \|\nabla u\|_{L^p(B(x_0,R))}.
\end{aligned}
$$

Posto

$$
c(N,p) = \frac{2^N\,(N\omega_N)^{-\frac{1}{p}}}{\left(N-(N-1)\frac{p}{p-1}\right)^{\frac{p-1}{p}}} > 0 \tag{1.40}
$$

abbiamo provato la (iii) per funzioni di classe $C^1(\overline{B(x_0,R)})$. Dalla (iii) discende immediatamente la (ii), infatti per ogni $x \in B(x_0,R)$

$$
|u(x)| \le u_{B(x_0,R)} + c(N,p)R^{1-\frac{N}{p}}\|\nabla u\|_{L^p(B(x_0,R))} \le c(N,R,p)\,\|u\|_{W^{1,p}(B(x_0,R))},
$$

dove abbiamo posto

$$
c(N,R,p) = \omega_N^{\frac{p-1}{p}}\, R^{N-\frac{N}{p}} + c(N,p)R^{1-\frac{N}{p}}. \tag{1.41}
$$

Sia ora $u \in W^{1,p}(B(x_0,R))$. Poiché $C^1(\overline{B(x_0,R)})$ è denso in $W^{1,p}(B(x_0,R))$ esiste $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C^1(\overline{B(x_0,R)})$ che converge ad u in $W^{1,p}(B(x_0,R))$. Dalla (ii) ricaviamo che per ogni $n,m \in \mathbb{N}$

$$
\|u_n - u_m\|_\infty \le c(N,R,p)\,\|u_n - u_m\|_{1,p}
$$

e cioè che la successione (u_n) è di Cauchy per la norma $\|\cdot\|_\infty$. Questo prova la (i), infatti (u_n) converge ad u uniformemente in $\overline{B(x_0,R)}$ ed u risulta perciò continua in $\overline{B(x_0,R)}$. Per ciascuna u_n valgono sia la (ii) che la (iii). Da queste, per $n \to \infty$, si ricavano la (ii) e la (iii) per la funzione u.
(Passo 2) Supponiamo $p = \infty$.
Sia $u \in W^{1,\infty}(B(x_0,R))$. Allora per ogni $p > N$ $u \in W^{1,p}(B(x_0,R))$ e per

il primo passo $u \in C(\overline{B(x_0, R)})$ e valgono le stime

$$\|u\|_\infty \leq c(N, R, p)\|u\|_{W^{1,p}(B(x_0,R))} \tag{1.42}$$

$$|u(x) - u_{B(x_0,R)}| \leq c(N, p)\|\nabla u\|_{L^p(B(x_0,R))} R^{1-\frac{N}{p}} \tag{1.43}$$

per ogni $x \in B(x_0, R)$. Osserviamo che le costanti $c(N, R, p)$ e $c(N, p)$ definite rispettivamente in (1.40) ed in (1.41) non esplodono al tendere di p all'infinito. Facciamo tendere allora p ad infinito in (1.42) e (1.43) ed otteniamo le stime

$$|u(x) - u_{B(x_0,R)}| \leq 2^N\, R\, \|\nabla u\|_{L^\infty(B(x_0,R))}$$
$$\|u\|_\infty \leq c(N, R)\, \|u\|_{W^{1,\infty}(B(x_0,R))},$$

che sono proprio rispettivamente la (iii) e la (ii) dell'enunciato. □

TEOREMA 1.55 (Morrey). *Sia $N < p < \infty$; allora, posto $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$, risulta*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow C_0(\mathbb{R}^N) \cap C^\alpha(\mathbb{R}^N).$$

DIM. Sia $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Fissiamo una palla $B(x_0, 1)$. Per la Proposizione 1.53

$$\|u\|_\infty \leq c(N, p)\, \|u\|_{W^{1,p}(B(x_0,1))} \leq c(N, p)\, \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)},$$

per ogni $x \in B(x_0, 1)$. Data l'arbitrarietà della palla $B(x_0, 1)$ e data l'indipendenza della costante $c(N, p)$ da quest'ultima abbiamo che

$$\|u\|_{L^\infty(B(x_0,1))} \leq c(N, p)\, \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}. \tag{1.44}$$

Sia ora $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni di $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ che converge ad u in $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Applicando la disuguaglianza (1.44) alla differenza $u_n - u$ e facendo tendere n all'infinito ricaviamo che $u \in C_0(\mathbb{R}^N)$.
Prendiamo $x, y \in \mathbb{R}^N$ e consideriamo la palla $B(x, |x - y|)$. Per l'Osservazione 1.54

$$|u(x) - u(y)| \leq 2c(N, p)\, \|\nabla u\|_{L^p(B(x,|x-y|))}\, |x - y|^{1-\frac{N}{p}}$$

e quindi

$$|u(x) - u(y)| \leq 2c(N, p)\, \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}\, |x - y|^{1-\frac{N}{p}}.$$

Questa prova che $u \in C^\alpha(\mathbb{R}^N)$, con $\alpha = 1 - \dfrac{N}{p}$. □

Grazie a quanto visto finora si può agevolmente provare la seguente caratterizzazione dello spazio $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$.

TEOREMA 1.56. *Risulta*

$$W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N) = L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap Lip(\mathbb{R}^N).$$

DIM. " $\subset$ " : Sia $u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$. Allora $u \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e $u \in W^{1,p}(B(x_0,R))$ per ogni $p \geq 1$ e per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^N$ ed $R > 0$. Presi $x, y \in \mathbb{R}^N$ consideriamo la palla $B(x, |x-y|)$ e per l'Osservazione 1.54 abbiamo che

$$|u(x) - u(y)| \leq 2c(N,p)\, \|\nabla u\|_{L^p(B(x,|x-y|))}\, |x-y|^{1-\frac{N}{p}}.$$

Mandando p ad infinito nella disuguaglianza precedente e ricordando che la costante $c(N,p)$ non esplode al tendere di p all'infinito, si ha

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| &\leq 2c(N)\, \|\nabla u\|_{L^\infty(B(x,|x-y|))}\, |x-y| \\ &\leq 2c(N)\, \|\nabla u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\, |x-y|. \end{aligned}$$

Quest'ultima stima ci dice che $u \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^N)$.
Vediamo un altro modo per provare questa implicazione. Consideriamo una famiglia di mollificatori $(\varphi_\varepsilon) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ e poniamo $u_\varepsilon = u * \varphi_\varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$. Per ogni $\varepsilon > 0$, $u_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ e

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_\infty = \|\nabla u * \varphi_\varepsilon\|_\infty \leq \|\nabla u\|_\infty.$$

Siccome $u_\varepsilon \to u$ in $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ possiamo estrarre una successione u_{ε_n} che converge ad u quasi ovunque in $\mathbb{R}^N$. Per il Teorema di Lagrange

$$|u_{\varepsilon_n}(y) - u_{\varepsilon_n}(x)| \leq \|\nabla u_{\varepsilon_n}\|_\infty\, |x-y| \leq \|\nabla u\|_\infty\, |x-y|$$

per ogni $x, y \in \mathbb{R}^N$. Da questa stima se mandiamo $n \to \infty$ otteniamo che $u \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^N)$.
" $\supset$ " : Sia $u \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^N)$. Esiste allora $L > 0$ tale che $|u(x) - u(y)| \leq L\,|x-y|$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}^N$. Per ogni $h > 0$ poniamo

$$\tau_h u(x) = \frac{u(x_1 + h, x_2, \ldots, x_N) - u(x_1, x_2, \ldots, x_N)}{|h|}$$

per ogni $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^N$. Per l'ipotesi di lipschitzianità di u risulta

$$|\tau_h u(x)| \leq L \tag{1.45}$$

per ogni $h > 0$ ed $x \in \mathbb{R}^N$. Fissata allora la palla $B(0,R)$ si ha

$$\int_{B(0,R)} |\tau_h u|^2 \leq L^2\, |B(0,R)|.$$

Per la riflessività di $L^2(B(0,R))$ esistono $h_n \to 0$ e $v \in L^2(B(0,R))$ tali che $\tau_{h_n} u \to v$ per $n \to \infty$ debolmente in $L^2(B(0,R))$. Ne segue

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} v\, \phi &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \tau_{h_n} u\, \phi = -\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} u\, \tau_{-h_n} \phi \\ &= -\int_{\mathbb{R}^N} u\, \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \end{aligned}$$

per ogni $\phi \in C_c^\infty(B(0,R))$. Allora u ammette derivata nel senso delle distribuzioni $D_1 u = v$ in $B(0,R)$. Siccome $R > 0$ è arbitrario u ammette derivata debole $D_1 u$ in $\mathbb{R}^N$.
Rimane da provare che $D_1 u \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Sia E un insieme misurabile tale

che $|E| > 0$, $E \subset B(0,R)$ per qualche $R > 0$. Allora dalla (1.45) discende che

$$\left|\frac{1}{|E|}\int_E D_1 u\right| = \frac{1}{|E|}|< D_1 u, \chi_E >| = \frac{1}{|E|}\left|\lim_{n\to\infty} < \tau_{h_n} u, \chi_E >\right| \le L$$

e quindi, data l'arbitrarietà di E, segue che $\|D_1 u\|_\infty \le L$. □

Proviamo infine che se $N < p \le \infty$ le funzioni in $W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ sono quasi ovunque differenziabili. In particolare ciò si applica alle funzioni lipschitziane.

TEOREMA 1.57. *Siano $N < p \le \infty$ ed $u \in W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Allora u è differenziabile quasi ovunque.*

DIM. Possiamo supporre $p < \infty$. Sia $u \in W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ e sia $x_0 \in p\text{-}\mathcal{L}(\nabla u)$ (cioè un p-punto di Lebesgue per ciascuna componente di ∇u). Poniamo per ogni $x \in \mathbb{R}^N$

$$g(x) = u(x) - u(x_0) - \nabla u(x_0)\cdot(x - x_0).$$

La funzione g così definita appartiene a $W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^N)$, $g(x_0) = 0$ e $\nabla g(x) = \nabla u(x) - \nabla u(x_0)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^N$. Fissata la palla $B(x_0, |x - x_0|)$, per l'Osservazione 1.54 si ha

$$\begin{aligned} |g(x)| &= |g(x) - g(x_0)| \\ &\le 2c(N,p)\left(\int_{B(x_0,|x-x_0|)} |\nabla g(y)|^p\,dy\right)^{\frac{1}{p}} |x - x_0|^{1-\frac{N}{p}} \\ &= 2c(N,p)\,|x - x_0|^{1-\frac{N}{p}}\left(\int_{B(x_0,|x-x_0|)} |\nabla u(y) - \nabla u(x_0)|^p\,dy\right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Dividiamo primo e secondo membro della disuguaglianza precedente per $|x - x_0| \ne 0$ ed otteniamo

$$\frac{|u(x) - u(x_0) - \nabla u(x_0)\cdot(x - x_0)|}{|x - x_0|}$$
$$\le 2c(N,p)\left(\frac{1}{|x - x_0|^N}\int_{B(x_0,|x-x_0|)} |\nabla u(y) - \nabla u(x_0)|^p\,dy\right)^{\frac{1}{p}}$$

che converge e zero per $x \to x_0$. Quindi u è differenziabile nel punto x_0. Per il Corollario 1.37 quasi ogni punto di $\mathbb{R}^N$ è un p-punto di Lebesgue per una funzione localmente p-sommabile e da qui segue la tesi. □

TEOREMA 1.58 (Rademacher). *Le funzioni Lipschitziane sono differenziabili quasi ovunque.*

DIM. Basta usare i Teoremi 1.56 e 1.57. □

CAPITOLO 2

L'equazione di Poisson

L'obiettivo di questo capitolo è quello di studiare l'equazione di Poisson $\lambda u - \Delta u = f$ con dato $f \in L^p$. Per far ciò proveremo la disuguaglianza di Calderón e Zygmund che consente di stimare la norma L^p delle derivate seconde di u con quella del suo Laplaciano. In questo modo se $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$ è soluzione dell'equazione ellittica $\lambda u - \Delta u = f$, con $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, allora $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$.

La disuguaglianza di Calderón-Zygmund si riduce ad un'uguaglianza nel caso $p = 2$ e si ottiene immediatamente con una semplice integrazione per parti. Per $p \neq 2$ la dimostrazione richiede, come vedremo, sforzi maggiori. Applicheremo infatti il teorema di interpolazione di Marcinkiewicz.

Prima di occuparci della disuguaglianza di Calderón-Zygmund facciamo vedere come si determina la soluzione dell'equazione di Poisson.

2.1. Il potenziale Newtoniano

Sia Ω un aperto non vuoto connesso limitato di $\mathbb{R}^N$, con frontiera di classe C^1 a tratti. Il Teorema della divergenza afferma che per ogni $f \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$

$$\int_\Omega \operatorname{div} f \, dx = \int_{\partial\Omega} f \cdot n \, d\sigma,$$

dove n è la normale esterna a Ω e $d\sigma$ la misura di Lebesgue su $\partial\Omega$. Prese $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$, dal Teorema della divergenza scaturiscono le identità di Green

$$\int_\Omega u\Delta v \, dx = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} \, d\sigma \tag{2.1}$$

$$\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u) \, dx = \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \right) \, d\sigma. \tag{2.2}$$

La soluzione fondamentale dell'operatore di Laplace Δ è la funzione così definita

$$\Gamma(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \log|x| & \text{per } N = 2 \\ \dfrac{1}{N(2-N)\omega_N} \dfrac{1}{|x|^{N-2}} & \text{per } N \geq 3 \end{cases}$$

e soddisfa $\Delta\Gamma = 0$ in $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$. Risulta $\Gamma \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ e inoltre

$$\begin{aligned} D_i\Gamma(x) &= \frac{1}{N\omega_N} \frac{x_i}{|x|^N} \\ D_{ij}\Gamma(x) &= \frac{1}{N\omega_N} \left[\frac{\delta_{ij}}{|x|^N} - N \frac{x_i x_j}{|x|^{N+2}} \right]. \end{aligned}$$

Osserviamo che le derivate prime della Γ sono localmente sommabili, mentre le derivate del secondo ordine non lo sono. In generale

$$|D^k\Gamma(x)| = O\left(\frac{1}{|x|^{N-2+k}} \right) \qquad \text{per} \quad |x| \to 0, \ \infty \tag{2.3}$$

dove con D^k indichiamo una qualunque derivata di ordine k.

Data $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, definiamo *Potenziale Newtoniano* di f la funzione

$$N(f) = \Gamma * f = \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x-y) f(y)\, dy.$$

In particolare il Potenziale Newtoniano risulta ben definito per funzioni in $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ ed è soluzione dell'equazione di Poisson $\Delta u = f$, come proveremo nelle seguente proposizione.

PROPOSIZIONE 2.1. *Se $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ allora $N(f) \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ e*

$$\Delta N(f) = f.$$

DIM. Sia $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Poniamo $u = N(f)$. Per definizione

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x-y) f(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(y) f(x-y)\, dy$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^N$. Si verifica facilmente che è possibile derivare infinite volte sotto il segno di integrale e quindi che $u \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$. Inoltre

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(y) \Delta f(x-y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(y-x) \Delta f(y)\, dy \\ &= \lim_{\rho \to 0} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(x,\rho)} \Gamma(y-x) \Delta f(y)\, dy. \end{aligned}$$

Sia $\Omega = B(x,R) \setminus B(x,\rho)$ con $R > 0$ tale che $B(x,R)$ contenga il supporto di f. Per l'identità di Green (2.2) applicata a $\Gamma(x-\cdot)$ ed a f risulta

$$\begin{aligned}
&\int_{B(x,R)\setminus B(x,\rho)} \Gamma(y-x)\Delta f(y)\, dy \\
&\quad = \int_{B(x,R)\setminus B(x,\rho)} \Delta\Gamma(y-x) f(y)\, dy \\
&\quad + \int_{\partial B(x,R)} \left(\Gamma(y-x)\frac{\partial f}{\partial n}(y) - \frac{\partial \Gamma}{\partial n}(y-x) f(y)\right) d\sigma(y) \\
&\quad - \int_{\partial B(x,\rho)} \left(\Gamma(y-x)\frac{\partial f}{\partial n}(y) - \frac{\partial \Gamma}{\partial n}(y-x) f(y)\right) d\sigma(y).
\end{aligned}$$

Poiché *supp* $f \subset B(x,R)$ e $\Delta\Gamma(y-x) = 0$ per $y \neq x$, da quest'ultima identità segue che

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N\setminus B(x,\rho)} \Gamma(y-x)\Delta f(y)\, dy \\
&\quad = -\int_{\partial B(x,\rho)} \left(\Gamma(y-x)\frac{\partial f}{\partial n}(y) - \frac{\partial \Gamma}{\partial n}(y-x) f(y)\right) d\sigma(y).
\end{aligned}$$

Risulta

$$\left|\int_{\partial B(x,\rho)} \Gamma(y-x)\frac{\partial f}{\partial n}(y)\, d\sigma(y)\right| \le C\|\nabla f\|_\infty \frac{1}{\rho^{N-2}}\rho^{N-1}$$

e quindi

$$\int_{R^N\setminus B(x,\rho)} \Gamma(x-y)\Delta f(y)\, dy = O(\rho) + \frac{1}{N\omega_N \rho^{N-1}} \int_{\partial B(x,\rho)} f(y)\, d\sigma(y).$$

Facciamo allora tendere $\rho \to 0$ e otteniamo

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(y-x)\Delta f(y)\, dy = f(x),$$

ossia $\Delta u(x) = f(x)$. □

Esercizio 2.2. Provare che se $f \in C^2_c(\mathbb{R}^N)$ allora $N(f) \in C^2(\mathbb{R}^N)$ e $\Delta N(f) = f$.

Per completezza diamo anche una formula di rappresentazione per funzioni $u \in C^2(\overline{\Omega})$.

Proposizione 2.3. *Siano Ω aperto limitato di $\mathbb{R}^N$ di classe C^1 e $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Allora*

$$u(x) = \int_\Omega \Gamma(y-x)\Delta u(y)\, dy + \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial n}(y-x)u(y) - \Gamma(y-x)\frac{\partial u}{\partial n}(y)\right) d\sigma(y)$$

per ogni $x \in \Omega$.

OSSERVAZIONE 2.4. Se assumiamo inoltre che u abbia supporto compatto in Ω allora

$$u(x) = \int_\Omega \Gamma(y-x)\Delta u(y)\, dy,$$

cioè $u = N(\Delta u)$.

DIM. Fissiamo $x \in \Omega$. Per l'dentità di Green (2.2) applicata ad $\Omega \setminus B(x,\rho)$ risulta

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega\setminus B(x,\rho)} \Gamma(y-x)\Delta u(y)\, dy \\
&\qquad = \int_{\Omega\setminus B(x,\rho)} \Delta\Gamma(y-x)u(y)\, dy \\
&\qquad + \int_{\partial\Omega} \left(\Gamma(y-x)\frac{\partial u}{\partial n}(y) - \frac{\partial \Gamma}{\partial n}(y-x)u(y)\right) d\sigma(y) \\
&\qquad - \int_{\partial B(x,\rho)} \left(\Gamma(y-x)\frac{\partial u}{\partial n}(y) - \frac{\partial \Gamma}{\partial n}(y-x)u(y)\right) d\sigma(y),
\end{aligned}$$

dove, fra gli integrali a secondo membro, quello su $\Omega \setminus B(x,\rho)$ è nullo perché $\Delta\Gamma(y-x) = 0$ per $y \in \Omega \setminus B(x,\rho)$ e quello su $\partial B(x,\rho)$ converge ad $u(x)$ per $\rho \to 0$ come nella dimostrazione della Proposizione 2.1. Mandiamo allora ρ a zero ed otteniamo la tesi. □

Soffermiamoci sulle derivate del potenziale Newtoniano. Se $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, posto $u = N(f)$, per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha

$$|D^k u(x)| = O\left(\frac{1}{|x|^{N-2+k}}\right), \qquad \text{per } |x| \to \infty. \tag{2.4}$$

Infatti, scelto $R > 0$ tale che *supp* $f \subset B(0,R)$, si ha

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(x-y)f(y)\, dy = \int_{B(0,R)} \Gamma(x-y)f(y)\, dy.$$

Allora per $|x| > R$

$$\begin{aligned}
|D^k u(x)| &= \left|\int_{B(0,R)} D^k\Gamma(x-y)f(y)\, dy\right| \le C\int_{B(0,R)} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{N-2+k}}\, dy \\
&\le \frac{C}{(|x|-R)^{N-2+k}} \int_{B(0,R)} |f|.
\end{aligned}$$

Come anticipato, per $p = 2$ la disuguaglianza di Calderón-Zygmund si ottiene facilmente integrando per parti. Nel seguito indichiamo con D^2u la matrice Hessiana di u. Inoltre poniamo $|D^2u|^2 = \sum_{i,j} |D_{ij}u|^2$.

LEMMA 2.5. *Sia $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, allora*

$$\|D^2u\|_2 = \|\Delta u\|_2.$$

DIM. La tesi segue immediatamente integrando per parti. Infatti

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u|^2 &= \sum_{i,j=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^N} D_{ii}uD_{jj}u = -\sum_{i,j=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^N} D_iuD_{ijj}u \\ &= \sum_{i,j=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^N} D_{ij}uD_{ij}u = \int_{\mathbb{R}^N} |D^2u|^2.\end{aligned}$$

□

Come nel lemma precedente, dalla Proposizione 2.1 discende il risultato seguente dal quale dedurremo esistenza, unicità e regolarità in L^2.

PROPOSIZIONE 2.6. *Data $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ e posto $u = N(f)$, si ha*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |D^2u|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |f|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |\Delta u|^2.$$

DIM. Fissato $R > 0$ consideriamo la palla $B(0,R)$ di raggio R e centro l'origine. Per ogni $i,j = 1,\ldots,N$

$$\begin{aligned}\int_{B(0,R)} D_{ii}uD_{jj}u &= -\int_{B(0,R)} D_iuD_{ijj}u + \int_{\partial B(0,R)} D_iuD_{jj}u\ \nu_i\, d\sigma \\ &= \int_{B(0,R)} D_{ij}uD_{ij}u - \int_{\partial B(0,R)} D_iuD_{ij}u\ \nu_j\, d\sigma \\ &\quad + \int_{\partial B(0,R)} D_iuD_{jj}u\ \nu_i\, d\sigma.\end{aligned}$$

Sommando l'uguaglianza precedente su i,j, usando $\Delta u = f$ e (2.4), si ha

$$\int_{B(0,R)} |f|^2 = \int_{B(0,R)} |\Delta u|^2 = \int_{B(0,R)} |D^2u|^2 + O\left(\frac{1}{R^N}\right).$$

Per avere la tesi è sufficiente far tendere R all'infinito. □

Studiamo adesso le derivate prime del potenziale Newtoniano.

LEMMA 2.7. *Sia Ω aperto limitato e $K \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. L'operatore di convoluzione T_K definito da*

$$T_Kf(x) = \int_\Omega K(x-y)f(y)\, dy$$

è continuo da $L^p(\Omega)$ in $L^p(\Omega)$ per ogni $1 \le p \le \infty$.

Dim. Supponiamo $1 < p < \infty$: i casi $p = 1, \infty$ sono elementari. Poniamo

$$g(x) = \int_\Omega |K(x-y)||f(y)|dy$$

e sia R tale che $\Omega \subset B(R)$. Allora

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_\Omega |K(x-y)|^{\frac{1}{p}}|f(y)||K(x-y)|^{\frac{1}{p'}}dy \\ &\le \left(\int_\Omega |K(x-y)|dy\right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |K(x-y)||f(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\le \left(\int_{B(2R)} |K(r)|dr\right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |K(x-y)||f(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

Quindi

$$g(x)^p \le \|K\|^{p-1}_{L^1(B(2R))} \int_\Omega |K(x-y)||f(y)|^p dy$$

e, integrando su Ω,

$$\begin{aligned} \int_\Omega |g(x)|^p &\le \|K\|^{p-1}_{L^1(B(2R))} \int\int_{\Omega\times\Omega} |K(x-y)||f(y)|^p dxdy \\ &= \|K\|^{p-1}_{L^1(B(2R))} \int_\Omega |f(y)|^p dy \int_\Omega |K(x-y)|dx \\ &\le \|K\|^p_{L^1(B(2R))} \|f\|^p_p. \end{aligned}$$

Ne segue $T_k(f) \in L^p(\Omega)$ e

$$\|T_k f\|_p \le \|K\|_{L^1(B(2R))} \|f\|_p.$$

□

Il Potenziale Newtoniano è un operatore di convoluzione con nucleo localmente sommabile. Il lemma precedente ci dice allora che, se Ω è limitato,

$$N : L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$$

è un operatore continuo per ogni $1 \le p \le \infty$.
Lo stesso accade per il suo gradiente che è l'operatore di convoluzione associato al gradiente di Γ, anch'esso localmente sommabile.

Proposizione 2.8. *Se Ω è limitato, allora*

(i) $f \in L^\infty(\Omega) \Rightarrow N(f) \in C^1(\mathbb{R}^N) \subset C^1(\overline{\Omega})$
(ii) $N : L^p(\Omega) \to W^{1,p}(\Omega)$ *è continuo per ogni* $1 \le p \le \infty$.

DIM. (i) Sia $f \in L^\infty(\Omega)$. Poniamo $u = N(f)$ e $v = \int_\Omega \nabla\Gamma(\cdot - y) f(y)\, dy$. Consideriamo una funzione $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $0 \le \eta \le 1$, $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$ tale che

$$\eta(x) = \begin{cases} 0 & -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2} \\ 1 & |x| \ge 1\,. \end{cases}$$

Per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ poniamo

$$u_\varepsilon(x) = \int_\Omega \Gamma(x-y)\eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) f(y)\, dy.$$

Le funzioni u_ε convergono uniformemente ad u per $\varepsilon \to 0$, infatti

$$\begin{aligned} |u(x) - u_\varepsilon(x)| &\le \int_\Omega |\Gamma(x-y)| \left[1 - \eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right)\right] |f(y)|\, dy \\ &\le \|f\|_\infty \int_{|x-y|\le\varepsilon} |\Gamma(x-y)|\, dy = \|f\|_\infty \int_{|z|\le\varepsilon} |\Gamma(z)|\, dz \\ &= \frac{\|f\|_\infty}{N(N-2)\omega_N} \int_{|z|\le\varepsilon} \frac{1}{|z|^{N-2}} \stackrel{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Consideriamo adesso ∇u_ε. Risulta per ogni $x \in \mathbb{R}^N$

$$\begin{aligned} \nabla u_\varepsilon(x) &= \int_\Omega \nabla\Gamma(x-y)\eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) f(y)\, dy \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega \Gamma(x-y)\eta'\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right)\frac{x-y}{|x-y|} f(y)\, dy. \end{aligned}$$

Proviamo che $\nabla u_\varepsilon \to v$ uniformemente per $\varepsilon \to 0$.

$$\begin{aligned} |v(x) - \nabla u_\varepsilon(x)| &\le \int_\Omega |\nabla\Gamma(x-y)| \left[1 - \eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right)\right] |f(y)|\, dy \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega |\Gamma(x-y)| \left|\eta'\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right)\right| |f(y)|\, dy \\ &\le \frac{\|f\|_\infty}{N\omega_N}\int_{|z|\le\varepsilon} \frac{1}{|z|^{N-1}}\, dz \\ &\quad + \frac{\|\eta'\|_\infty \|f\|_\infty}{N(N-2)\omega_N}\,\frac{1}{\varepsilon}\int_{|z|\le\varepsilon} \frac{1}{|z|^{N-2}}\, dz \\ &\le C\left(\int_0^\varepsilon \frac{1}{r^{N-1}}\, r^{N-1} dr + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon \frac{1}{r^{N-2}}\, r^{N-1} dr\right) \\ &= \frac{3}{2} C\varepsilon \stackrel{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

dove $C = \|f\|_\infty \max\left\{1, \frac{\|\eta'\|_\infty}{N-2}\right\}$. Possiamo concludere allora che $u \in C^1(\mathbb{R}^N)$ e $\nabla u = v$.

(ii) Sia $f \in L^p(\Omega)$ e sia $f_n \subset L^\infty(\Omega)$ tale che f_n converge ad f in $L^p(\Omega)$.

Siccome N è un operatore continuo da $L^p(\Omega)$ in $L^p(\Omega)$, $N(f_n) \to N(f)$ in $L^p(\Omega)$. Per il punto (i) $N(f_n) \in C^1(\overline{\Omega})$ e per il Lemma 2.7 risulta

$$\nabla N(f_n) = \nabla\Gamma * f_n \to \nabla\Gamma * f$$

in $L^p(\Omega)$. Pertanto $N(f) \in W^{1,p}(\Omega)$ con $\nabla N(f) = \nabla\Gamma * f$ e

$$\|N(f)\|_{1,p} = \|N(f)\|_p + \|\nabla N(f)\|_p = \|\Gamma * f\|_p + \|\nabla\Gamma * f\|_p \leq C\|f\|_p.$$

□

Come ci si può aspettare una soluzione dell'equazione di Poisson con dato L^p è data dal potenziale Newtoniano. Nella proposizione che segue dimostreremo questo fatto per $p = 2$. Punto essenziale di questa verifica è l'uguaglianza provata nella Proposizione 2.6. Per generalizzare questo risultato ad un $p \neq 2$ sarà necessaria quindi la stima di Calderón-Zygmund che proveremo nella prossima sezione.

PROPOSIZIONE 2.9. *Il Potenziale Newtoniano N è continuo da $L^2(\Omega)$ in $W^{2,2}(\Omega)$. Inoltre*

$$\Delta N(f) = f$$

per ogni $f \in L^2(\Omega)$.

DIM. Sia $f \in L^2(\Omega)$ e sia $(f_n) \subset C_c^\infty(\Omega)$ convergente a f in $L^2(\Omega)$. Per la proposizione precedente $N(f_n)$ converge a $N(f)$ in $W^{1,2}(\Omega)$. Proviamo la convergenza L^2 delle derivate seconde. Per la Proposizione 2.6

$$\begin{aligned} \|D^2[N(f_n) - N(f_m)]\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|D^2[N(f_n) - N(f_m)]\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\ &= \|\Delta[N(f_n) - N(f_m)]\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\ &= \|f_n - f_m\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Da qui segue che $(N(f_n))$ è una successione di Cauchy in $W^{2,2}(\Omega)$. Allora $N(f) \in W^{2,2}(\Omega)$ e $\|N(f)\|_{2,2} \leq C\|f\|_2$. Per finire

$$\Delta N(f) = \lim_{n\to\infty} \Delta N(f_n) = \lim_{n\to\infty} f_n = f.$$

□

2.2. La disuguaglianza di Calderón-Zygmund

Lo strumento principale per la dimostrazione della disuguaglianza di Calderón-Zygmund è il teorema di interpolazione di Marcinkiewicz. Al fine di applicare quest'ultimo abbiamo bisogno del procedimento di decomposizione in cubi di Calderón-Zygmund, qui di seguito illustrato.

LEMMA 2.10 (decomposizione in cubi). *Siano $0 \leq f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e $t > 0$. Esistono Ω, F misurabili tali che $\mathbb{R}^N = \Omega \cup F$ con $\Omega \cap F = \emptyset$ e*

(i) *$f \le t$ su F;*

(ii) *$\Omega = \cup_{k=1}^{\infty} Q_k$, dove (Q_k) sono cubi coi lati paralleli agli assi tali che $\overset{\circ}{Q}_k \cap \overset{\circ}{Q}_h = \emptyset$ per $k \neq h$ e*

$$t < \frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k} f \le 2^N t$$

per ogni $k \in \mathbb{N}$.

DIM. Sia $\mathcal{G}$ una griglia di $\mathbb{R}^N$, cioè una suddivisione di $\mathbb{R}^N$ in cubi di lati paralleli agli assi tale che se $Q \in \mathcal{G}$ allora

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q f \le t.$$

Per ottenere $\mathcal{G}$ basta suddividere $\mathbb{R}^N$ in cubi congruenti di misura $|Q|$ tale che $\displaystyle\frac{1}{|Q|}\int_{\mathbb{R}^N} f \le t$.

Fissiamo un cubo $Q \in \mathcal{G}$. Dividendo ogni suo lato in due parti uguali suddividiamo Q in 2^N sottocubi congruenti e sia Q' uno di questi sottocubi. Possono verificarsi due eventualità:

$$1)\quad \frac{1}{|Q'|}\int_{Q'} f > t \qquad\qquad 2)\quad \frac{1}{|Q'|}\int_{Q'} f \le t.$$

Se Q' verifica la 1), allora Q' è uno dei cubi che andrà a formare l'insieme Ω. Se invece Q' verifica la 2) suddividiamo Q' in 2^N sottocubi congruenti e ripetiamo per ognuno di essi quanto fatto per Q'. Quindi continuiamo indefinitamente a suddividere i cubi che verificano la 2) ed a selezionare e porre in Ω i cubi che verificano la 1).

Ripetendo quanto fatto per il fissato cubo Q per ognuno dei cubi che costituiscono la griglia $\mathcal{G}$ otteniamo la decomposizione in cubi cercata. Infatti Ω risulta unione numerabile di cubi Q_k i cui interni sono a due a due disgiunti e tali che

$$t < \frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k} f \le \frac{|Q'|}{|Q_k|}\frac{1}{|Q'|}\int_{Q'} f \le 2^N t$$

dove Q' è il cubo di cui Q_k è la 2^N-esima parte e per il quale quindi $\frac{1}{|Q'|}\int_{Q'} f \le t$.

Poniamo $F = \mathbb{R}^N \setminus \Omega$ e proviamo che $f \le t$ su F. Se $x \in F$ allora esiste una successione di cubi $(\tilde{Q}_k)$ con $\displaystyle\frac{1}{|\tilde{Q}_k|}\int_{\tilde{Q}_k} f \le t$ tale che $x \in \tilde{Q}_k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ e $\tilde{Q}_k \to x$ nel senso della Definizione 1.32. Poiché per il Teorema 1.30 quasi ogni $x \in \mathbb{R}^N$ è un punto di Lebesgue di f, possiamo assumere x punto di Lebesgue di f e per il Corollario 1.33 risulta

$$f(x) = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{|\tilde{Q}_k|}\int_{\tilde{Q}_k} f \le t.$$

$\square$

Osservazione 2.11. L'insieme F della decomposizione in cubi del lemma precedente è sicuramente non vuoto. Infatti se F fosse vuoto allora $\Omega = \mathbb{R}^N$ e, contraddicendo la sommabilità di f, avremmo

$$\int_{\mathbb{R}^N} f = \sum_{k\in\mathbb{N}} \int_{Q_k} f > t \sum_{k\in\mathbb{N}} |Q_k| = \infty.$$

L'insieme Ω può invece essere vuoto e questo si verifica se e solo se $f \le t$ q.o. in $\mathbb{R}^N$.

Teorema 2.12 (Calderón-Zygmund). *Sia $1 < p < \infty$; allora esiste $c = c(N,p) > 0$ tale che*

$$\|D_{ij}N(f)\|_p \le c\|f\|_p \tag{2.5}$$

per ogni $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Dim. Per ogni $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ poniamo $Sf = D_{ij}N(f) = D_{ij}(\Gamma * f)$.
"*Caso* $1 < p < 2$": Sappiamo che $\|Sf\|_2 \le \|f\|_2$ per ogni $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Per densità allora S si estende ad una contrazione da $L^2(\mathbb{R}^N)$ in sé. Vogliamo provare che S è di tipo debole $(1,1)$, cioè che esiste una costante $c > 0$ tale che $m\{|Sf| \ge t\} \le c\dfrac{\|f\|_1}{t}$ per ogni $t > 0$ e $f \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$, in modo tale da poter poi applicare il teorema di interpolazione di Marcinkiewicz ed ottenere la (2.5) per $1 < p < 2$.
Siano $f \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$ e $t > 0$. Per il Lemma 2.10 possiamo considerare la decomposizione in cubi di Calderón-Zygmund $\mathbb{R}^N = \Omega \cup F$ relativa a $|f|$ e a t. Spezziamo ora $|f|$ in una parte buona g definita da

$$g(x) = \begin{cases} |f(x)| & \text{se } x \in F \\ \frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k} |f| & \text{se } x \in Q_k, k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

e in una parte cattiva b data da

$$b(x) = |f(x)| - g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in F \\ |f(x)| - \frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k} |f| & \text{se } x \in Q_k, k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Osserviamo che $\displaystyle\int_{Q_k} b = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Risulta $|g| \le 2^N t$ e quindi $g \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$,

$$\begin{aligned} \|g\|_1 = \int_{\mathbb{R}^N} |g| &= \int_F |g| + \int_\Omega |g| = \int_F |f| + \sum_{k\in\mathbb{N}} \int_{Q_k} |f| \\ &= \int_F |f| + \int_\Omega |f| \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |f| = \|f\|_1 \end{aligned}$$

ed inoltre

$$\|g\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |g|^2 \le 2^N t \int_{\mathbb{R}^N} |g| = 2^N t\|f\|_1 \tag{2.6}$$

Pertanto $b = |f| - g \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$.
Poiché S è lineare, $Sf = Sg + Sb$ e quindi

$$\mu\{|Sf| \geq t\} \leq \mu\left\{|Sg| \geq \frac{t}{2}\right\} + \mu\left\{|Sb| \geq \frac{t}{2}\right\}. \tag{2.7}$$

Stimiamo separatamente i due addendi a secondo membro della (2.7). Per il primo, usando la disuguaglianza di Chebyshev e la (2.6), si ottiene subito che

$$\mu\left\{|Sg| \geq \frac{t}{2}\right\} \leq \frac{4\|Sg\|_2^2}{t^2} \leq \frac{4\|g\|_2^2}{t^2} \leq \frac{2^{N+2}}{t}\|f\|_1. \tag{2.8}$$

Stimare $\mu\left\{|Sb| \geq \frac{t}{2}\right\}$ risulta molto meno immediato.
Per ogni $k \in \mathbb{N}$ poniamo $b_k = b\chi_{Q_k}$. Poiché $b \in L^2(\mathbb{R}^N)$, $b = 0$ su F e i Q_k hanno interni a due a due disgiunti si ha che $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = b$ in $L^2(\mathbb{R}^N)$ e quindi, poiché S è continuo da $L^2(\mathbb{R}^N)$ in $L^2(\mathbb{R}^N)$, $\sum_{k=1}^{\infty} Sb_k = Sb$ in $L^2(\mathbb{R}^N)$.
Fissiamo $k \in \mathbb{N}$. La funzione b_k appartiene a $L^1(Q_k) \cap L^2(Q_k)$ e soddisfa $\int_{Q_k} b_k = 0$. Sia $(b_{k,l})_{l\in\mathbb{N}} \subset C_c^\infty(Q_k)$ con $\displaystyle\int_{Q_k} b_{k,l} = 0$ tale che $b_{k,l} \to b_k$ in $L^2(Q_k)$ per $l \to \infty$.
Per ogni $x \in \mathbb{R}^N \setminus \overline{Q_k} := \overline{Q_k}^c$

$$Sb_{k,l}(x) = D_{ij}(\Gamma * b_{k,l})(x) = \int_{Q_k} D_{ij}\Gamma(x-y) b_{k,l}(y)\, dy.$$

Sia y_k il centro del cubo Q_k e δ_k il suo diametro. Dato che $\displaystyle\int_{Q_k} b_{k,l} = 0$ si ha che

$$Sb_{k,l}(x) = \int_{Q_k} (D_{ij}\Gamma(x-y) - D_{ij}\Gamma(x-y_k)) b_{k,l}(y)\, dy$$

per ogni $x \in \overline{Q_k}^c$. Ora, per qualche $\xi \in \overline{yy_k}$, risulta

$$\begin{aligned} |D_{ij}\Gamma(x-y) - D_{ij}\Gamma(x-y_k)| &\leq |\nabla D_{ij}\Gamma(x-\xi)| \cdot |y-y_k| \\ &\leq \frac{C}{|x-\xi|^{N+1}}|y-y_k| \\ &\leq \frac{C}{[\mathrm{dist}(x,Q_k)]^{N+1}}\,\delta_k \end{aligned}$$

e quindi

$$|Sb_{k,l}(x)| \leq \frac{C\delta_k}{[\mathrm{dist}(x,Q_k)]^{N+1}} \int_{Q_k} |b_{k,l}(y)|\, dy \tag{2.9}$$

per ogni $x \in \overline{Q_k}^c$. Sappiamo che $b_{k,l} \to b_k$ in $L^2(\mathbb{R}^N)$ e quindi anche $Sb_{k,l} \to Sb_k$ in $L^2(\mathbb{R}^N)$. Possiamo inoltre sempre suppore che tali convergenze valgano anche quasi ovunque. Allora, passando al limite per $l \to \infty$

in (2.9), abbiamo che per quasi ogni $x \in \overline{Q_k}^c$

$$|Sb_k(x)| \leq \frac{C\delta_k}{[\mathrm{dist}(x, Q_k)]^{N+1}} \int_{Q_k} |b_k(y)|\, dy. \tag{2.10}$$

Consideriamo adesso la palla B_k di centro y_k e raggio δ_k. Per ogni $x \in B_k^c$

$$|x - y_k| \leq \mathrm{dist}(x, Q_k) + \frac{\delta_k}{2} \leq \mathrm{dist}(x, Q_k) + \frac{|x - y_k|}{2}$$

e quindi

$$\mathrm{dist}(x, Q_k) \geq \frac{1}{2}|x - y_k|.$$

Da quest'ultima e dalla (2.10) segue che

$$\begin{aligned} \int_{B_k^c} |Sb_k(x)|\, dx &\leq C\delta_k \int_{Q_k} |b_k(y)|\, dy \int_{|x-y_k|\geq\delta_k} \frac{1}{|x - y_k|^{N+1}}\, dx \\ &= C\delta_k \int_{Q_k} |b(y)|\, dy \int_{\delta_k}^{\infty} \frac{1}{r^2}\, dr \\ &= C \int_{Q_k} |b(y)|\, dy. \end{aligned} \tag{2.11}$$

A questo punto poniamo $\Omega^* = \cup_k B_k$ e $F^* = \mathbb{R}^N \setminus \Omega^*$. Per la (2.11), poiché $F^* \subset B_k^c$ per ogni k, si ha che $\int_{F^*} |Sb_k| \leq C \int_{Q_k} |b|\ \forall k$, e quindi per il Teorema di Beppo Levi

$$\begin{aligned} \int_{F^*} \sum_k |Sb_k| &= \sum_k \int_{F^*} |Sb_k| \leq C \sum_k \int_{Q_k} |b| \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^N} |b| \leq C(\|f\|_1 + \|g\|_1) \\ &= 2C\|f\|_1. \end{aligned}$$

Sicché $\sum_k |Sb_k(x)| < \infty$ per q.o. $x \in F^*$ e, dato che $\sum_k Sb_k = Sb$ in $L^2(\mathbb{R}^N)$, per unicità del limite $\sum_k Sb_k(x) = Sb(x)$ per q.o. $x \in F^*$. Allora

$$\int_{F^*} |Sb| \leq 2C\|f\|_1$$

e quindi per la disuguaglianza di Chebyshev

$$\mu\left\{x \in F^* : |Sb| \geq \frac{t}{2}\right\} \leq \frac{2\|Sb\|_{L^1(F^*)}}{t} \leq \frac{C}{t}\|f\|_1. \tag{2.12}$$

Vale anche che

$$\begin{aligned}
\mu\left\{x \in \Omega^* : |Sb| \geq \frac{t}{2}\right\} &\leq \mu(\Omega^*) \leq \sum_k \mu(B_k) \\
&= \omega_N \sum_k \delta_k^N = \omega_N N^{\frac{N}{2}} \sum_k l_k^N \\
&= C(N) \sum_k |Q_k| \leq \frac{C(N)}{t} \|f\|_1, \qquad (2.13)
\end{aligned}$$

dove con l_k indichiamo il lato del cubo Q_k. Per la (2.7), mettendo assieme (2.8), (2.12) e (2.13) otteniamo che

$$\mu\{|Sf| \geq t\} \leq \frac{C(N)}{t} \|f\|_1$$

per una costante $C(N) > 0$ dipendente solo dalla dimensione dello spazio N. Quest'ultima stima altro non è che la $(1,1)$-debole continuità dell'operatore S.

Possiamo finalmente applicare il teorema di Marcinkiewcz. Allora esiste una costante $C(N,p) > 0$ tale che

$$\|D_{ij} N(f)\|_p = \|Sf\|_p \leq C(N,p) \|f\|_p.$$

"*Caso* $p > 2$": Questo caso si ottiene per dualità dal caso precedente, siccome S è autoaggiunto. Infatti per ogni $f, g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} (Sf)\, g &= \int_{\mathbb{R}^N} D_{ij}(\Gamma * f)\, g = \int_{\mathbb{R}^N} (\Gamma * f)\, D_{ij} g \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} f\, (\Gamma * D_{ij} g) = \int_{\mathbb{R}^N} f\, D_{ij}(\Gamma * g) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} f\, (Sg).
\end{aligned}$$

Allora, fissato $p > 2$ e indicato con p' l'esponente coniugato, si ha che

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} Sf\, g \right| \leq \|f\|_p\, \|Sg\|_{p'} \leq c(N,p') \|f\|_p\, \|g\|_{p'}$$

e quindi

$$\|Sf\|_p \leq C(N,p') \|f\|_p.$$

□

COROLLARIO 2.13. *Se $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$, $1 < p < \infty$, allora esiste $C(N,p) > 0$ tale che*

$$\|D^2 u\|_p \leq C(N,p) \|\Delta u\|_p. \qquad (2.14)$$

DIM. Per la Proposizione 2.1 e per il Teorema di Calderón-Zygmund se $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, allora $u = N(\Delta u)$ e quindi

$$\|D^2 u\|_p = \|D^2 N(\Delta u)\|_p \leq C \|\Delta u\|_p.$$

La stima si estende a $W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$ per densità. $\square$

ESERCIZIO 2.14. Siano $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, $(Du)_{ij} = (D_i u_j)_{i,j}$ la matrice jacobiana di u e $Eu = \frac{Du+(Du)^*}{2}$ la sua parte simmetrica. Allora

$$\int_{\mathbb{R}^N} |Du|^2 + \int_{\mathbb{R}^N} (\text{div u})^2 = 2\int_{\mathbb{R}^N} |\text{Eu}|^2.$$

[Suggerimento: integrare per parti].

2.3. Alcune stime interpolative in L^p

In questa sezione proviamo alcune disuguaglianze interpolative che permettono di stimare la norma L^p delle derivate prime di una funzione con le norme della funzione stessa e delle sue derivate seconde. Consideriamo dapprima il caso unidimensionale.

Sia $u \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ e sia $x \in \mathbb{R}$. Per la formula di Taylor con resto integrale per $h > 0$ si ha che

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + \int_0^h (h-t)u''(x+t)\, dt$$

da cui, portando $u'(x)$ a primo membro e dividendo tutto per h, si ottiene

$$u'(x) = \frac{u(x+h)-u(x)}{h} - \frac{1}{h}\int_0^h (h-t)u''(x+t)\, dt.$$

Se prendiamo le norme L^p allora

$$\begin{aligned} \|u'\|_p &\le \frac{2}{h}\|u\|_p + \frac{1}{h}\int_0^h (h-t)\|u''(\cdot+t)\|_p\, dt \\ &= \frac{2}{h}\|u\|_p + \frac{h}{2}\|u''\|_p. \end{aligned}$$

Posto $\varepsilon = \frac{h}{2}$ scriviamo la prima disuguaglianza interpolativa cercata

$$\|u'\|_p \le \varepsilon\|u''\|_p + \frac{1}{\varepsilon}\|u\|_p\,. \tag{2.15}$$

La disuguglianza vale per ogni $\varepsilon > 0$. Se minimizziamo su ε otteniamo una seconda disuguaglianza interpolativa e cioè

$$\|u'\|_p \le 2\|u''\|_p^{\frac{1}{2}}\, \|u\|_p^{\frac{1}{2}}.$$

Sia ora $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Fissati $\varepsilon > 0$ ed $i = 1, \dots, N$ dalla (2.15) segue che

$$\int_{\mathbb{R}} |D_i u|^p\, dx_i \le 2^{p-1}\left(\varepsilon^p \int_{\mathbb{R}} |D_{ii}u|^p\, dx_i + \frac{1}{\varepsilon^p}\int_{\mathbb{R}} |u|^p\, dx_i\right),$$

da cui per il Teorema di Fubini si ha

$$\int_{\mathbb{R}^N} |D_i u|^p \, dx \le 2^{p-1} \left(\varepsilon^p \int_{\mathbb{R}^N} |D_{ii} u|^p \, dx + \frac{1}{\varepsilon^p} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p \, dx \right)$$

e quindi

$$\|D_i u\|_p \le c \left[\varepsilon \|D_{ii} u\|_p + \frac{1}{\varepsilon} \|u\|_p \right] \le c \left[\varepsilon \|D^2 u\|_p + \frac{1}{\varepsilon} \|u\|_p \right] \tag{2.16}$$

per una qualche costante $c > 0$ dipendente solo da p.

PROPOSIZIONE 2.15. *Sia $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$ con $1 \le p < \infty$, allora per ogni $\varepsilon > 0$*

$$\|\nabla u\|_p \le c\varepsilon \|D^2 u\|_p + \frac{c}{\varepsilon} \|u\|_p$$

per una qualche costante $c = c(p) > 0$. Inoltre, minimizzando su ε, si ha

$$\|\nabla u\|_p \le 2c \|D^2 u\|_p^{\frac{1}{2}} \|u\|_p^{\frac{1}{2}}. \tag{2.17}$$

DIM. Se $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, allora dalla (2.16) si ricava che per ogni $\varepsilon > 0$

$$\|\nabla u\|_p \le c\varepsilon \|D^2 u\|_p + \frac{c}{\varepsilon} \|u\|_p.$$

Quindi la stima si estende per densità a $W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$. □

Mettendo assieme la stima ottenuta nella proposizione precedente e quella del Corollario 2.13 possiamo stimare la norma L^p del gradiente di una funzione con quella della funzione stessa e delle sue derivate seconde pure.

COROLLARIO 2.16. *Sia $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$ con $1 < p < \infty$, allora esiste $C = C(N,p) > 0$ tale che per ogni $\varepsilon > 0$ risulta*

$$\|\nabla u\|_p \le \varepsilon \|\Delta u\|_p + \frac{C}{\varepsilon} \|u\|_p.$$

Il corollario seguente afferma che l'operatore Δ con dominio $W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$ è un operatore chiuso.

COROLLARIO 2.17. *Se $1 < p < \infty$, allora esiste $C = C(N,p) > 0$ tale che*

$$\|u\|_{2,p} \le C(N,p) \left[\|u\|_p + \|\Delta u\|_p \right]$$

per ogni $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$.

2.4. Esistenza e unicità per il Laplaciano in $\mathbb{R}^N$

Siamo a questo punto in grado di provare esistenza e unicità per l'equazione

$$\lambda u - \Delta u = f$$

con $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e $\lambda > 0$.

TEOREMA 2.18. *Siano* $1 < p < \infty$ *e* $\lambda > 0$, *allora per ogni* $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ *esiste un'unica* $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$ *tale che*

$$\lambda u - \Delta u = f.$$

Inoltre

$$\lambda\|u\|_p + \lambda^{\frac{1}{2}}\|\nabla u\|_p + \|D^2 u\|_p \le C\|f\|_p. \tag{2.18}$$

Per provare il teorema abbiamo bisogno del seguente

LEMMA 2.19. *Se* $1 < p < \infty$ *e* $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$ *allora*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Delta u\, u|u|^{p-2} \le 0\,.$$

DIM. Distinguiamo i due casi: $p \ge 2$ e $1 < p < 2$.
"$p \ge 2$": Se $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$ allora $u|u|^{p-2} \in W^{1,p'}(\mathbb{R}^N)$. Integrando per parti otteniamo

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Delta u\; u|u|^{p-2} = -(p-1)\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 |u|^{p-2} \le 0. \tag{2.19}$$

"$p < 2$": In questo caso non è detto che $u|u|^{p-2}$ sia in $W^{1,p'}(\mathbb{R}^N)$. Proviamo dapprima la tesi per funzioni regolari a supporto compatto. Sia $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ e dato $\delta > 0$ poniamo

$$u_\delta := u(u^2+\delta)^{\frac{p-2}{2}} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N).$$

Per le funzioni u_δ è valida la formula d'integrazione per parti:

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(u^2+\delta)^{\frac{p-2}{2}}\Delta u = -\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 (u^2+\delta)^{\frac{p-4}{2}}((p-1)u^2+\delta) \le 0$$

e quindi

$$\int_{\mathbb{R}^N} u|u|^{p-2}\Delta u = \lim_{\delta\to 0}\int_{\mathbb{R}^N} u(u^2+\delta)^{\frac{p-2}{2}}\Delta u \le 0.$$

Siano adesso $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$ e $(u_n) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tale che $u_n \to u$ in $W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$. Allora $u_n|u_n|^{p-2} \to u|u|^{p-2}$ in $L^{p'}(\mathbb{R}^N)$, $\Delta u_n \to \Delta u$ in $L^p(\mathbb{R}^N)$ e quindi

$$u_n|u_n|^{p-2}\Delta u_n \to u|u|^{p-2}\Delta u$$

in $L^1(\mathbb{R}^N)$. Ne segue

$$\int_{\mathbb{R}^N} u|u|^{p-2}\Delta u = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} u_n|u_n|^{p-2}\Delta u_n \le 0.$$

□

DIM.(Teorema 2.18)
"Unicità + stima": Siano $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ ed $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$ tali che $\lambda u - \Delta u = f$. Moltiplichiamo per $u|u|^{p-2}$ ed otteniamo

$$\lambda|u|^p - \Delta u\, u|u|^{p-2} = fu|u|^{p-2}.$$

Integriamo su $\mathbb{R}^N$ ed usiamo il Lemma 2.19 e la disuguaglianza di Hölder

$$\begin{aligned}\lambda\int_{\mathbb{R}^N}|u|^p &\le \lambda\int_{\mathbb{R}^N}|u|^p-\int_{\mathbb{R}^N}\Delta u\, u|u|^{p-2}\\ &\le \int_{\mathbb{R}^N}|f||u|^{p-1}\le \|f\|_p\,\|u\|_p^{p-1}.\end{aligned}$$

Quindi, dividendo primo e secondo membro per $\|u\|_p^{p-1}$, si ha

$$\lambda\|u\|_p\le\|f\|_p. \tag{2.20}$$

Questa disuguaglianza implica l'unicità della soluzione. A questo punto, per il Teorema di Calderón-Zygmund

$$\|D^2u\|_p\le C\|\Delta u\|_p=C\|\lambda u-f\|_p\le 2C\|f\|_p \tag{2.21}$$

e per la disuguaglianza interpolativa (2.17)

$$\lambda^{\frac12}\|\nabla u\|_p\le\lambda^{\frac12}\,2c\,\|D^2u\|_p^{\frac12}\,\|u\|_p^{\frac12}\le 2\sqrt{2}c\sqrt{C}\|f\|_p. \tag{2.22}$$

Mettiamo insieme (2.20), (2.21) e (2.22) e, ridefinendo opportunamente la costante C, otteniamo la stima cercata.

"Esistenza": Data $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, la soluzione in $W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$ di $\lambda u-\Delta u=f$ è la funzione $u\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ la cui trasformata di Fourier è data da

$$\hat{u}=\frac{\hat{f}}{\lambda+|\xi|^2}.$$

Sia ora $f\in L^p(\mathbb{R}^N)$ e sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ tale che f_n converga ad f in $L^p(\mathbb{R}^N)$. Per ogni $n\in\mathbb{N}$ sia $u_n\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ la soluzione di $\lambda u_n-\Delta u_n=f_n$. Per la (2.18) per ogni $n,m\in\mathbb{N}$

$$\|u_n-u_m\|_{2,p}\le k\|f_n-f_m\|_p,$$

per una qualche costante $k>0$, cioè la successione u_n è di Cauchy e quindi convergente in $W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$ ad una $u\in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$. Allora, passando al limite in $\lambda u_n-\Delta u_n=f_n$, si ha

$$\lambda u-\Delta u=f.$$

□

2.5. I casi $p=1$, $p=\infty$

Le stime della precedente sezione non valgono nei casi $p=1$ e $p=\infty$. I seguenti esempi mostrano infatti come non sia possibile controllare le norme L^1 o L^∞ delle singole derivate seconde di una funzione con quelle del suo laplaciano.

ESEMPIO 2.20. *Sia $N=2$. Non esiste C costante positiva tale che per ogni $u\in C_c^\infty(B(0,1))$ risulti*

$$\|D_{xy}u\|_\infty\le C\left[\|\Delta u\|_\infty+\|u\|_\infty+\|\nabla u\|_\infty\right]. \tag{2.23}$$

DIM. Consideriamo, per ogni $0 < \varepsilon \leq 1$, le funzioni

$$u_\varepsilon(x,y) = \eta(xy)xy\log(\varepsilon + x^2 + y^2)$$

dove $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$, $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta \equiv 1$ in $B(0, \frac{1}{2})$ e *supp* $\eta \subset B(0,1)$. Risulta $u_\varepsilon \in C_c^\infty(B(0,1))$. Inoltre si prova facilmente che esiste $M > 0$ tale che

$$\|u_\varepsilon\|_\infty + \|\nabla u\|_\infty + \|\Delta u_\varepsilon\|_\infty \leq M \qquad \forall\, 0 < \varepsilon \leq 1.$$

D'altra parte si ottiene

$$\|D_{xy}u_\varepsilon\|_\infty \geq |D_{xy}u_\varepsilon(0,0)| = |\log\varepsilon|$$

quindi non esiste una costante C tale che valga (2.23) per ogni $\varepsilon > 0$. □

ESEMPIO 2.21. *Sia $N = 2$. Non esiste C costante positiva tale che per ogni $u \in C_c^\infty(B(0,1))$ risulti*

$$\|D_{xy}u\|_1 \leq C\left[\|\Delta u\|_1 + \|u\|_{1,1}\right]. \tag{2.24}$$

DIM. Supponiamo che esista $C > 0$ tale che valga (2.24) per ogni $u \in C_c^\infty(B(0,1))$. Sia $v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ con *supp* $v \subset B(0,\rho)$ e sia $R \geq \rho$. Poniamo $u(x,y) = v(Rx, Ry)$. Risulta $u \in C_c^\infty(B(0,1))$ e, usando (2.24),

$$\begin{aligned} R^2\int_{B(0,1)} |D_{xy}v(Rx,Ry)| \;&\leq\; C\Big[R^2\int_{B(0,1)}|\Delta v(Rx,Ry)| \\ &\qquad + R\int_{B(0,1)}|\nabla v(Rx,Ry)| \\ &\qquad + \int_{B(0,1)}|v(Rx,Ry)|\Big] \end{aligned}$$

da cui

$$\int_{\mathbb{R}^2}|D_{xy}v| \leq C\left[\int_{\mathbb{R}^2}|\Delta v| + \frac{1}{R}\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla v| + \frac{1}{R^2}\int_{\mathbb{R}^2}|v|\right].$$

Facendo tendere R a $+\infty$ otteniamo

$$\int_{\mathbb{R}^2}|D_{xy}v| \leq C\int_{\mathbb{R}^2}|\Delta v| \tag{2.25}$$

per ogni $v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ e, per densità, per ogni $v \in W^{2,1}(\mathbb{R}^2)$.
Siano ora $f, g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ e consideriamo $\tilde f$, $\tilde g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ tali che $\tilde f - \Delta\tilde f = f$ e $\tilde g - \Delta\tilde g = g$, ossia

$$\tilde f = (I-\Delta)^{-1}f; \qquad \tilde g = (I-\Delta)^{-1}g.$$

Integrando per parti si ha

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2}(I-\Delta)^{-1}fg \;&=\; \int_{\mathbb{R}^2}(I-\Delta)^{-1}f(\tilde g - \Delta\tilde g) \\ &=\; \int_{\mathbb{R}^2}\tilde f(\tilde g - \Delta\tilde g) = \int_{\mathbb{R}^2}(\tilde f - \Delta\tilde f)\tilde g = \int_{\mathbb{R}^2}f(I-\Delta)^{-1}g. \end{aligned}$$

Integrando ancora una volta per parti, applicando l'uguaglianza sopra provata e usando la commutatività dell'operatore risolvente con le derivate seconde, segue che

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} D_{xy} f g &= \int_{\mathbb{R}^2} D_{xy}(I-\Delta)^{-1}(I-\Delta) f g \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} (I-\Delta)^{-1} D_{xy}(I-\Delta) f g \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} D_{xy}(I-\Delta) f (I-\Delta)^{-1} g \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} (I-\Delta) f D_{xy}(I-\Delta)^{-1} g\end{aligned}$$

da cui, applicando (2.25) e tenendo presente che $\|\tilde{g}\|_1 \leq \|g\|_1$, otteniamo

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^2} D_{xy} f g\right| &\leq \|(I-\Delta)f\|_\infty \|D_{xy}(I-\Delta)^{-1} g\|_1 \\ &\leq C\|(I-\Delta)f\|_\infty \|\Delta(I-\Delta)^{-1} g\|_1 \\ &= C\|(I-\Delta)f\|_\infty \|g-(I-\Delta)^{-1} g\|_1 \\ &\leq 2C\|g\|_1 \|(I-\Delta)f\|_\infty\end{aligned}$$

e quindi

$$\|D_{xy} f\|_\infty \leq 2C[\|f\|_\infty + \|\Delta f\|_\infty],$$

che contraddice (2.23). □

ESERCIZIO 2.22. Provare che

$$D_{ij}(I-\Delta)^{-1} h = (I-\Delta)^{-1} D_{ij} h$$

se $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

ESERCIZIO 2.23. Provare che

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Delta h(sign\ h) \leq 0 \qquad \text{con } h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

e

$$sign\ h = \begin{cases} 1 & \text{se } h > 0 \\ -1 & \text{se } h < 0 \\ 0 & \text{se } h = 0 \end{cases}$$

facendo tendere p a 1 nel Lemma 2.19. Dedurre quindi che $\|\tilde{g}\|_1 \leq \|g\|_1$ nell'Esempio (2.21).

ESERCIZIO 2.24. Provare che se $\Delta u \in L^1$ allora $\nabla u \in L^p$ per ogni $p < \frac{N}{N-1}$.

CAPITOLO 3

Operatori ellittici in $\mathbb{R}^N$

3.1. Stime L^p in $\mathbb{R}^N$ per operatori uniformemente ellittici

Ora ci proponiamo di dimostrare risultati analoghi a quelli ottenuti per l'operatore di Laplace nel caso di operatori ellittici. Iniziamo col provare stime L^p per operatori a coefficienti costanti del tipo

$$A_0 := \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} D_{ij}$$

con $a = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,N}$ matrice reale simmetrica soddisfacente la seguente *condizione di ellitticità*:

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \nu|\xi|^2 \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^N \text{ e con } \nu > 0.$$

Con un semplice cambio di variabili, possiamo trasformare l'operatore ellittico A_0 sopra definito nel laplaciano per ottenere in modo immediato stime analoghe a quelle provate in precedenza.

PROPOSIZIONE 3.1. *Se $1 < p < \infty$, allora esiste $C = C(N, p, \nu)$ tale che*

$$\|u\|_{2,p} \leq C(N,p,\nu)\ [\|u\|_p + \|A_0 u\|_p]$$

per ogni $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$.

DIM. Consideriamo prima il caso in cui (a_{ij}) è una matrice diagonale ossia l'operatore è del tipo

$$A_0 = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i D_{ii}.$$

Osserviamo che la condizione di ellitticità vale con $\nu = \min\{\lambda_i : i = 1, \dots, N\}$.
Sia $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$ e consideriamo $v \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$ tale che

$$u(x) = v\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right),$$

(con la notazione $\frac{x}{\sqrt{\lambda}}$ intendiamo il vettore di componenti $\frac{x_1}{\sqrt{\lambda_1}}, ..., \frac{x_N}{\sqrt{\lambda_N}}$).
Risulta

$$D_{ij}u(x) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i\lambda_j}} D_{ij}v\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

e

$$A_0u(x) = \Delta v\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right).$$

Per quanto osservato e per il Corollario 2.13, abbiamo

$$\begin{aligned} \|D_{ij}u\|_p &\leq \frac{1}{\nu}\left\|D_{ij}v\left(\frac{\cdot}{\sqrt{\lambda}}\right)\right\|_p \\ &= \frac{c(\lambda)}{\nu}\|D_{ij}v\|_p \leq \frac{c(\lambda)}{\nu}C(N,p)\|\Delta v\|_p \\ &= \frac{C(N,p)}{\nu}\left\|\Delta v\left(\frac{\cdot}{\sqrt{\lambda}}\right)\right\|_p = \frac{C(N,p)}{\nu}\|A_0u\|_p. \end{aligned}$$

Abbiamo così ottenuto

$$\|D^2u\|_p \leq \frac{C(N,p)}{\nu}\|A_0u\|_p. \tag{3.1}$$

Trattiamo il caso generale. Sia Q matrice ortogonale tale che $QaQ^* = D_\lambda$, dove D_λ è una matrice diagonale avente come elementi $\lambda_1, ..., \lambda_N$, autovalori di a, e sia v tale che $u(x) = v(Qx)$. Siccome

$$\nabla u(x) = Q^*\nabla v(Qx) \quad \text{e} \quad D^2u(x) = Q^*D^2v(Qx)Q$$

risulta

$$\begin{aligned} A_0u(x) &= tr(aD^2u(x)) = tr(aQ^*D^2v(Qx)Q)) \\ &= tr(QaQ^*D^2v(Qx)) = \sum_i \lambda_i D_{ii}(Qx). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Osserviamo che

$$|D^2u(x)|^2 = |D^2v(Qx)|^2 \tag{3.3}$$

poiché Q è ortogonale. Per (3.3), (3.2), (3.1) e siccome $|detQ| = 1$

$$\begin{aligned} \|D^2u\|_p &= \|D^2v(Q\cdot)\|_p = \|D^2v\|_p \leq \frac{C(N,p)}{\nu}\left\|\sum_i \lambda_i D_{ii}v\right\|_p \\ &= \frac{C(N,p)}{\nu}\left\|\sum_i \lambda_i D_{ii}v(Q\cdot)\right\|_p = \frac{C(N,p)}{\nu}\|A_0u\|_p. \end{aligned}$$

Sia nel caso dell'operatore in forma diagonale, che in quello generale, dalla disuguaglianza interpolativa (vedi Proposizione 2.15) e dalle precedenti segue

$$\begin{aligned} \|u\|_{2,p} &= \|D^2u\|_p + \|\nabla u\|_p + \|u\|_p \\ &\leq C(N,p,\nu)\,[\|u\|_p + \|A_0u\|_p]. \end{aligned}$$

□

Passiamo adesso al caso generale di un operatore A *uniformemente ellttico* così definito

$$Au(x) = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)D_{ij}u(x) + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)D_iu(x) + c(x)$$

dove $a_{ij} = a_{ji} \in BUC(\mathbb{R}^N)$, $b_{ij} \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ per $i,j = 1,....,N$, $c \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Inoltre supponiamo che i coefficienti a_{ij} soddisfano la condizione di ellitticità

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \nu|\xi|^2$$

e la stima

$$\left|\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\right| \leq \Lambda|\xi|^2$$

per ogni $\xi, x \in \mathbb{R}^N$, dove

$$\nu = \inf_{x\in\mathbb{R}^N}\{\text{minimo autovalore di } a_{ij}(x)\};$$

$$\Lambda = \sup_{x\in\mathbb{R}^N}\{\text{massimo autovalore di } a_{ij}(x)\}.$$

Poniamo

$$M := \max\{\|a_{ij}\|_\infty, \|b_i\|_\infty, \|c\|_\infty\};$$

$$\omega(r) := \max_{i,j} \sup_{|x-y|<r} |a_{ij}(x) - a_{ij}(y)|.$$

OSSERVAZIONE 3.2. La funzione $\omega(r)$ è il massimo dei moduli di continuità dei coefficienti a_{ij}. Poiché questi sono uniformemente continui risulta

$$\lim_{r\to 0} \omega(r) = 0.$$

Nel seguito proveremo stime L^p per la classe di operatori ellittici sopra definiti. La tecnica usata nella dimostrazione consiste nell'applicazione delle stime provate nella Proposizione 3.1 ad operatori a coefficienti costanti ottenuti "congelando" i coefficienti dell'operatore dato nei centri di opportune palle di $\mathbb{R}^N$. Per poter passare dalle palle a tutto $\mathbb{R}^N$ applicheremo il seguente lemma di ricoprimento.

LEMMA 3.3 (di ricoprimento). *Esiste $\xi(N) \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $r > 0$ esiste una famiglia di palle $\big(B(x_n, r/2)\big)$ che ricopre $\mathbb{R}^N$, con al più $\xi(N)$ tra le palle di raggio doppio $B(x_n, r)$ aventi intersezione non vuota, cioè*

(i) $\mathbb{R}^N = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B(x_n, r/2)$
(ii) $\bigcap_{i\in S} B(x_i, r) = \emptyset$ *per ogni $S \subset \mathbb{N}$ con $|S| > \xi(N)$.*

DIM. Fissiamo $r > 0$ e poniamo $L := \frac{r}{\sqrt{N}}$. Ricopriamo $\mathbb{R}^N$ con cubi disgiunti di lato L,

$$\mathbb{R}^N = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Q(x_n, L).$$

Osserviamo che, in virtù della scelta di L, ciascun cubo di centro x_n e lato L è contenuto nella palla di centro x_n e raggio $\frac{r}{2}$, così

$$\mathbb{R}^N = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Q(x_n, L) \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B\left(x_n, \frac{r}{2}\right).$$

Sia ora $S \subset \mathbb{N}$ e sia $x \in \bigcap_{i \in S} B(x_i, r)$. Per ogni $i \in S$

$$Q(x_i, L) \subset B\left(x_i, \frac{r}{2}\right) \subset B\left(x, \frac{3}{2} r\right)$$

essendo $|x - x_i| < r$. Pertanto, essendo i cubi disgiunti,

$$|S| \frac{r^N}{N^{\frac{N}{2}}} = \sum_{i \in S} |Q(x_i, L)| \leq \omega_N \frac{3^N}{2^N} r^N.$$

Quindi abbiamo provato che se $\cap_{i \in S} B(x_i, r)$ è non vuota $|S| < \frac{3^N}{2^N} N^{\frac{N}{2}} \omega_N$. Basta allora prendere $\xi(N) := \omega_N \frac{3^N}{2^N} N^{\frac{N}{2}}$. □

Passiamo adesso a provare stime a priori L^p per operatori ellittici.

TEOREMA 3.4 (Stime a priori). *Se $1 < p < \infty$, allora esiste $C = C(N, p, \nu, M, \omega) > 0$ tale che*

$$\|u\|_{2,p} \leq C(N, p, \nu, M, \omega) \left[\|u\|_p + \|Au\|_p\right]$$

per ogni $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$.

DIM. Dati $x_0 \in \mathbb{R}^N, r > 0$, sia $\eta \in C_c^\infty(B(x_0, r))$ tale che $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta = 1$ in $B(x_0, \frac{r}{2})$, $\|\nabla \eta\|_\infty \leq \frac{L}{r}$ e $\|D^2 \eta\|_\infty \leq \frac{L}{r^2}$ per qualche $L > 0$. Scriviamo semplicemente $\|\cdot\|_{k,p,r}$ al posto di $\|\cdot\|_{W^{k,p}(B(x_0,r))}$ per $k = 1, 2$. L'operatore

$$A_{x_0} = \sum_{i,j} a_{ij}(x_0) D_{ij}$$

è a coefficienti costanti e la Proposizione (3.1) applicata alla funzione ηu fornisce

$$\|\eta u\|_{2,p} \leq C(N, p, \nu) \left[\|\eta u\|_p + \|A_{x_0}(\eta u)\|_p\right].$$

Da qui segue

$$
\begin{aligned}
\|u\|_{2,p,\frac{r}{2}} &\leq \|\eta u\|_{2,p} \\
&\leq C(N,p,\nu)\big[\|u\|_{p,r} + \big\|\eta A_{x_0}u + uA_{x_0}\eta + 2\sum_{i,j} a_{ij}(x_0)D_iuD_j\eta\big\|_p\big] \\
&\leq C(N,p,\nu)\left[\|u\|_{p,r} + \|A_{x_0}u\|_{p,r} + \frac{ML}{r^2}\|u\|_{p,r} + \frac{ML}{r}\|\nabla u\|_{p,r}\right] \\
&= C(N,p,\nu)\,[\|A_{x_0}u\|_{p,r} + K(M,r)\|u\|_{1,p,r}] \\
&\leq C(N,p,\nu)\,[\|Au\|_{p,r} + \|(A_{x_0}-A)u\|_{p,r} + K(M,r)\|u\|_{1,p,r}] \\
&= C(N,p,\nu)\Bigg[\|Au\|_{p,r} + \Big\|\sum_{i,j}(a_{ij}(x_0) - a_{ij}(x))D_{ij}u\Big\|_{p,r} \\
&\qquad\qquad + K(M,r)\|u\|_{1,p,r}\Bigg] \\
&\leq C(N,p,\nu)[\|Au\|_{p,r} + \omega(r)\|D^2u\|_{p,r} + K(M,r)\|u\|_{1,p,r}] \\
&\leq C(N,p,\nu)[\|Au\|_{p,r} + \omega(r)\|u\|_{2,p,r} + K(M,r)\|u\|_{1,p,r}]
\end{aligned}
$$

dove con $C(N,p,\nu)$ e $K(M,r)$ abbiamo indicato generiche costanti dipendenti dai parametri in parentesi.
Elevando ambo i membri alla potenza p-esima, otteniamo

$$\|u\|^p_{2,p,\frac{r}{2}} \leq C(N,p,\nu)[\|Au\|^p_{p,r} + \omega^p(r)\|u\|^p_{2,p,r} + K^p(M,r)\|u\|^p_{1,p,r}]. \quad (3.4)$$

Sia ora $(B(x_n,\frac{r}{2}))$ una famiglia di palle come nel Lemma 3.3. Applichiamo la stima (3.4) in ciascuna delle $B(x_n,\frac{r}{2})$ e sommiamo su n. Otteniamo

$$
\begin{aligned}
\|u\|^p_{2,p} &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \|u\|^p_{2,p,B(x_n,\frac{r}{2})} \\
&\leq C(N,p,\nu)\sum_{n\in\mathbb{N}}\Bigg[\|Au\|^p_{p,B(x_n,r)} + \omega^p(r)\|u\|^p_{2,p,B(x_n,r)} \\
&\qquad\qquad + K^p(M,r)\|u\|^p_{1,p,B(x_n,r)}\Bigg] \\
&\leq \xi(N)C(N,p,\nu)[\|Au\|^p_p + \omega^p(r)\|u\|^p_{2,p} + K^p(M,r)\|u\|^p_{1,p}].
\end{aligned}
$$

Scegliendo r in modo tale che $\omega^p(r)\xi(N)C^p(N,p,\nu) \leq \frac{1}{2}$ e portando a primo membro $\omega^p(r)\xi(N)C^p(N,p,\nu)\|u\|^p_{2,p}$ otteniamo

$$\|u\|^p_{2,p} \leq C^p(N,p,\nu)[\|Au\|^p_p + K^p(M,r)\|u\|^p_{1,p}]$$

da cui segue

$$\|u\|_{2,p} \leq C(N,p,\nu)[\|Au\|_p + K(M,r)\|u\|_{1,p}].$$

Usando le stime interpolative della Proposizione 2.15

$$\|u\|_{2,p} \leq C(N,p,\nu)\left[\|Au\|_p + K(M,r)\varepsilon\|D^2u\|_p + \frac{K(M,r)}{\varepsilon}\|u\|_p\right].$$

Scegliendo infine ε in modo tale che $C(N,p,\nu)K(M,r)\varepsilon \leq \frac{1}{2}$ abbiamo la tesi. $\square$

Proviamo adesso una stima analoga a (2.18) per l'operatore ellittico nella forma più generale.

TEOREMA 3.5 (Agmon). *Sia $1 < p < \infty$. Esistono λ_0, C costanti strettamente positive dipendenti da N, p, ν, M, ω, tali che $\forall\ u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$, $\forall\ \lambda \geq \lambda_0$*

$$\lambda\|u\|_p + \lambda^{\frac{1}{2}}\|\nabla u\|_p + \|D^2u\|_p \leq C\|(\lambda - A)u\|_p.$$

DIM. Definiamo un nuovo operatore A_1 in questo modo:

$$A_1 := A + D_{tt}.$$

A_1 è ancora un operatore ellittico e agisce su funzioni della variabile $(x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}$. Osserviamo che le nuove grandezze $N_1, \nu_1, M_1, \omega_1$ sono legate alle precedenti dalle seguenti relazioni:

$$N_1 = N + 1 \quad \nu_1 = \min\{\nu, 1\} \quad M_1 = \max\{M, 1\} \quad \omega_1 = \omega.$$

Sia $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tale che $\eta \equiv 1$ in $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ e $supp\, \eta \subseteq [-1,1]$. Applichiamo il Teorema 3.4 all'operatore A_1 e alla funzione $v(t,x) := \eta(t)e^{irt}u(x)$, con $r \in \mathbb{R}$. Otteniamo

$$\begin{aligned}
\|v\|_{2,p,\mathbb{R}^{N+1}} &\leq C(N,p,\nu,M,\omega)[\|v\|_{p,\mathbb{R}^{N+1}} + \|A_1 v\|_{p,\mathbb{R}^{N+1}}] \\
&\leq C(N,p,\nu,M,\omega) \\
&\quad \times \left[\|u\|_p + \|\eta e^{irt}Au + u\eta'' e^{irt} + 2ire^{irt}\eta' u - r^2\eta e^{irt}u\|_{p,\mathbb{R}^{N+1}}\right] \\
&\leq C(N,p,\nu,M,\omega)[\|u\|_p + \|(A - r^2)u\|_{p,\mathbb{R}^{N+1}} + (1+2r)\|u\|_p] \\
&\leq C(N,p,\nu,M,\omega)[(1+r)\|u\|_p + \|(A-r^2)u\|_p].
\end{aligned}$$

Inoltre

$$\begin{aligned}
\|v\|^p_{2,p,\mathbb{R}^{N+1}} &\geq \|v\|^p_{2,p,\mathbb{R}^N \times [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{|\alpha|\leq 2} |D^\alpha(e^{irt}u(x))|^p dxdt \\
&= \|u\|_p^p + \|\nabla u\|_p^p + \|D^2u\|_p^p + r^p\|u\|_p^p + r^{2p}\|u\|_p^p + 2r^p\|\nabla u\|_p^p \\
&\geq \|D^2u\|_p^p + r^p\|\nabla u\|_p^p + r^{2p}\|u\|_p^p.
\end{aligned}$$

Pertanto

$$\|D^2u\|_p + r\|\nabla u\|_p + r^2\|u\|_p \leq C(N,p,\nu,M,\omega)[(1+r)\|u\|_p + \|(A-r^2)u\|_p].$$

Scegliendo r_0 in modo tale che, se $r \geq r_0$, $r^2 - C(N,p,\nu,M,\omega)(1+r) \geq \frac{r^2}{2}$, otteniamo infine

$$\|D^2u\|_p + r\|\nabla u\|_p + \frac{1}{2}r^2\|u\|_p \leq C(N,p,\nu,M,\omega)\|(A-r^2)u\|_p \qquad (3.5)$$

per ogni $r \geq r_0$. Riscrivendo (3.5) per $\lambda = r^2$ e ponendo $\lambda_0 := r_0^2$, segue la tesi. $\square$

Per ricavare esistenza e unicità della soluzione dell'equazione $\lambda u - Au = f$, useremo un risultato generale di analisi funzionale, che è noto come *metodo di continuità* e rappresenta un potente strumento nella risoluzione di equazioni differenziali alle derivate parziali.

TEOREMA 3.6 (Metodo di continuità). *Siano X, Y spazi di Banach, L_0 ed L_1 operatori lineari e continui da X in Y. Consideriamo gli operatori lineari*

$$L_t = (1-t)L_0 + tL_1, \qquad t \in [0,1],$$

e supponiamo che esista una costante $C > 0$ tale che

$$\|L_t x\|_Y \geq C\,\|x\|_X, \quad x \in X,\ t \in [0,1]. \tag{3.6}$$

Se L_0 è suriettivo allora anche L_1 è suriettivo (e quindi bigettivo per la stima (3.6)).

DIM. Osserviamo che la stima (3.6) implica che ogni L_t è iniettivo.

Sia $E = \{t \in [0,1] : L_t \text{ è bigettivo}\}$. Per ipotesi $0 \in E$, per cui $E \neq \emptyset$. Se $t_0 \in E$ allora L_{t_0} è bigettivo, e, per (3.6), $\|L_{t_0}^{-1}\| \leq \frac{1}{C}$. Inoltre $L_t = L_{t_0}\left(I + (t-t_0)L_{t_0}^{-1}(L_1 - L_0)\right)$. Allora L_t è invertibile se e solo se $I + (t - t_0)L_{t_0}^{-1}(L_1 - L_0)$ è invertibile. Ciò è assicurato se $\|(t-t_0)L_{t_0}^{-1}(L_1 - L_0)\| < 1$ e per questo è sufficiente che $|t - t_0| < \frac{C}{\|L_1\|+\|L_0\|}$. Posto $\delta = \frac{C}{2(\|L_1\|+\|L_0)}$ e preso $t_0 = 0 \in E$, per quanto provato si ha che $[0,\delta] \subset E$. Ripartendo da δ e ripetendo lo stesso ragionamento si ottiene che $[\delta, 2\delta] \subset E$, e così via. Dopo un numero finito di passi si avrà che $[0,1] \subset E$, quindi la tesi. □

A questo punto, come anticipato, siamo in grado di provare esistenza e unicità.

TEOREMA 3.7. *Sia $1 < p < \infty$. Esistono λ_0, $C > 0$ dipendenti da N, p, ν, M, ω tali che per ogni $\lambda \geq \lambda_0$ l'operatore $\lambda - A : W^{2,p}(\mathbb{R}^N) \to L^p(\mathbb{R}^N)$ è invertibile e le seguenti disuguaglianze sono verificate (la norma è quella degli operatori in L^p)*

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_p \leq \frac{C}{\lambda}; \tag{3.7}$$

$$\|\nabla(\lambda - A)^{-1}\|_p \leq \frac{C}{\sqrt{\lambda}}; \tag{3.8}$$

$$\|D^2(\lambda - A)^{-1}\|_p \leq C. \tag{3.9}$$

DIM. Consideriamo gli spazi

$$X = W^{2,p}(\mathbb{R}^N), \qquad Y = L^p(\mathbb{R}^N)$$

e gli operatori

$$L_0 = \lambda - \Delta, \quad L_1 = \lambda - A, \quad L_t = \lambda - [(1-t)\Delta + tA].$$

Per il Teorema 2.18, l'operatore L_0 è invertibile se $\lambda > 0$. Per il Teorema 3.5 applicato all'operatore $A_t := (1-t)\Delta + tA$, esistono C e λ_0 dipendenti da N, p, ν_t, M_t, ω_t tali che

$$\|u\|_{2,p} \leq C\|(\lambda - A_t)u\|_p$$

per ogni $\lambda \geq \lambda_0$. Osservando che

$$M_t \leq \max\{1, M\}, \quad \nu_t \geq \min\{1, \nu\}, \quad \omega_t = t\omega \leq \omega,$$

possiamo pertanto eliminare la dipendenza delle costanti C e λ_0 da t. Sono soddisfatte le ipotesi del Teorema 3.6 da cui otteniamo l'invertibilità dell'operatore $L_1 = \lambda - A$.
Le disuguaglianze (3.7), (3.8) e (3.9) seguono immediatamente dal Teorema (3.5). □

3.2. Stime L^p in $\mathbb{R}^N$ per operatori ellittici in forma divergenza

Ci occupiamo di operatori ellittici della forma

$$A = \sum_{i,j=1}^{N} D_i(a_{ij}D_j) + \sum_{i=1}^{N} b_i D_i + c$$

con $a_{ij},\ b \in C_b^1(\mathbb{R}^N),\ c \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \nu|\xi|^2 \quad \text{per ogni } x, \xi \in \mathbb{R}^N$$

dove $\nu > 0$. Poniamo

$$M := \max\{\|a_{ij}\|_\infty,\ \|\nabla a_{ij}\|_\infty,\ \|b_i\|_\infty,\ \|c\|_\infty\}$$

e

$$\omega(r) := \max_{i,j} \sup_{|x-y|<r} |a_{ij}(x) - a_{ij}(y)|.$$

Osserviamo che, per l'ipotesi sui coefficienti a_{ij}, risulta $\omega(r) \leq Mr$.
In questa sezione diamo stime esplicite per le costanti λ_0 e C del Teorema 3.7.
Abbiamo bisogno di un lemma preliminare la cui dimostrazione è analoga a quella del Lemma 2.19.

LEMMA 3.8. *Sia $1 < p < \infty$ e sia $A_0 := \sum_{i,j=1}^N D_i(a_{ij}D_j)$ l'operatore ottenuto da A annullando i coefficienti b_i e il termine noto c. Allora*

$$\int_{\mathbb{R}^N} A_0 u u|u|^{p-2} \leq 0$$

per ogni $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$.

Poniamo adesso

$$\lambda_p := \sup_{x\in\mathbb{R}^N} \big[-\frac{\operatorname{div} b(x)}{p} + c(x)\big].$$

TEOREMA 3.9. *Sia* $1 < p < \infty$. *Se* $\lambda > \lambda_p$, *l'operatore* $\lambda - A : W^{2,p}(\mathbb{R}^N) \to L^p(\mathbb{R}^N)$ *è invertibile. Inoltre, vale la stima*

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_p \leq \frac{1}{\lambda - \lambda_p}. \tag{3.10}$$

DIM. Consideriamo l'equazione $\lambda - Au = f$ con $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$ e $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Moltiplichiamo ambo i membri per $u|u|^{p-2}$ e integriamo su $\mathbb{R}^N$. Otteniamo così

$$\lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p - \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{i,j=1}^N D_i(a_{ij}D_j u)u|u|^{p-2}$$
$$- \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{i=1}^N b_i(D_i u)u|u|^{p-2} - \int_{\mathbb{R}^N} c|u|^p = \int_{\mathbb{R}^N} fu|u|^{p-2}.$$

Siccome $(D_i u)u|u|^{p-2} = \frac{1}{p}D_i|u|^p$ si ha

$$\lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p - \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{i,j=1}^N D_i(a_{ij}D_j u)u|u|^{p-2}$$
$$-\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} \sum_{i=1}^N b_i D_i|u|^p - \int_{\mathbb{R}^N} c|u|^p = \int_{\mathbb{R}^N} fu|u|^{p-2}$$

e, per il Lemma 3.8,

$$\lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} \sum_{i=1}^N b_i D_i|u|^p - \int_{\mathbb{R}^N} c|u|^p \leq \int_{\mathbb{R}^N} fu|u|^{p-2}.$$

Integrando per parti il secondo integrale a primo membro e applicando la disuguaglianza di Hölder otteniamo

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Big(\lambda + \frac{\operatorname{div} b}{p} - c\Big)|u|^p \leq \Big(\int_{\mathbb{R}^N} |f|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p\Big)^{1-\frac{1}{p}}$$

da cui, per com'è definito λ_p,

$$(\lambda - \lambda_p)\|u\|_p \leq \|f\|_p. \tag{3.11}$$

Se $\lambda > \lambda_p$ e $\lambda \in \rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \ (\lambda - A) \text{ è invertibile}\}$, quest'ultima disuguaglianza ci dà (3.10). Proviamo che per ogni $\lambda > \lambda_p$, $\lambda \in \rho(A)$. Per il Teorema 3.7, esiste $\lambda_0 = \lambda_0(N, p, \nu, M, \omega)$ tale che per ogni $\lambda \geq \lambda_0$ l'operatore $\lambda - A$ è invertibile. Se $\lambda_p \geq \lambda_0$, abbiamo subito la tesi. Supponiamo $\lambda_p < \lambda_0$. e, per assurdo,

$$\lambda_1 = \inf\big\{\lambda \in (\lambda_p, \lambda_0) \;\big|\; (\lambda, \lambda_0) \subset \rho(A)\big\} > \lambda_p.$$

Allora $\lambda_1 \in \sigma(A)$, perché $\rho(A)$ è aperto, e $\lim_{\lambda\to\lambda_1} \|R(\lambda, A)\| = +\infty$, in contraddizione con (3.11). Allora $\lambda_1 = \lambda_p$ e la tesi è provata. □

Vediamo adesso come i risultati di esistenza e unicità permettono di provare risultati di regolarità ellittica.

PROPOSIZIONE 3.10. *Siano* $1 < p,\ q < \infty$ *e sia* $u \in W^{2,p}_{loc}(\mathbb{R}^N)$. *Se* $u, Au \in L^q(\mathbb{R}^N)$, *allora* $u \in W^{2,q}(\mathbb{R}^N)$.

DIM. La funzione $f := \lambda u - Au$ appartiene a $L^q(\mathbb{R}^N)$ per ipotesi. Per il Teorema 3.9 se $\lambda > \lambda_q$ esiste un'unica $v \in W^{2,q}(\mathbb{R}^N)$ tale che

$$\lambda v - Av = f = \lambda u - Au.$$

La funzione $w := u - v$ soddisfa $w, Aw \in L^q(\mathbb{R}^N)$ e

$$\lambda w - Aw = 0. \tag{3.12}$$

Sia $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Moltiplichiamo ambo i membri di (3.12) per ϕ e integriamo su $\mathbb{R}^N$. Otteniamo

$$0 = \int_{\mathbb{R}^N} (\lambda w - Aw)\phi = \int_{\mathbb{R}^N} w(\lambda\phi - A^*\phi) \tag{3.13}$$

dove

$$A^* = \sum_{i,j=1}^N D_i(a_{ij}D_j) - \sum_{i=1}^N b_i D_i + c - \mathrm{div} b.$$

Per densità, (3.13) vale per ogni $\phi \in W^{2,q}(\mathbb{R}^N)$. Per il Teorema 3.9 applicato all'operatore A^*, per ogni $\lambda > \lambda_{q'}$, l'operatore $\lambda - A^* : W^{2,q'}(\mathbb{R}^N) \to L^{q'}(\mathbb{R}^N)$ è invertibile. Fissato $\lambda > \max\{\lambda_q, \lambda_{q'}\}$ esiste $\phi \in W^{2,q'}(\mathbb{R}^N)$ tale che

$$\lambda\phi - A^*\phi = w|w|^{q-2}$$

e, per (3.13),

$$0 = \int_{\mathbb{R}^N} |w|^q.$$

Pertanto $w \equiv 0$ e $u = v \in W^{2,q}(\mathbb{R}^N)$. □

PROPOSIZIONE 3.11. *Siano* $1 < p < q < \infty$ *e sia* $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$. *Se* $\lambda u - Au \in L^q(\mathbb{R}^N)$, *allora* $u \in W^{2,q}(\mathbb{R}^N)$.

DIM. Sia $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$. Supponiamo $p < \frac{N}{2}$. Per i Teoremi di immersione di Sobolev, $u \in L^{p_1}(\mathbb{R}^N)$ con p_1 tale che $\frac{1}{p_1} = \frac{1}{p} - \frac{2}{N}$. Supponiamo $p_1 < q$. Per ipotesi, posto $g = \lambda u - Au$, risulta $g \in L^p(\mathbb{R}^N) \cap L^q(\mathbb{R}^N)$ e quindi $g \in L^{p_1}(\mathbb{R}^N)$. Allora $Au = \lambda u + g \in L^{p_1}(\mathbb{R}^N)$ e per la Proposizione 3.10, $u \in W^{2,p_1}(\mathbb{R}^N)$. A partire da p_1, ripetendo un ragionamento analogo un numero finito di volte, si prova che $u \in W^{2,q}(\mathbb{R}^N)$.
Se invece $p_1 \geq q$ otteniamo la tesi al primo passo. Se $p > \frac{N}{2}$, per la

disuguaglianza di Morrey $u \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e quindi per interpolazione $u \in L^q(\mathbb{R}^N)$. Allora $Au = \lambda u + (Au - \lambda u) \in L^q(\mathbb{R}^N)$ e per la Proposizione 3.10, $u \in W^{2,q}(\mathbb{R}^N)$. □

Vediamo adesso che il risolvente di un operatore ellittico non dipende da p. Usiamo la notazione A_p per A come operatore in $L^p(\mathbb{R}^N)$ con dominio $W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$.

PROPOSIZIONE 3.12. *Siano* $1 < p,\ q < \infty$, *e* $\lambda \in \rho(A_p) \cap \rho(A_q)$. *Se* $f \in L^p(\mathbb{R}^N) \cap L^q(\mathbb{R}^N)$, *allora*

$$(\lambda - A_p)^{-1} f = (\lambda - A_q)^{-1} f.$$

DIM. Poniamo $u := (\lambda - A_p)^{-1} f \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$ e $v := (\lambda - A_q)^{-1} f \in W^{2,q}(\mathbb{R}^N)$. Allora

$$\lambda u - Au = f$$

e

$$\lambda v - Av = f.$$

Supponiamo $p < q$. La funzione u appartiene a $W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$ per ipotesi e risolve $\lambda u - Au = f$ con $f \in L^q(\mathbb{R}^N)$, quindi per la Proposizione 3.11, $u \in W^{2,q}(\mathbb{R}^N)$. La funzione $v \in W^{2,q}(\mathbb{R}^N)$ risolve la stessa equazione ellittica e per unicità della soluzione $u \equiv v$. Se $p > q$, perveniamo allo stesso risultato invertendo nella dimostrazione i ruoli di p e q. □

OSSERVAZIONE 3.13. L'ipotesi $\lambda \in \rho(A_p) \cap \rho(A_q)$ nella precedente proposizione è superflua poiché si può provare che gli insiemi risolventi coincidono.

3.3. Stime L^p interne per operatori uniformemente ellittici

Sia A l'operatore differenziale

$$Au = \sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_{ij} + \sum_{i=1}^N b_i D_i + c$$

dove, come già richiesto in precedenza, $a_{ij} = a_{ji} \in BUC(\mathbb{R}^N)$, $b_{ij} \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ per ogni $i, j = 1, ..., N$, $c \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Anche qui i coefficienti a_{ij} soddisfano

$$\sum_{ij} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \nu |\xi|^2;$$

per ogni $\xi, x \in \mathbb{R}^N$ e con $\nu > 0$. Ricordiamo le notazioni

$$M := \max\{\|a_{ij}\|_\infty, \|b_i\|_\infty, \|c\|_\infty\}$$

e

$$\omega(r) := \max_{i,j} \sup_{|x-y|<r} |a_{ij}(x) - a_{ij}(y)|.$$

Proviamo stime L^p senza condizioni al bordo. Con le notazioni del Teorema 3.14 seguente, è necessario che $\Omega_1 \subset\subset \Omega_2$. Infatti se $\Omega_1 = \Omega_2 = B(0,1)$ è il disco unitario in $\mathbb{C}$, le funzioni $f_n(z) = z^n$ soddisfano $\Delta(z^n) = 0$ ma la stima

$$\|f_n\|_{2,p} \le C\,[\|f_n\|_p + \|\Delta f_n\|_p]$$

non può valere per ogni n.

TEOREMA 3.14 (Stime interne). *Siano $1 < p < \infty$, Ω_1, Ω_2 aperti di $\mathbb{R}^N$ con Ω_1 limitato e $\Omega_1 \subset\subset \Omega_2$. Allora esiste $C = C(N,p,\nu,M,\omega,\Omega_1,\Omega_2)$ tale che*

$$\|u\|_{2,p,\Omega_1} \le C\,[\|u\|_{p,\Omega_2} + \|Au\|_{p,\Omega_2}]$$

per ogni $u \in W^{2,p}(\Omega_2)$.

Dimostriamo prima questo teorema per palle di $\mathbb{R}^N$.

LEMMA 3.15. *Siano $1 < p < \infty$, $B(R)$ e $B(2R)$ palle concentriche di $\mathbb{R}^N$ di raggio R e $2R$ rispettivamente. Allora esiste $C = C(N,p,\nu,M,\omega,R)$ tale che*

$$\|u\|_{2,p,B(R)} \le C(N,p,\nu,M,\omega,R)\,[\|u\|_{p,B(2R)} + \|Au\|_{p,B(2R)}]$$

per ogni $u \in W^{2,p}(B(2R))$.

DIM. Per semplicità di notazione, scriviamo $\|\cdot\|_{2,p,R}$ invece che $\|\cdot\|_{2,p,B(R)}$ e analogamente per le norme L^p.
Poniamo

$$R_n := R\sum_{k=0}^{n} 2^{-k}.$$

Evidentemente $R_0 = R$, $R_\infty = 2R$ e $R_{n+1} - R_n = R2^{-(n+1)}$. Indichiamo con B_n la palla di raggio R_n. Consideriamo funzioni $\eta_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tali che $0 \le \eta_n \le 1$, $\eta_n \equiv 1$ in B_n, $supp\,\eta_n \subset B_{n+1}$, $|\nabla \eta_n| \le \frac{L}{R}2^n$ e $|D^2\eta_n| \le \frac{L}{R^2}4^n$ per qualche $L > 0$. Applicando le stime globali (Teorema 3.4) alle funzioni

$\eta_n u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$ otteniamo

$$\begin{aligned}
\|\eta_n u\|_{2,p} &\le \widetilde{C}(N,p,\nu,M,\omega)[\|\eta_n u\|_p + \|A(\eta_n u)\|_p] \\
&\le \widetilde{C}(N,p,\nu,M,\omega)\Bigg[\|u\|_{p,2R} + \Big\|\eta_n Au + 2\sum_{i,j} a_{ij}D_iuD_j\eta_n \\
&\qquad + u\sum_{i,j} a_{ij}D_{ij}\eta_n + u\sum_i b_iD_i\eta_n\Big\|_p\Bigg] \\
&\le \widetilde{C}(N,p,\nu,M,\omega)\Bigg[\|u\|_{p,2R} + \|Au\|_{p,2R} + \frac{ML}{R^2}4^n\|u\|_{p,2R} \\
&\qquad + \frac{ML}{R}2^n\|\nabla u\|_{p,R_{n+1}}\Bigg] \\
&\le C(N,p,\nu,M,\omega,R)\Bigg[\|Au\|_{p,2R} + 4^n\|u\|_{p,2R} + 2^n\|\nabla\eta_{n+1}u\|_p\Bigg].
\end{aligned}$$

Se stimiamo $\|\nabla(\eta_{n+1}u)\|_p$ servendoci delle disuguaglianze interpolative della Proposizione 2.15 otteniamo

$$\begin{aligned}
\|\eta_n u\|_{2,p} &\le C(N,p,\nu,M,\omega,R) \\
&\quad \times\left[\|Au\|_{p,2R} + 4^n\|u\|_{p,2R} + 2^n\varepsilon\|\eta_{n+1}u\|_{2,p} + \frac{2^n}{\varepsilon}\|u\|_{p,2R}\right]
\end{aligned}$$

per ogni $\varepsilon > 0$. Posto $\xi := C(N,p,\nu,M,\omega,R)2^n\varepsilon$, la stima precedente diventa

$$\|\eta_n u\|_{2,p} \le C\left[\|Au\|_{p,2R} + \left(\frac{C4^n}{\xi} + 4^n\right)\|u\|_{p,2R} + \frac{\xi}{C}\|\eta_{n+1}u\|_{2,p}\right].$$

Moltiplicando ambo i membri per ξ^n, otteniamo

$$\xi^n\|\eta_n u\|_{2,p} \le \xi^n C\|Au\|_{p,2R} + C_1 4^n\xi^{n-1}\|u\|_{p,2R} + \xi^{n+1}\|\eta_{n+1}u\|_{2,p} \tag{3.14}$$

dove $C_1 = C_1(N,p,\nu,M,\omega,R)$. Scegliamo ε_n in modo tale che ξ sia indipendente da n e minore di $\frac{1}{8}$ e sommiamo su n le disuguaglianze (3.14)

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\xi^n\|\eta_n u\|_{2,p} &\le C\|Au\|_{p,2R}\sum_{n=0}^{\infty}\xi^n + C_1\|u\|_{p,2R}\sum_{n=0}^{\infty}4^n\xi^{n-1} \\
&\quad + \sum_{n=0}^{\infty}\xi^{n+1}\|\eta_{n+1}u\|_{2,p}
\end{aligned}$$

(le serie convergono perché $\|\eta_n u\|_{2,p} \le C4^n\|u\|_{2,p,B(2R)}$ e $\xi < \frac{1}{8}$). Osserviamo che $\sum_{n=0}^{\infty}\xi^n = \frac{1}{1-\xi}$ e $C_1\sum_{n=0}^{\infty}4^n\xi^{n-1} = C_2$, dove C_2 dipende da N,p,ν,M,ω ed R. Cancellando i termini uguali a primo e secondo membro otteniamo infine

$$\|u\|_{2,p,R} \le \|\eta_0 u\|_{2,p} \le C(N,p,\nu,M,\omega,R)[\|Au\|_{p,2R} + \|u\|_{p,2R}].$$

□

DIM. (Teorema 3.14) Scegliamo R in modo che $2R < dist(\Omega_1, \partial\Omega_2)$. Ovviamente risulta

$$\overline{\Omega}_1 \subseteq \bigcup_{x \in \Omega_1} B(x, R).$$

Per compattezza possiamo estrarre un sottoricoprimento finito di $\overline{\Omega}_1$; risulta quindi

$$\overline{\Omega}_1 \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} B(x_i, R).$$

Dal Lemma 3.15 segue

$$\begin{aligned} \|u\|_{2,p,\Omega_1} &\leq \sum_{i=1}^{k} \|u\|_{2,p,B(x_i,R)} \\ &\leq C(N, p, \nu, M, \omega, R) \sum_{i=1}^{k} \left(\|u\|_{p,B(x_i,2R)} + \|Au\|_{p,B(x_i,2R)} \right). \end{aligned}$$

Per l'ipotesi su R, $B(x_i, 2R) \subseteq \Omega_2$, pertanto

$$\|u\|_{2,p,\Omega_1} \leq kC(N, p, \nu, M, \omega, R)\ [\|u\|_{p,\Omega_2} + \|Au\|_{p,\Omega_2}].$$

□

CAPITOLO 4

Operatori ellittici in $\mathbb{R}^N_+$

Premettiamo alcune notazioni.

$$\mathbb{R}^N_+ = \{x = (x', x_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^N : x_N > 0\};$$

$$\partial\mathbb{R}^N_+ = \{x \in \mathbb{R}^N : x_N = 0\} \equiv \mathbb{R}^{N-1}.$$

Consideriamo l'operatore ellittico

$$Au = \sum_{i,j=1}^N a_{ij} D_{ij} + \sum_{i=1}^N b_i D_i + c$$

dove $a_{ij} = a_{ji} \in BUC(\mathbb{R}^N_+)$, $b_{ij} \in L^\infty(\mathbb{R}^N_+)$ per $i, j = 1, ..., N$, $c \in L^\infty(\mathbb{R}^N_+)$. Inoltre i coefficienti a_{ij} soddisfano la condizione di ellitticità

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \nu|\xi|^2$$

e la stima

$$\left|\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\right| \leq \Lambda|\xi|^2$$

per ogni $\xi \in \mathbb{R}^N_+$, $x \in \mathbb{R}^N$, dove

$$\nu = \inf_{x \in \mathbb{R}^N_+} \{\text{minimo autovalore di } a_{ij}(x)\};$$

$$\Lambda = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} \{\text{massimo autovalore di } a_{ij}(x)\}.$$

Poniamo

$$M := \max\{\|a_{ij}\|_\infty, \|b_i\|_\infty, \|c\|_\infty\};$$

$$\omega(r) := \max_{i,j} \sup_{|x-y|<r} |a_{ij}(x) - a_{ij}(y)|.$$

In questa sezione ripercorreremo le varie tappe dello studio di operatori ellittici nell'intero spazio. Inizieremo col provare esistenza e unicità della soluzione del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \lambda u - \Delta u = f(x', x_N) & \text{in } \mathbb{R}^N_+ \\ u = 0 & \text{su } \partial\mathbb{R}^N_+. \end{cases}$$

Proveremo poi stime L^p per operatori a coefficienti variabili. Servendoci del metodo di continuità, dedurremo che il problema di Dirichlet è ben posto.

In modo analogo al caso dell'intero spazio, si provano il lemma e la proposizione seguenti.

LEMMA 4.1. *Se $1 < p < \infty$ e $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N_+) \cap W^{1,p}_0(\mathbb{R}^N_+)$, allora*

$$\int_{\mathbb{R}^N_+} \Delta u \, u|u|^{p-2} \le 0 \, .$$

PROPOSIZIONE 4.2. *Sia $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N_+)$ con $1 \le p < \infty$, allora per ogni $\varepsilon > 0$*

$$\|\nabla u\|_p \le c\varepsilon \|D^2 u\|_p + \frac{c}{\varepsilon}\|u\|_p$$

per una qualche costante $c = c(p) > 0$. Inoltre, minimizzando su ε, si ha

$$\|\nabla u\|_p \le 2c\|D^2 u\|_p^{\frac{1}{2}} \|u\|_p^{\frac{1}{2}}.$$

TEOREMA 4.3. *Siano $1 < p < \infty$ e $\lambda > 0$; allora per ogni $f \in L^p(\mathbb{R}^N_+)$ esiste un'unica $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N_+) \cap W^{1,p}_0(\mathbb{R}^N_+)$ tale che*

$$\lambda u - \Delta u = f.$$

Inoltre esiste $C = C(N,p) > 0$ tale che

$$\lambda \|u\|_p \le \|f\|_p. \tag{4.1}$$

$$\lambda^{\frac{1}{2}} \|\nabla u\|_p \le C(N,p)\|f\|_p. \tag{4.2}$$

$$\|D^2 u\|_p \le C(N,p)\|f\|_p. \tag{4.3}$$

La dimostrazione poggia sul seguente lemma.

LEMMA 4.4. *Sia $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ con $1 \le p < \infty$, tale che $u(x', -x_N) = -u(x', x_N)$. Allora $u_{|\mathbb{R}^N_+} \in W^{1,p}_0(\mathbb{R}^N_+)$.*

DIM. Regolarizziamo la funzione u prendendo come funzioni approssimanti $u_\varepsilon = u * \phi_\varepsilon$ dove ϕ è un mollificatore pari nella variabile x_N. Allora $u_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^N) \cap W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e $u_\varepsilon \to u$ in $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Risulta inoltre

$$u_\varepsilon(x', -x_N) = -u_\varepsilon(x', x_N)$$

da cui segue

$$u_\varepsilon(x', 0) = 0$$

e quindi $u_\varepsilon \in W^{1,p}_0(\mathbb{R}^N_+)$. In quanto limite di funzioni in $W^{1,p}_0(\mathbb{R}^N_+)$ anche u appartiene allo stesso spazio. $\square$

DIM.(Teorema 4.3)
"Unicità + stima (4.1)": Siano $f \in L^p(\mathbb{R}^N_+)$ ed $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N_+) \cap W^{1,p}_0(\mathbb{R}^N_+)$ tali che $\lambda u - \Delta u = f$. Moltiplicando per $u|u|^{p-2}$ otteniamo

$$\lambda |u|^p - \Delta u\, u|u|^{p-2} = fu|u|^{p-2}.$$

Integrando su $\mathbb{R}^N_+$ ed usando il Lemma 4.1 e la disuguaglianza di Hölder

$$\begin{aligned} \lambda \int_{\mathbb{R}^N_+} |u|^p &\leq \lambda \int_{\mathbb{R}^N_+} |u|^p - \int_{\mathbb{R}^N_+} \Delta u\, u|u|^{p-2} \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N_+} |f||u|^{p-1} \leq \|f\|_p \, \|u\|_p^{p-1}. \end{aligned}$$

Quindi, dividendo primo e secondo membro per $\|u\|_p^{p-1}$, si ha

$$\lambda \|u\|_p \leq \|f\|_p. \tag{4.4}$$

Questa disuguaglianza implica l'unicità della soluzione.
"Esistenza": Sia $f \in L^p(\mathbb{R}^N_+)$. Consideriamo la funzione $\widetilde{f}$ ottenuta da f mediante una riflessione dispari.

$$\widetilde{f}(x', x_N) = \begin{cases} f(x', x_N) & \text{se } x_N \geq 0 \\ -f(x', -x_N) & \text{se } x_N < 0. \end{cases}$$

Risulta evidentemente $\|\widetilde{f}\|_{p,\mathbb{R}^N} \leq 2\|f\|_{p,\mathbb{R}^N_+}$. Per il Teorema 2.18, esiste un'unica $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$ tale che

$$\lambda u - \Delta u = \widetilde{f} \tag{4.5}$$

in $\mathbb{R}^N$ ed esiste $C = C(N,p) > 0$ tale che

$$\lambda^{\frac{1}{2}} \|\nabla u\|_{p,\mathbb{R}^N} \leq C(N,p)\|\widetilde{f}\|_{p,\ R^N} \leq 2C(N,p)\|f\|_{p,\mathbb{R}^N_+}; \tag{4.6}$$

$$\|D^2 u\|_{p,\mathbb{R}^N} \leq C(N,p)\|\widetilde{f}\|_{p,\ R^N} \leq 2C(N,p)\|f\|_{p,\mathbb{R}^N_+}. \tag{4.7}$$

La restrizione di u a $\mathbb{R}^N_+$ è la funzione candidata a risolvere l'equazione nel semispazio. Da (4.6) e (4.7) rispettivamente deduciamo che essa soddisfa (4.2) e (4.3). Resta da provare la sua appartenenza allo spazio $W^{1,p}_0(\mathbb{R}^N_+)$. Sia $v(x', x_N) = -u(x', -x_N)$. Allora

$$\begin{aligned} \lambda v(x', x_N) - \Delta v(x', x_N) &= -\lambda u(x', -x_N) + \Delta u(x', -x_N) \\ &= -\widetilde{f}(x', -x_N) = \widetilde{f}(x', x_N). \end{aligned}$$

Le funzioni $v(x', x_N)$ e $u(x', x_N)$ risolvono allora la stessa equazione ellittica in $\mathbb{R}^N$ e per unicità coincidono. Pertanto

$$u(x', x_N) = v(x', x_N) = -u(x', -x_N)$$

e dal Lemma 4.4 segue che $u_{|\mathbb{R}^N_+} \in W^{1,p}_0(\mathbb{R}^N_+)$. $\square$

Dal teorema appena provato deduciamo immediatamente stime L^p per l'operatore di Laplace.

COROLLARIO 4.5. *Sia $1 < p < \infty$. Esiste $C = C(N,p) > 0$ tale che*

$$\|u\|_{2,p} \le C(N,p)(\|u\|_p + \|\Delta u\|_p) \tag{4.8}$$

per ogni $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N_+) \cap W^{1,p}_0(\mathbb{R}^N_+)$.

DIM. Basta applicare le stime (4.1), (4.2) e (4.3) con $f = u - \Delta u$ e $\lambda = 1$. $\square$

Come in $\mathbb{R}^N$, proviamo stime L^p per l'operatore a coefficienti costanti

$$A_0 = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} D_{ij}$$

con $a = (a_{ij})$ matrice reale simmetrica e costante di ellitticità $\nu > 0$.

PROPOSIZIONE 4.6. *Se $1 < p < \infty$, allora esiste $C = C(N,p,\nu)$ tale che*

$$\|u\|_{2,p} \le C(N,p,\nu)\ [\|u\|_p + \|A_0 u\|_p]$$

per ogni $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N_+) \cap W^{1,p}_0(\mathbb{R}^N_+)$.

DIM. La dimostrazione è analoga a quella fatta in $\mathbb{R}^N$ dove ci si riconduce all'operatore di Laplace con un cambio di variabile. Tuttavia è necessario assicurarsi che $\mathbb{R}^N_+$ sia invariante rispetto alle trasformazioni usate.
Sia Q_1 matrice ortogonale tale che $Q_1 a Q_1^* = D_\lambda$ dove D_λ è la matrice diagonale avente come elementi gli autovalori di a, $\lambda_1, \ldots.., \lambda_N$. Poniamo $Q_2 := D_{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}} Q_1$ dove $D_{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}}$ è la matrice diagonale i cui elementi sono $\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{\lambda_N}}$. Allora

$$Q_2 a Q_2^* = D_{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}} Q_1 a Q_1^* D_{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}} = D_{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}} D_\lambda D_{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}} = I.$$

Non è detto però che $Q_2(\mathbb{R}^N_+)$ coincida con $\mathbb{R}^N_+$. Per questo motivo introduciamo una nuova matrice ortogonale S tale che $S(Q_2(\mathbb{R}^N_+)) = \mathbb{R}^N_+$. Per costruzione, posto $Q = SQ_2$, $Q : \mathbb{R}^N_+ \to \mathbb{R}^N_+$ e $Q(\mathbb{R}^{N-1}) = \mathbb{R}^{N-1}$. Risulta inoltre

$$QaQ^* = SQ_2 a Q_2^* S^* = SIS^* = I.$$

Sia $v \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N_+) \cap W^{1,p}_0(\mathbb{R}^N_+)$ tale che $u(x) = v(Qx)$, allora

$$D^2 u(x) = Q^* D^2 v(Qx) Q$$

e

$$\begin{aligned} A_0 u(x) &= tr(aD^2 u(x)) = tr(aQ^* D^2 v(Qx)Q) \\ &= tr(QaQ^* D^2 v(Qx)) = tr(D^2 v(Qx)). \end{aligned}$$

Inoltre

$$\begin{aligned} |D^2u(x)|^2 &= \sum_{i,j=1}^{N} |D_{ij}u|^2 = |D_{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}} D^2v(Qx) D_{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}}|^2 \\ &\le \frac{1}{\nu^2}|D^2v(Qx)|^2. \end{aligned}$$

Possiamo infine applicare le stime già provate per il Laplaciano ed ottenere

$$\begin{aligned} \|D^2u\|_p &\le \frac{1}{\nu}\|D^2v(Q\cdot)\|_p = \frac{c(\lambda)}{\nu}\|D^2v(\cdot)\|_p \\ &\le \frac{C(N,p)c(\lambda)}{\nu}\|\Delta v(\cdot)\|_p = \frac{C(N,p)}{\nu}\|\Delta v(Q\cdot)\|_p \\ &= \frac{C(N,p)}{\nu}\|A_0u\|_p. \end{aligned}$$

Abbiamo così ottenuto

$$\|D^2u\|_p \le C(N,p,\nu)\|A_0u\|_p. \tag{4.9}$$

Per le disuguaglianze interpolative (vedi Proposizione 4.2)

$$\|\nabla u\|_p \le C(\|u\|_p + \|D^2u\|_p). \tag{4.10}$$

Da (4.9) e (4.10) segue la stima desiderata. □

Siamo ora in grado di provare stime L^p per operatori ellittici qualunque. Il metodo dimostrativo, già adottato in $\mathbb{R}^N$, è quello di "congelare" i coefficienti nei centri di opportune palle di $\mathbb{R}^N$.

TEOREMA 4.7 (Stime a priori). *Se $1 < p < \infty$, allora esiste $C = C(N,p,\nu, M,\omega)$ tale che*

$$\|u\|_{2,p} \le C(N,p,\nu,M,\omega)\ [\|u\|_p + \|Au\|_p]$$

per ogni $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N_+) \cap W^{1,p}_0(\mathbb{R}^N_+)$.

DIM. Dati $x_0 \in \mathbb{R}^N_+, r > 0$, sia $\eta \in C^\infty_c(B(x_0,r))$ tale che $0 \le \eta \le 1$, $\eta = 1$ in $B(x_0,\frac{r}{2})$, $\|\nabla\eta\|_\infty \le \frac{L}{r}$ e $\|D^2\eta\|_\infty \le \frac{L}{r^2}$ per qualche $L > 0$. Scriviamo semplicemente $\|\cdot\|_{k,p,r}$, per $k = 0,1,2$ al posto di $\|\cdot\|_{W^{k,p}(B(x_0,r)\cap\mathbb{R}^N_+)}$. L'operatore

$$A_{x_0} = \sum_{i,j} a_{ij}(x_0)D_{ij}$$

è a coefficienti costanti. La Proposizione 4.6, applicata alla funzione $\eta u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N_+) \cap W^{1,p}_0(\mathbb{R}^N_+)$, fornisce

$$\|\eta u\|_{2,p} \le C(N,p,\nu)\ [\|\eta u\|_p + \|A_{x_0}(\eta u)\|_p].$$

Da qui segue

$$\begin{aligned}
\|u\|_{2,p,\frac{r}{2}} &\le C(N,p,\nu)\big[\|u\|_{p,r} + \big\|\eta A_{x_0}u + uA_{x_0}\eta + 2\sum_{i,j} a_{ij}D_iuD_j\eta\big\|_p\big] \\
&\le C(N,p,\nu)[\|u\|_{p,r} + \|A_{x_0}u\|_{p,r} + \frac{ML}{r^2}\|u\|_{p,r} + \frac{ML}{r}\|\nabla u\|_{p,r}] \\
&= C(N,p,\nu)[\|A_{x_0}u\|_{p,r} + K(M,r)\|u\|_{1,p,r}] \\
&\le C(N,p,\nu)[\|Au\|_{p,r} + \|(A_{x_0}-A)u\|_{p,r} + K(M,r)\|u\|_{1,p,r}] \\
&= C(N,p,\nu)\big[\|Au\|_{p,r} + \big\|\sum_{i,j}(a_{ij}(x_0) - a_{ij}(x))D_{ij}u\big\|_{p,r} \\
&\qquad +K(M,r)\|u\|_{1,p,r}\big] \\
&\le C(N,p,\nu)[\|Au\|_{p,r} + \omega(r)\|D^2u\|_{p,r} + K(M,r)\|u\|_{1,p,r}] \\
&\le C(N,p,\nu)[\|Au\|_{p,r} + \omega(r)\|u\|_{2,p,r} + K(M,r)\|u\|_{1,p,r}].
\end{aligned}$$

Elevando ambo i membri alla potenza p-esima, otteniamo

$$\|u\|^p_{2,p,\frac{r}{2}} \le C(N,p,\nu)[\|Au\|^p_{p,r} + \omega^p(r)\|u\|^p_{2,p,r} + K^p(M,r)\|u\|^p_{1,p,r}]. \quad (4.11)$$

Sia $(B(x_n, \frac{r}{2}))$ una famiglia di palle ricoprente $\mathbb{R}^N_+$ con al più $\xi(N)$ tra le palle $B(x_n, r)$ aventi intersezione non vuota (come nel Lemma 3.3). Applichiamo la stima (4.11) in ciascuna delle $B(x_n, \frac{r}{2})$ e sommiamo su n. Otteniamo

$$\begin{aligned}
\|u\|^p_{2,p} &\le \sum_{n\in\mathbb{N}} \|u\|^p_{2,p,B(x_n,\frac{r}{2})} \\
&\le C(N,p,\nu)\sum_{n\in\mathbb{N}}[\|Au\|^p_{p,B(x_n,r)} + \omega^p(r)\|u\|^p_{2,p,B(x_n,r)} \\
&\qquad +K^p(M,r)\|u\|^p_{1,p,B(x_n,r)}] \\
&\le \xi(N)C(N,p,\nu)[\|Au\|^p_p + \omega^p(r)\|u\|^p_{2,p} + K^p(M,r)\|u\|^p_{1,p}].
\end{aligned}$$

Scegliendo r in modo tale che $\omega^p(r)^p\xi(N)C(N,p,\nu)) \le \frac{1}{2}$, otteniamo

$$\|u\|^p_{2,p} \le C(N,p,\nu)[\|Au\|^p_p + K^p(M,r)\|u\|^p_{1,p}]$$

da cui

$$\|u\|_{2,p} \le C(N,p,\nu)[\|Au\|_p + K(M,r)\|u\|_{1,p}].$$

Per le stime interpolative,

$$\|u\|_{2,p} \le C(N,p,\nu)[\|Au\|_p + K(M,r)\varepsilon\|D^2u\|_p + \frac{K(M,r)}{\varepsilon}\|u\|_p].$$

Scegliendo infine ε in modo tale che $C(N,p,\nu)K(M,r)\varepsilon \le \frac{1}{2}$ otteniamo la tesi. □

TEOREMA 4.8 (Agmon). *Sia $1 < p < \infty$. Esistono λ_0, $C > 0$ dipendenti da N, p, ν, M, ω tali che $\forall\ u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N_+) \cap W^{1,p}_0(\mathbb{R}^N_+)$, $\forall\ \lambda \ge \lambda_0$*

$$\lambda\|u\|_p + \lambda^{\frac{1}{2}}\|\nabla u\|_p + \|D^2u\|_p \le C\|(\lambda - A)u\|_p.$$

DIM. Consideriamo l'operatore ellittico

$$A_1 := A + D_{tt}$$

in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N_+ = \mathbb{R}^{N+1}_+$. Osserviamo che le nuove grandezze $N_1, \nu_1, M_1, \omega_1$ relative ad A_1 sono legate alle precedenti dalle seguenti relazioni:

$$N_1 = N + 1 \quad \nu_1 = \min\{\nu, 1\} \quad M_1 = \max\{M, 1\} \quad \omega_1 = \omega.$$

Sia $\eta \in C^\infty_c(\mathbb{R})$, $\eta \leq 1$ tale che $\eta \equiv 1$ in $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ e $supp\,\eta \subseteq [-1, 1]$. Applichiamo il Teorema 4.7 all'operatore A_1 e alla funzione $v(t,x) := \eta(t)e^{irt}u(x)$, con $r \in \mathbb{R}$. Otteniamo

$$\begin{aligned}
\|v\|_{2,p,\mathbb{R}^{N+1}_+} &\leq C(N,p,\nu,M,\omega)[\|v\|_{p,\mathbb{R}^N{+}\times\mathbb{R}} + \|A_1 v\|_{p,\mathbb{R}^{N+1}}] \\
&\leq C(N,p,\nu,M,\omega) \\
&\quad \times[\|u\|_p + \|\eta e^{irt}Au + u\eta'' e^{irt} + 2ire^{irt}\eta' u - r^2\eta e^{irt}u\|_{p,\mathbb{R}^{N+1}}] \\
&\leq C(N,p,\nu,M,\omega)[\|u\|_p + \|(A - r^2)u\|_{p,\mathbb{R}^{N+1}} + (1 + 2r)\|u\|_p] \\
&\leq C(N,p,\nu,M,\omega)[(1 + r)\|u\|_p + \|(A - r^2)u\|_p].
\end{aligned}$$

Inoltre

$$\begin{aligned}
\|v\|^p_{2,p,\mathbb{R}^{N+1}_+} &\geq \|v\|^p_{2,p,[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]\times\mathbb{R}^N_+} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^N_+} \sum_{|\alpha|\leq 2} |D^\alpha(e^{irt}u(x))|^p dt dx \\
&= \|u\|^p_p + \|\nabla u\|^p_p + \|D^2 u\|^p_p + r^p\|u\|^p_p \\
&\quad + r^{2p}\|u\|^p_p + 2r^p\|\nabla u\|^p_p \\
&\geq \|D^2u\|^p_p + r^p\|\nabla u\|^p_p + r^{2p}\|u\|^p_p.
\end{aligned}$$

Pertanto

$$\|D^2u\|_p + r\|\nabla u\|_p + r^2\|u\|_p \leq C(N,p,\nu,M,\omega)[(1+r)\|u\|_p + \|(A - r^2)u\|_p].$$

Scegliendo r_0 in modo tale che, se $r \geq r_0$, $r^2 - C(N,p,\nu,M,\omega)(1+r) \geq \frac{r^2}{2}$, otteniamo infine

$$\|D^2u\|_p + r\|\nabla u\|_p + \frac{1}{2}r^2\|u\|_p \leq C(N,p,\nu,M,\omega)\|(A - r^2)u\|_p. \tag{4.12}$$

per ogni $r \geq r_0$. Riscrivendo (4.12) per $\lambda = r^2$ e ponendo $\lambda_0 := r_0^2$, segue la tesi. □

Abbiamo a questo punto gli strumenti necessari per applicare il metodo di continuità e dedurre il teorema di esistenza e unicità per operatori arbitrari.

TEOREMA 4.9. *Sia $1 < p < \infty$. Esistono λ_0, C dipendenti da N, p, ν, M, ω tali che per ogni $\lambda \geq \lambda_0$ l'operatore $\lambda - A : W^{2,p}(\mathbb{R}^N_+) \cap W^{1,p}_0(\mathbb{R}^N_+) \to L^p(\mathbb{R}^N_+)$ è invertibile e le seguenti disuguaglianze sono verificate (la norma è quella operatoriale in L^p)*

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \frac{C}{\lambda}; \tag{4.13}$$

$$\|\nabla(\lambda - A)^{-1}\| \le \frac{C}{\sqrt{\lambda}}; \tag{4.14}$$

$$\|D^2(\lambda - A)^{-1})\| \le C. \tag{4.15}$$

DIM. Consideriamo anche qui gli spazi

$$X = W^{2,p}(\mathbb{R}^N_+) \cap W^{1,p}_0(\mathbb{R}^N_+), \qquad Y = L^p(\mathbb{R}^N_+)$$

e gli operatori

$$L_0 = \lambda - \Delta, \quad L_1 = \lambda - A, \quad L_t = \lambda - [(1-t)\Delta + tA].$$

Per il Teorema 4.3, l'operatore L_0 è invertibile. Per il Teorema 4.8 applicato all'operatore $A_t := (1-t)\Delta + tA$, esistono $C = C(N, p, \nu_t, M_t, \omega_t)$ e λ_0 dipendente dagli stessi parametri tali che

$$\|u\|_{2,p} \le C\|(\lambda - A_t)u\|_p$$

per ogni $\lambda \ge \lambda_0$. Osserviamo che, come già fatto notare in $\mathbb{R}^N$,

$$M_t \le \max\{1, M\}, \quad \nu_t \ge \min\{1, \nu\}, \quad \omega_t = t\omega \le \omega,$$

possiamo pertanto eliminare la dipendenza della costante da t. Applicando il Teorema 3.6 otteniamo l'invertibilità dell'operatore $L_1 = \lambda - A$.
Le disuguaglianze (4.13), (4.14) e (4.15) seguono immediatamente dal Teorema 4.8. □

OSSERVAZIONE 4.10. Con dimostrazione analoga si provano nel semispazio i risultati ottenuti per operatori ellittici in forma divergenza in tutto lo spazio.

ESERCIZIO 4.11. Data $f \in L^p(\mathbb{R}^N_+)$, provare esistenza e unicità per l'equazione

$$\lambda u - \Delta u = f$$

nello spazio $W^{2,p}(\mathbb{R}^N_+)$ e con condizioni di Neumann al bordo.

CAPITOLO 5

Operatori ellittici in domini limitati

Concludiamo il nostro studio estendendo quanto finora provato ad operatori ellittici in domini regolari Ω di $\mathbb{R}^N$.

Richiamiamo la definizione di domini regolari di $\mathbb{R}^N$ ed alcuni risultati utili in seguito riguardanti densità di spazi di funzioni regolari in spazi di Sobolev $W^{2,p}(\Omega)$ e operatori di estensione.

DEFINIZIONE 5.1. *Diciamo che un aperto Ω di $\mathbb{R}^N$ è di classe C^k, con $k \in \mathbb{N}$, se per ogni $x \in \partial\Omega$ esistono U intorno di x in $\mathbb{R}^N$ e $H : \overline{B(0,R)} \to \overline{U}$ diffeomorfismo di classe C^k, tali che*

$$\begin{aligned} &U \cap \Omega = H(B^+(0,R)) = H(\{x \in B(0,R) : x_N > 0\}) \quad e \\ &U \cap \partial\Omega = H(B(0,R) \cap \{x_N = 0\}). \end{aligned}$$

La coppia (U, H) è detta carta locale su Ω.

OSSERVAZIONE 5.2. Componendo eventualmente con un'omotetia, si può sempre prendere $R = 1$ nella definizione precedente.

I seguenti risultati sono ben noti, vedi [**1**, Teoremi III.3.16, IV.4.26].

TEOREMA 5.3. *Siano $1 \leq p < \infty$ e Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$ di classe C^k. Allora $C^\infty(\overline{\Omega})$ è denso in $W^{k,p}(\Omega)$.*

TEOREMA 5.4. *Siano $1 \leq p < \infty$ e Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$ limitato di classe C^k. Allora esiste un operatore lineare e limitato E da $W^{k,p}(\Omega)$ in $W^{k,p}(\mathbb{R}^N)$ tale che $Eu = u$ in Ω ed esiste una costante $K = K(k, p, \Omega)$ tale che*

$$\|Eu\|_{i,p,\mathbb{R}^N} \leq K \|u\|_{i,p,\mathbb{R}^N} \tag{5.1}$$

per ogni $i = 0, 1, ..., k$.

Nel seguito Ω sarà sempre un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$ di classe C^2.
Le seguenti disuguaglianze interpolative sono simili a quelle viste per $\mathbb{R}^N$ e $\mathbb{R}^N_+$.

PROPOSIZIONE 5.5. *Sia $1 \le p < \infty$. Allora esiste $C = C(p, \Omega) > 0$ tale che*

$$\|\nabla u\|_p \le \varepsilon \|u\|_{2,p} + \frac{C}{\varepsilon}\|u\|_p$$

per ogni $u \in W^{2,p}(\Omega)$ e per ogni $\varepsilon > 0$.

DIM. Consideriamo l'operatore di estensione E come nel Teorema 5.4. Per la Proposizione 2.15 esiste $C = C(p) > 0$ tale che

$$\|\nabla Eu\|_{p,\mathbb{R}^N} \le \eta \|D^2 Eu\|_{p,\mathbb{R}^N} + \frac{C}{\eta}\|Eu\|_{p,\mathbb{R}^N}$$

per ogni $\eta > 0$. Allora

$$\|\nabla u\|_{p,\Omega} \le \|\nabla Eu\|_{p,\mathbb{R}^N} \le \eta K \|u\|_{2,p,\Omega} + K\frac{C}{\eta}\|u\|_{p,\Omega}$$

per ogni $\eta > 0$. In particolare prendendo prima $\eta = \frac{\varepsilon}{K}$ e ridefinendo poi opportunamente la costante C si ha la tesi. □

COROLLARIO 5.6. *Sia $1 \le p < \infty$. Allora esiste $C = C(p, \Omega) > 0$ tale che*

$$\|\nabla u\|_p \le \varepsilon \|D^2 u\|_p + \frac{C}{\varepsilon}\|u\|_p$$

per ogni $u \in W^{2,p}(\Omega)$ e per ogni $\varepsilon \le \frac{1}{2}$.

DIM. Per la Proposizione 5.5, esiste $C = C(p, \Omega) > 0$ tale che

$$\|\nabla u\|_p \le \varepsilon[\|u\|_p + \|\nabla u\|_p + \|D^2 u\|_p] + \frac{C}{\varepsilon}\|u\|_p$$

per ogni $\varepsilon > 0$. Da qui otteniamo

$$(1-\varepsilon)\|\nabla u\|_p \le \varepsilon \|D^2 u\|_p + (\varepsilon + \frac{C}{\varepsilon})\|u\|_p.$$

Infine, se $\varepsilon \le \frac{1}{2}$,

$$\|\nabla u\|_p \le 2\varepsilon \|D^2 u\|_p + 2(\varepsilon + \frac{C}{\varepsilon})\|u\|_p.$$

□

Fatte queste premesse, consideriamo come sempre l'operatore uniformemente ellittico

$$A = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} D_{ij} + \sum_{i=1}^{N} b_i D_i + c$$

avente i coefficienti $a_{ij} \in BUC(\Omega)$ e $b_i, c \in L^\infty(\Omega)$. Sia $M > 0$ tale che

$$\|a_{ij}\|_\infty, \|b_i\|_\infty, \|c\|_\infty \le M$$

e siano $\nu > 0$ la costante di ellitticità e ω il modulo di continuità della matrice (a_{ij}). Vogliamo provare stime L^p in Ω e poi esistenza e unicità per il

problema di Dirichlet. L'ipotesi di regolarità sul dominio suggerisce di ricondursi, mediante carte locali, a palle di $\mathbb{R}^N$ o semipalle e applicare a questo punto i risultati dei capitoli precedenti. E' opportuno perciò soffermarsi brevemente sulle trasformazioni associate alle carte locali ed esaminare il nuovo operatore differenziale ottenuto in seguito a tali trasformazioni.
Siano Ω e Λ aperti limitati di $\mathbb{R}^N$ e sia $H : \overline{\Lambda} \to \overline{\Omega}$ un diffeomorfismo di classe C^2 con inverso $J : \overline{\Omega} \to \overline{\Lambda}$.

Data $u \in W^{2,p}(\Omega)$, definiamo

$$v(y) = u(H(y)), \qquad y \in \Lambda.$$

Allora $v \in W^{2,p}(\Lambda)$ e, se u si annulla su $\partial\Omega$, v si annulla su $\partial\Lambda$. Dunque è ben definita la seguente applicazione

$$T : W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{2,p}(\Lambda) \cap W_0^{1,p}(\Lambda), \qquad u \mapsto Tu = u \circ H = v. \tag{5.2}$$

Si può facilmente verificare che T è lineare, limitata e invertibile con inversa data da

$$T^{-1} : W^{2,p}(\Lambda) \cap W_0^{1,p}(\Lambda) \to W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega), \qquad v \mapsto T^{-1}v = v \circ J = u.$$

Consideriamo l'operatore

$$Au(x) = \sum_{i,j} a_{ij}(x) D_{x_i x_j} u(x) + \sum_i b_i(x) D_{x_i} u(x) + c(x)u(x)$$

definito in Ω. Se $u(x) = v(Jx)$, si ottiene facendo un calcolo esplicito e ponendo $y = Jx$

$$Au(x) = \tilde{A}v(y) = \sum_{h,k} \alpha_{hk}(y) D_{y_h y_k} v(y) + \sum_k \beta_k D_{y_k} v(y) + \gamma(y)v(y) \tag{5.3}$$

dove

$$\alpha_{hk}(y) = \textstyle\sum_{i,j} a_{ij}(H(y)) D_{x_j} J_h(H(y)) D_{x_i} J_k(H(y)),$$
$$\beta_k(y) = \textstyle\sum_{i,j} a_{ij}(H(y)) D_{x_i x_j} J_k(H(y)) + \sum_i b_i(H(y)) D_{x_i} J_k(H(y)),$$
$$\gamma(y) = c(H(y)).$$

Le ipotesi relative al cambio di variabile assicurano che

$$\alpha_{hk} \in BUC(\Lambda),\ \beta_k,\ \gamma \in L^\infty(\Lambda).$$

Inoltre

$$\tilde{M} \le c_1(J)M \qquad \tilde{\omega} = \tilde{\omega}(\omega, J, M) \qquad \tilde{\nu} \ge c_2(J)\,\nu$$

dove $c_1(J)$ e $c_2(J)$ dipendono solo dal cambio di variabile fissato (e quindi dall'aperto) e non dall'operatore A. Osserviamo infine che con la notazione introdotta si ha

$$Au(x) = \tilde{A}v(Jx)$$

cioè
$$Au = T^{-1}\tilde{A}Tu.$$

TEOREMA 5.7 (Stime L^p in Ω). *Sia $1 < p < \infty$. Esiste $C = C(N,p,\nu,M,\omega,\Omega)$ costante positiva tale che per ogni $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ risulti*
$$\|u\|_{2,p} \le C(N,p,\nu,M,\omega,\Omega)\ [\|Au\|_p + \|u\|_p].$$

Per dimostrare questo teorema faremo ricorso al seguente lemma di partizione dell'unità.

LEMMA 5.8 (Partizione dell'unità). *Siano K un compatto di $\mathbb{R}^N$, $\{U_1, \ldots, U_k\}$ un suo ricoprimento aperto. Allora esistono $\eta_1, \ldots, \eta_k \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ che soddisfano le seguenti proprietà:*

- $0 \le \eta_i \le 1\ \forall\ i = 1, \ldots, k$
- $\sum_{i=1}^k \eta_i = 1$
- *supp* η_i *compatto*
- *supp* $\eta_i \subset U_i\ \forall\ i = 1, \ldots, k$.

DIM. Sia $\{V_i\}_{\{i=1,\ldots,k\}}$ una famiglia di insiemi aperti tali che $V_i \subset\subset U_i$ e $K \subset \cup_{i=1}^k V_i$. Vediamo in che modo può essere scelta una tale famiglia. Dato $x \in U_i$, sia r_x tale che $B(x, 2r_x) \subset U_i$. Per ipotesi K è compatto e, poiché $K \subset \cup_{x\in K} B(x, r_x)$, esiste un sottoricoprimento finito
$$K \subset \cup_{j=1}^n B(x_j, r_{x_j}).$$
Poniamo $V_i = \cup_{x_j \in U_i} B(x_j, r_{x_j})$. Allora V_i soddisfa le proprietà richieste. Sia ora $\{W_i\}_{\{i=1,\ldots,k\}}$ un'altra famiglia di insiemi compatti tale che
$$\overline{V_i} \subset \overset{\circ}{W_i} \subset W_i \subset U_i$$
e, in corrispondenza di questa, poniamo $\psi_i = \chi_{W_i}$. Sia $\varepsilon > 0$ tale che $\varepsilon < \min\{dist(V_i, \partial W_i), dist(W_i, \partial U_i)\}$ e sia $\rho_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^N}\rho(\frac{x}{\varepsilon})$ con $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, $0 \le \rho \le 1$, *supp* $\rho \subset B(0,1)$ e $\int_{\mathbb{R}^N} \rho = 1$. Poniamo $\varphi_i = \rho_\varepsilon * \psi_i$. Risulta
$$\begin{aligned} supp\ \varphi_i &\subset \overline{supp\ \rho_\varepsilon + supp\ \psi_i} = \overline{B(0,\varepsilon)} + W_i \\ &= \{x \in \mathbb{R}^N : dist(x, W_i) < \varepsilon\} \subset U_i. \end{aligned}$$
Inoltre
$$\varphi_i(x) = \int_{B(0,\varepsilon)} \psi_i(x-y)\rho_\varepsilon(y)dy = 1$$
se $x \in V_i$ in virtù della scelta di ε. Pertanto $\varphi_i \in C_c^\infty(U_i)$ e $\varphi_i(x) = 1$ se $x \in V_i$. Poniamo infine
$$\eta_1 = \varphi_1,\ \eta_i = (1-\varphi_1)(1-\varphi_2)...(1-\varphi_{i-1})\varphi_i\ \forall\ i > 1.$$

Allora $\eta_i \in C_c^\infty(U_i)$ e per induzione si prova che

$$\sum_{i=1}^{k} \eta_i = 1 - (1-\varphi_1)(1-\varphi_2)....(1-\varphi_k).$$

Se $x \in K \subset \cup_{i=1}^k V_i$, $\exists\, \bar{i}$ tale che $x \in V_{\bar{i}}$ e $\varphi_{\bar{i}}(x) = 1$, quindi $\sum_i \eta_i(x) = 1$. □

DIM. (Teorema 5.7) Denotiamo con $B(0,1)$ la palla unitaria di $\mathbb{R}^N$. Per la regolarità di Ω, per ogni $x \in \partial\Omega$ esiste una carta locale (U_x, H_x) con

$$\begin{aligned}
&H_x : \overline{B(0,1)} \to \overline{U}_x \text{ diffeomorfismo di classe } C^2,\\
&H_x(B^+(0,1)) = U_x \cap \Omega,\\
&H_x(B(0,1) \cap \{x_N = 0\}) = U_x \cap \partial\Omega.
\end{aligned}$$

Inoltre, essendo Ω aperto, per ogni $x \in \Omega$ esiste $B(x, R_x) \subset \Omega$. Risulta così

$$\overline{\Omega} \subseteq (\cup_{x\in\Omega} B(x,R_x)) \cup (\cup_{x\in\partial\Omega} U_x).$$

Siccome $\overline{\Omega}$ è compatto esistono $n_1,\ n_2 \in \mathbb{N}$ tali che

$$\overline{\Omega} \subseteq (\cup_{i=1}^{n_1} B(x_i,R_i)) \cup \left(\cup_{j=1}^{n_2} U_j\right)$$

dove $R_i = R_{x_i}$, $U_j = U_{x_j}$. Posto $n := n_1 + n_2$, consideriamo la partizione dell'unità $\{\eta_i\}_{i=1,\dots,n}$ relativa al ricoprimento suddetto con $\eta_i \in C_c^\infty(B(x_i,R_i))$ se $i \le n_1$, $\eta_i \in C_0^\infty(U_i)$ se $i = n_1+1, ..., n$ e $\sum_{i=1}^n \eta_i = 1$ in Ω. Possiamo scrivere la funzione $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ (prolungata a 0 fuori di Ω) come $\sum_{i=1}^n \eta_i u$. Trattiamo separatamente le funzioni $\eta_i u$ nei casi $i \le n_1$ e $n_1 < i \le n$.
a) $i \le n_1$. Risulta *supp* $\eta_i u \subseteq B(x_i,R_i)$ e $\eta_i u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$. Per poter applicare le stime L^p note in tutto lo spazio, dobbiamo estendere i coefficienti dell'operatore ellittico A dalla palla a tutto $\mathbb{R}^N$ in modo che conservino le proprietà di continuità e limitatezza e in modo che il nuovo operatore sia ancora uniformemente ellittico. Definiamo estensioni radiali per i coefficienti a_{ij} ponendo

$$\tilde{a}_{ij}(x) = \begin{cases} a_{ij}(x) & \text{se } |x-x_i| \le R_i \\ a_{ij}\left(R_i \frac{x-x_i}{|x-x_i|}\right) & \text{se } |x-x_i| > R_i. \end{cases} \tag{5.4}$$

Estendiamo invece banalmente a 0 i coefficienti b_i e c fuori di $B(x_i,R_i)$. Evidentemente la costante di ellitticità, la costante M e il modulo di continuità rimangono invariati. E' ora lecito applicare il Teorema 3.4 da cui otteniamo

$$\begin{aligned}
\|\eta_i u\|_{2,p} &= \|\eta_i u\|_{2,p,\mathbb{R}^N} \le c(N,p,\nu,M,\omega)\,[\|\eta_i u\|_{p,\mathbb{R}^N} + \|A(\eta_i u)\|_{p,\mathbb{R}^N}]\\
&\le c(N,p,\nu,M,\omega)\,[\|u\|_{p,\Omega} + \|\eta_i A u\|_{p,\mathbb{R}^N} + K(\eta_i,M)\|u\|_{1,p,\Omega}]\\
&\le C(N,p,\nu,M,\omega,\Omega)\,[\|Au\|_{p,\Omega} + \|u\|_{1,p,\Omega}].
\end{aligned}$$

b) $n_1 \leq i \leq n$. Poniamo

$$v_i(y) := (\eta_i u)(H_i y).$$

Osserviamo che $v_i \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N_+) \cap W^{1,p}_0(\mathbb{R}^N_+)$ e $supp\, v_i \subseteq B^+(0,1)$. Consideriamo l'operatore $\widetilde{A}$ definito in (5.3) ed estendiamo i suoi coefficienti al semispazio adottando una tecnica analoga a quella vista in (5.4). Applicando il Teorema 4.7 otteniamo

$$\|v_i\|_{2,p,\mathbb{R}^N_+} \leq C(N,p,\nu,M,\omega)\ [\|v_i\|_{p,\mathbb{R}^N_+} + \|\widetilde{A}v_i\|_{p,\mathbb{R}^N_+}]$$

e quindi

$$\begin{aligned} \|\eta_i u\|_{2,p} &\leq c(N,p,\nu,M,\omega)\ [\|\eta u\|_{p,\mathbb{R}^N_+} + \|A(\eta_i u)\|_{p,\mathbb{R}^N_+}] \\ &\leq C(N,p,\nu,M,\omega,\Omega)\ [\|Au\|_p + \|u\|_{1,p}]. \end{aligned}$$

Sommando sull'indice $i = 1, ..., n$, abbiamo

$$\|u\|_{2,p} \leq \sum_{i=1}^{n} \|\eta_i u\|_{2,p} \leq C(N,p,\nu,M,\omega,\Omega)\ [\|Au\|_p + \|u\|_{1,p}].$$

Infine, dalla disuguaglianza interpolativa della Proposizione 5.5 otteniamo

$$\|u\|_{2,p} \leq C(N,p,\nu,M,\omega,\Omega)\ [\|Au\|_p + \varepsilon\|u\|_{2,p} + \left(1 + \frac{\widetilde{C}}{\varepsilon}\right)\|u\|_p]$$

per ogni $\varepsilon > 0$ e qualche $\widetilde{C} = \widetilde{C}(p,\Omega,) > 0$. Scegliendo ε tale che $C(N,p,\nu,M,\omega,\Omega)\varepsilon \leq \frac{1}{2}$ abbiamo la tesi. □

Anche in un dominio Ω regolare, possiamo provare la stima ottenuta nel Teorema 3.5.

TEOREMA 5.9. *Sia $1 < p < \infty$. Esistono λ_0, $C > 0$ dipendenti da N,p,ν,ω,M,Ω tali che $\forall\ u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W^{1,p}_0(\Omega)$ e $\forall\ \lambda \geq \lambda_0$ risulta*

$$\lambda\|u\|_p + \lambda^{\frac{1}{2}}\|\nabla u\|_p + \|D^2 u\|_p \leq C(N,p,\nu,M,\omega,\Omega)\ \|(\lambda - A)u\|_p.$$

DIM. La dimostrazione è sostanzialmente analoga a quella fatta in $\mathbb{R}^N$ o $\mathbb{R}^N_+$. Definiamo un nuovo operatore ellittico

$$A_1 := A + D_{tt}$$

in $\Omega \times \mathbb{R}$. Consideriamo la funzione $v(t,x) := \eta(t)e^{irt}u(x)$ con $\eta \in C^\infty_c(\mathbb{R})$, $\eta \equiv 1$ in $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ e $supp\,\eta \subseteq [-1,1]$. Sia Ω_1 un aperto limitato di classe C^2 contenente $\Omega \times [-1,1]$ e tale che $v \in W^{2,p}(\Omega_1) \cap W^{1,p}_0(\Omega_1)$ per ogni v come sopra. Applichiamo le stime L^p in Ω_1 del Teorema 5.7 alla funzione v e all'operatore A_1. Procediamo poi come nella dimostrazione del Teorema 3.5. □

TEOREMA 5.10. *Siano* $1 < p < \infty$, $f \in L^p(\Omega)$. *Allora esiste* $\lambda_0 = \lambda_0(N, p, \nu, M, \omega, \Omega) > 0$ *tale che* $\forall \lambda \geq \lambda_0$ *l'equazione*

$$\lambda u - Au = f$$

ammette un'unica soluzione $u \in W^{2,p}(\Omega)$. *Inoltre esiste* $= C(N, p, \nu, M, \omega, \Omega) > 0$ *tale che* $\forall \lambda \geq \lambda_0$

$$\|(\lambda - A)^{-1}\| \leq \frac{C}{\lambda}; \tag{5.5}$$

$$\|\nabla(\lambda - A)^{-1}\| \leq \frac{C}{\sqrt{\lambda}}; \tag{5.6}$$

$$\|D^2(\lambda - A)^{-1}\| \leq C \tag{5.7}$$

(le norme sono quelle operatoriali in $L^p(\Omega)$*).*

DIM. Una volta provata l'invertibilità di $\lambda - A$, (5.5), (5.6) e (5.7) seguono dal Teorema 5.9. Anche l'unicità segue dal teorema. Infatti la stima

$$\lambda\|u\|_p \leq C\|(\lambda - A)u\|_p$$

prova l'iniettività di $\lambda - A$. Proviamo la suriettività.
Sia $f \in L^p(\Omega)$. Per ogni $x \in \partial\Omega$ esiste una carta locale (U_x, H_x) dove

$$H_x : \overline{B}_1 \to \overline{U}_x \text{ diffeomorfismo di classe } C^2, \quad H_x(B^+(0,1)) = U_x \cap \Omega,$$
$$H_x(B(0,1) \cap \{x_N = 0\}) = U_x \cap \partial\Omega.$$

Poiché Ω è aperto, per ogni $x \in \Omega$ esiste $B(x, R_x) \subset \Omega$. Allora

$$\overline{\Omega} \subseteq (\cup_{x\in\Omega} B(x, R_x)) \cup (\cup_{x\in\partial\Omega} U_x).$$

Per compattezza possiamo estrarre un sottoricoprimento finito

$$\overline{\Omega} \subseteq (\cup_{i=1}^{n_1} B(x_i, R_i)) \cup \left(\cup_{j=1}^{n_2} U_j\right).$$

Posto $n := n_1 + n_2$, consideriamo la partizione dell'unità $\{\eta_i^2\}_{i=1,\ldots,n}$ relativa al ricoprimento di cui sopra e scriviamo una funzione $f \in L^p(\Omega)$ (prolungata a 0 fuori di Ω) come $\sum_{i=1}^n \eta_i^2 f$. Distinguiamo i casi $1 \leq i \leq n_1$ e $n_1 < i \leq n$. Supponiamo dapprima $1 \leq i \leq n_1$. Le funzioni $\eta_i f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e $supp\, \eta_i f \subseteq B(x_i, R_i)$. Estendiamo i coefficienti a_{ij} radialmente in tutto $\mathbb{R}^N$ come in (5.4) e poniamo i coefficienti b_k e c nulli fuori dalla palla. Per il Teorema 3.7, esiste $\lambda_i = \lambda_i(N, p, \nu, M, \omega) > 0$ tale che per ogni $\lambda \geq \lambda_i$ l'operatore $\lambda - A$ è invertibile da $W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$ in $L^p(\mathbb{R}^N)$. Poniamo pertanto

$$R_i(\lambda)(f) := \eta_i(\lambda - A)^{-1}(\eta_i f).$$

Risulta $supp\, R_i(\lambda) f \subseteq B(x_i, R_i)$, $R_i(\lambda) f \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ e

$$\begin{aligned}
(\lambda - A)R_i(\lambda)f &= (\lambda - A)\eta_i(\lambda - A)^{-1}(\eta_i f) \\
&= \eta_i(\lambda - A)(\lambda - A)^{-1}(\eta_i f) \\
&\quad + ((\lambda - A)\eta_i - \eta_i(\lambda - A))(\lambda - A)^{-1}(\eta_i f) \\
&= \eta_i^2 f + [\lambda - A, \eta_i](\lambda - A)^{-1}(\eta_i f)
\end{aligned}$$

dove $[X,Y] = XY - YX$ denota il commutatore di due operatori X e Y e denotiamo per semplicità con η_i l'operatore di moltiplicazione per η_i. Ponendo

$$S_i(\lambda) := [\lambda - A, \eta_i](\lambda - A)^{-1}\eta_i$$

possiamo scrivere

$$(\lambda - A)R_i(\lambda)f = \eta_i^2 f + S_i(\lambda)f.$$

E' facile verificare che per ogni $g \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$

$$\begin{aligned} [\lambda - A, \eta_i]g &= -[A, \eta_i]g \\ &= -2\sum_{h,k=1}^{N} a_{hk}(D_h\eta_i D_k g + g D_{hk}\eta_i) + \sum_{h=1}^{N} b_h g D_h \eta_k \end{aligned}$$

da cui, posto $B_i = [\lambda - A, \eta_i]$, si ottiene

$$\|B_i g\|_p \le C_i(M, \eta_i)\|g\|_{1,p}.$$

Applicando quanto prima ricavato e le stime (3.7) e (3.8) del Teorema 3.7 abbiamo

$$\begin{aligned} \|S_i(\lambda)f\|_p &= \|B_i(\lambda - A)^{-1}(\eta_i f)\|_p \\ &\le C_i\|(\lambda - A)^{-1}(\eta_i f)\|_{1,p} \le C_i\frac{C}{\sqrt{\lambda}}\|\eta_i f\|_p \end{aligned}$$

dove $C = C(N, p, \nu, M, \omega)$ e $\lambda \ge \lambda_i$. Abbiamo così provato

$$\|S_i(\lambda)\| \le \frac{C_i(N, p, \nu, M, \omega, \Omega)}{\sqrt{\lambda}}$$

con C_i opportunamente ridefinita e $\lambda \ge \lambda_i$.
Supponiamo adesso $n_1 < i \le n$. Poniamo

$$v_i(y) = (\eta_i f)(H_i(y)) = T_i(\eta_i f)(y)$$

dove $H_i = H_{x_i}$ e T_i è definito come in (5.2). Osserviamo che $v \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N_+) \cap W^{1,p}_0(\mathbb{R}^N_+)$. Indichiamo con $\tilde{A}$ l'operatore ottenuto effettuando il cambiamento di variabili definito in (5.3), ricordiamo che $\tilde{A} = T_i^{-1}AT_i$ ed estendiamo i coefficienti di $\widetilde{A}$ a tutto il semispazio. Per il Teorema 4.9, esiste $\lambda_i = \lambda_i(N, p, \nu, M, \omega)$ tale che $\forall\ \lambda \ge \lambda_i$ l'operatore $\lambda - \widetilde{A} : W^{2,p}(\mathbb{R}^N_+) \cap W^{1,p}_0(\mathbb{R}^N_+) \to L^p(\mathbb{R}^N_+)$ è invertibile. Ha senso quindi considerare $(\lambda - \widetilde{A})^{-1}T_i(\eta_i f)$ per ogni $\lambda \ge \lambda_i$. Poniamo

$$R_i(\lambda)f := T_i^{-1}\left(T_i(\eta_i)(\lambda - \tilde{A})^{-1}T_i(\eta_i f)\right).$$

Risulta $R_i(\lambda)f \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ e

$$\begin{aligned}(\lambda - A)R_i(\lambda)f &= T_i^{-1}(\lambda - \tilde{A})T_iT_i^{-1}\left(T_i(\eta_i)(\lambda - \tilde{A})^{-1}T_i(\eta_i f)\right) \\ &= T_i^{-1}\left(T_i(\eta_i)T_i(\eta_i f)\right) \\ &\quad + T_i^{-1}\left([\lambda - \tilde{A}, T_i(\eta_i)](\lambda - \tilde{A})^{-1}\left(T_i(\eta_i f)\right)\right) \\ &= \eta_i^2 f + S_i(\lambda)f\end{aligned}$$

dove abbiamo posto

$$S_i(\lambda)f := T_i^{-1}\left([\lambda - \tilde{A}, T_i(\eta_i)](\lambda - \tilde{A})^{-1}\left(T_i(\eta_i f)\right)\right).$$

Anche qui, siccome S_i è un operatore differenziale del primo ordine, applicando le stime del Teorema 4.9, otteniamo

$$\|S_i(\lambda)f\|_p \leq \frac{C_i(N, p, M, \omega, \Omega)}{\sqrt{\lambda}}\|f\|_p$$

per qualche $C_i > 0$ e per ogni $\lambda \geq \lambda_i$. A questo punto, posto $R(\lambda)f = \sum_{i=1}^n R_i(\lambda)f$ e $S(\lambda)f = \sum_{i=1}^n S_i(\lambda)f$, risulta

$$R(\lambda)f \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)), \quad S(\lambda)f \in L^p(\Omega)$$

e

$$(\lambda - A)R(\lambda)f = \sum_{i=1}^n \eta_i^2 f + S(\lambda)f = f + S(\lambda)f$$

Posto $\overline{\lambda} = \max\{\lambda_i : i = 1, \ldots.., n\}$, risulta

$$\|S(\lambda)f\|_p \leq \frac{C}{\sqrt{\lambda}}\|f\|_p$$

con $C > 0$ opportuna e per ogni $\lambda \geq \overline{\lambda}$. Scegliamo $\lambda_0 \geq \overline{\lambda}$ tale che $\|S(\lambda)\| \leq \frac{1}{2}$ per ogni $\lambda \geq \lambda_0$. Questo assicura che l'operatore $I + S(\lambda)$ è invertibile in $L^p(\Omega)$ con inverso $V(\lambda) : L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$. Pertanto segue

$$(\lambda - A)R(\lambda)V(\lambda) = (I + S(\lambda))V(\lambda) = I$$

da cui

$$(\lambda - A)R(\lambda)V(\lambda)f = f.$$

La funzione $u := R(\lambda)V(\lambda)f \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ è la soluzione cercata. □

Vediamo alcune conseguenze del teorema appena provato.
Indichiamo con A_p e A_q gli operatori ellittici definiti negli spazi $W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ e $W^{2,q}(\Omega) \cap W_0^{1,q}(\Omega)$ e a valori in $L^p(\Omega)$, $L^q(\Omega)$, rispettivamente.

Corollario 5.11. *Siano $1 < p \neq q < \infty$ e $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$. Se u, $Au \in L^q(\Omega)$, allora $u \in W^{2,q}(\Omega) \cap W_0^{1,q}(\Omega)$.*

DIM. Supponiamo $p < q$ e scegliamo $\lambda \geq \max\{\lambda_{0,p}, \lambda_{0,q}\}$ con $\lambda_{0,p}$, $\lambda_{0,q}$ come nel Teorema 5.10. Posta $f = \lambda u - Au \in L^q(\Omega)$, per il Teorema 5.10 applicato all'operatore A_q, esiste $v \in W^{2,q}(\Omega) \cap W_0^{1,q}(\Omega)$ tale che $\lambda v - Av = f$. Poniamo $w := u - v$; siccome Ω è limitato risulta $w \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ e $\lambda w - Aw = 0$. Pertanto $w = 0$ cioè $u = v$ e quindi $u \in W^{2,q}(\Omega) \cap W_0^{1,q}(\Omega)$. $\square$

TEOREMA 5.12. *Siano $1 < p \neq q < \infty$. Allora $\sigma(A_p) = \sigma(A_q)$ e per ogni $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ e $\lambda \in \rho(A)$ risulta*

$$(\lambda - A_p)^{-1} f = (\lambda - A_q)^{-1} f.$$

DIM. Supponiamo $p < q$. Per il Teorema 5.10, A_p ha risolvente non vuoto. Siccome $W^{2,p}(\Omega)$ è immerso con compattezza in $L^p(\Omega)$, l'operatore risolvente è compatto e il suo spettro è costituito solo da autovalori. Ovviamente lo stesso discorso vale per lo spettro di A_q. Proviamo che $\sigma(A_q) = \sigma(A_p)$. Sia $\lambda \in \sigma(A_q)$. Allora esiste $0 \neq u \in W^{2,q}(\Omega) \cap W_0^{1,q}(\Omega)$ tale che $\lambda u - Au = 0$. Ma $p < q$, quindi $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ e risolve la stessa equazione, così $\lambda \in \sigma(A_p)$.
Sia ora $\lambda \in \sigma(A_p)$, allora esiste $0 \neq u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ tale che $\lambda u - Au = 0$. Supponiamo $p \geq \frac{N}{2}$, allora $u \in L^r(\Omega)$ per ogni $r < \infty$, in particolare $u \in L^q(\Omega)$ e $Au \in L^q(\Omega)$, essendo $\lambda u = Au$. Per il Corollario 5.11, $u \in W^{2,q}(\Omega) \cap W_0^{1,q}(\Omega)$ e quindi $\lambda \in \sigma(A_q)$. Supponiamo adesso $p < \frac{N}{2}$ e sia p_1 tale che $\frac{1}{p_1} = \frac{1}{p} - \frac{2}{N}$. Allora $u \in L^{p_1}(\Omega)$, $Au \in L^{p_1}(\Omega)$ e per il Corollario 5.11 $u \in W^{2,p_1}(\Omega) \cap W_0^{1,p_1}(\Omega)$. Se $p_1 \geq q$, abbiamo subito la tesi, altrimenti ripetiamo lo stesso ragionamento un numero finito di volte.
Proviamo la seconda parte. Siano $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ e $\lambda \in \rho(A_p) = \rho(A_q)$. Essendo $p < q$,

$$(\lambda - A_q)^{-1} f = u \in W^{2,q}(\Omega) \cap W_0^{1,q}(\Omega) \subset W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$$

e quindi

$$(\lambda - A_p)^{-1} f = (\lambda - A_q)^{-1} f.$$

$\square$

OSSERVAZIONE 5.13. Se l'operatore è dato in forma divergenza, si possono ottenere gli stessi risultati provati in tutto lo spazio. In particolare, si può determinare un valore $\lambda_p = \sup_{x \in \Omega} \left[-\frac{\operatorname{div} b(x)}{p} + c(x) \right]$ tale che, per ogni $\lambda > \lambda_p$, $\lambda - A$ è invertibile.

Consideriamo infine l'operatore ellittico

$$A = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} D_{ij} + \sum_{i=1}^{N} b_i D_i + c$$

avente coefficienti α-hölderiani in Ω con $0 < \alpha \leq 1$ e proviamo che $\lambda_p = 0$ in questo caso. Il risultato è vero con la sola uniforme contiunuità dei coefficienti ma non verrà provato in quest'ultimo caso. Enunciamo un classico teorema di esistenza e unicità in tali spazi.
Diremo che un aperto Ω è di classe $C^{2,\alpha}$ se è come nella Definizione 5.1 con H_x di classe $C^{2,\alpha}$.

TEOREMA 5.14. *Sia Ω un aperto limitato con bordo di classe $C^{2,\alpha}$. Supponiamo $c \leq 0$ in Ω. Allora per ogni $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$, $\forall\ \lambda \geq 0$, esiste un'unica $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ tale che $\lambda u - Au = f$ e $u_{|\partial\Omega} = 0$.*

(per esempio vedi [**3**, Teorema 6.14] o [**5**, Teorema 5.6.4].

COROLLARIO 5.15. *Sia $1 < p < \infty$. Se $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$, u, $Au \in C^\alpha(\Omega)$ e $c \leq 0$ allora $u \in C_0^{2,\alpha}(\Omega) = \{u \in C^{2\alpha}(\Omega) : u_{|\partial\Omega} = 0\}$.*

DIM. Sia $\lambda > \lambda_p$. Per ipotesi, $\lambda u - Au = f \in C^\alpha(\Omega)$. Per il Teorema 5.14, esiste $v \in C_0^{2,\alpha}$ tale che $\lambda v - Av = f$. Allora $w := u - v \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ e $\lambda w - Aw = 0$. Per il Teorema 5.10, $w = 0$ e quindi $u = v \in C_0^{2,\alpha}(\Omega)$. □

TEOREMA 5.16. *Siano $1 < p < \infty$, $c \leq 0$ in Ω. Se $f \in L^p(\Omega)$, esiste un'unica $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ tale che $Au = f$.*

DIM. Dobbiamo provare che $0 \notin \sigma(A)$. Per il Teorema 5.12, lo spettro di A_p non dipende da p. Possiamo pertanto supporre, senza perdere di generalità, $p > \frac{N}{2}$. Sia $0 \neq u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ tale che $Au = 0$. Per i Teoremi di immersione di Sobolev, $u \in C^\alpha(\Omega)$ con $\alpha = 1 - \frac{N}{2p}$, allora u, $Au \in C^\alpha(\Omega)$ e, per il Corollario 5.15, $u \in C_0^{2,\alpha}(\Omega)$. Per il Teorema 5.14, u deve necessariamente essere identicamente nulla. Questo vuol dire che 0 non è un autovalore di A_p, ossia $0 \in \rho(A_p)$. □

CAPITOLO 6

Regolarità di ordine superiore

Nelle sezioni precedenti abbiamo provato esistenza e unicità della soluzione in $W^{2,p}(\Omega)$ dell'equazione $\lambda u - Au = f$ con condizioni al bordo di Dirichlet, dove A è l'operatore differenziale ellittico del secondo ordine

$$Au = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij} D_{ij} u + \sum_{i=1}^{N} b_i u + cu.$$

In questa sezione studiamo regolarità di ordine superiore della soluzione in presenza di maggiore regolarità del dato f. Supporremo infatti f in $W^{k,p}(\Omega)$ con $k \in \mathbb{N}$.
Ripercorriamo il procedimento già usato nelle sezioni precedenti, provando regolarità di ordine superiore dapprima in $\mathbb{R}^N$ ed infine in un aperto limitato regolare Ω, passando attraverso il semispazio $\mathbb{R}^N_+$.

Per cominciare abbiamo bisogno di richiedere maggiore regolarità ai coefficienti dell'operatore A, assumendo pertanto d'ora in avanti

$$a_{ij} = a_{ji} \in BUC^k, \quad b_i, c \in W^{k,\infty}.$$

Supponiamo al solito che l'operatore sia uniformente ellittico con costante di ellitticità $\nu > 0$ e poniamo

$$\omega(r) := \max_{i,j} \sup_{|x-y|<r} |a_{ij}(x) - a_{ij}(y)|;$$

$$M = \max\{\|a_{ij}\|_{k,\infty}, \|b_i\|_{k,\infty}, \|c\|_{k,\infty}\}.$$

Sia $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e $h \in \mathbb{R}^N$, $h \neq 0$; chiamiamo *quoziente differenziale* di u in x l'espressione

$$\tau_h u(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{|h|}.$$

E' immediato verificare che per ogni $u, v \in L^p(\mathbb{R}^N)$ si ha

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\tau_h u) v = \int_{\mathbb{R}^N} u(\tau_{-h}\, v) \tag{6.1}$$

ed inoltre

(a) $\tau_h(uv)(x) = u(x+h)\tau_h v(x) + \tau_h u(x)v(x)$, per ogni $u, v \in L^p(\mathbb{R}^N)$;
(b) $\tau_h Du = D\tau_h u$, per ogni $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ con Du generica derivata di u.

Se $u \in L^p(\Omega)$ e ω è un aperto a chiusura compatta contenuta in Ω (brevemente $\omega \subset\subset \Omega$), allora ha senso considerare $D_h u(x)$ per $x \in \omega$ e $0 < |h| < dist(\omega, \partial\Omega)$.

La prossima proposizione è una ben nota caratterizzazione degli spazi di Sobolev in termini di quozienti differenziali (vedi [**2**, Proposizione IX.3]).

PROPOSIZIONE 6.1. *Sia $u \in L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$. Sono equivalenti*

(i) $u \in W^{1,p}(\Omega)$;
(ii) *esiste $C > 0$ tale che per ogni aperto $\omega \subset\subset \Omega$ e per ogni $h \in \mathbb{R}^N$ con $0 < |h| < \mathrm{dist}(\omega, \partial\Omega)$ risulti*

$$\|\tau_h u\|_{L^p(\omega)} \le C.$$

In tal caso possiamo prendere $C = \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$.

OSSERVAZIONE 6.2. L'ipotesi $|h| < dist(\omega, \partial\Omega)$ serve a garantire che il quoziente differenziale $\tau_h u$ sia ben definito. Se siamo in $\mathbb{R}^N$, non vi è alcun bisogno di restringersi ad un aperto ω e si può prendere un h qualunque, purchè ovviamente diverso dal vettore nullo.
La proposizione si può applicare ad ogni singola derivata parziale. Basta infatti che $\|\tau_h u\|_{L^p(\omega)}$
$\le C$ per ogni $h = te_i$ con $0 < t < dist(\omega, \partial\Omega)$ per dedurre l'esistenza di $D_h u \in L^p(\Omega)$.

Proviamo adesso un primo risultato di regolarità in $\mathbb{R}^N$. Nella dimostrazione useremo la stima a-priori del Teorema 3.4

$$\|u\|_{2,p} \le C(\|u\|_p + \|Au\|_p) \tag{6.2}$$

valida per ogni $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$.

PROPOSIZIONE 6.3. *Siano $1 < p < \infty$ ed $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$ tale che $Au \in W^{k,p}(\mathbb{R}^N)$. Allora $u \in W^{k+2,p}(\mathbb{R}^N)$ ed esiste $C = C(N, p, \nu, M, \omega) > 0$ tale che*

$$\|u\|_{k+2,p} \le C(\|u\|_p + \|Au\|_{k,p}). \tag{6.3}$$

DIM. Proviamo la tesi per induzione su k.
passo 1: Sia $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$ tale che $Au \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Prendiamo $h \in \mathbb{R}^N$, $h \neq 0$, e consideriamo il quoziente differenziale $\tau_h u$. Applichiamo la stima (6.2) a $\tau_h u$

$$\|\tau_h u\|_{2,p} \le C(\|\tau_h u\|_p + \|A\tau_h u\|_p).$$

Per le proprietà dei quozienti differenziali si ha

$$A(\tau_h u)(x) = \tau_h(Au)(x) - \sum_{i,j=1}^{N} \tau_h a_{ij}(x) D_{ij}u(x+h)$$
$$- \sum_{i=1}^{N} \tau_h b_i(x) D_i u(x+h) - \tau_h c(x) u(x+h) \qquad (6.4)$$

e quindi

$$\|\tau_h u\|_{2,p} \leq C \left(\|\tau_h u\|_p + \|\tau_h Au\|_p + \sum_{i,j=1}^{N} \|\tau_h a_{ij}\|_\infty \|D_{ij}u\|_p \right.$$
$$\left. + \sum_{i=1}^{N} \|\tau_h b_i\|_\infty \|D_i u\|_p + \|\tau_h c\|_\infty \|u\|_p \right). \qquad (6.5)$$

Per la Proposizione 6.1 possiamo maggiorare con una costante ogni termine a secondo membro della (6.5), sicchè

$$\|\tau_h u\|_{2,p} \leq \text{cost}$$

e questo, sempre per la Proposizione 6.1, implica che $u \in W^{3,p}(\mathbb{R}^N)$.

Possiamo adesso applicare l'operatore A ad una qualsiasi derivata parziale $D_r u$, che come abbiamo appena visto appartiene a $W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$. Data la regolarità $W^{1,\infty}$ dei coefficienti dell'operatore si ha

$$A(D_r u) = D_r(Au) - \sum_{i,j=1}^{N} D_r a_{ij} D_{ij} u - \sum_{i=1}^{N} D_r b_i D_i u - D_r c\, u,$$

allora $\|AD_r u\|_p \leq \|D_r Au\|_p + M\|u\|_{2,p}$. Applicando più volte la stima (6.2) si ottiene

$$\begin{aligned}
\|D_r u\|_{2,p} &\leq C(\|D_r u\|_p + \|AD_r u\|_p) \\
&\leq C(\|D_r u\|_p + \|D_r Au\|_p + M\|u\|_{2,p}) \\
&\leq C'(\|u\|_{2,p} + \|D_r Au\|_p) \\
&\leq C''(\|u\|_p + \|Au\|_p + \|D_r Au\|_p)
\end{aligned}$$

dove C' e C'' sono costanti positive dipendenti da N, p, ν, M, ω. Per finire

$$\|u\|_{3,p} = \|u\|_p + \sum_{r=1}^{N} \|D_r u\|_{2,p} \leq C''(\|u\|_p + \|Au\|_{1,p})$$

che è proprio la stima cercata.

passo 2: Sia $k \geq 2$, supponiamo la tesi vera per $k-1$ e proviamola per k. Sia $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$ tale che $Au \in W^{k,p}(\mathbb{R}^N)$. Per l'ipotesi induttiva $u \in W^{k+1,p}(\mathbb{R}^N)$ ed esiste $C = C(N, p, \nu, M, \omega) > 0$ tale che

$$\|u\|_{k+1,p} \leq C(\|u\|_p + \|Au\|_{k-1,p}).$$

Sia $D_r u$ una qualsiasi derivata parziale di u. $D_r u \in W^{k,p}(\mathbb{R}^N) \subset W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$ e

$$AD_r u = D_r(Au) - \sum_{i,j=1}^{N} D_r a_{ij} D_{ij} u - \sum_{i=1}^{N} D_r b_i D_i u - D_r c\, u. \tag{6.6}$$

Per ipotesi i coefficienti di A sono in $W^{k,\infty}(\mathbb{R}^N)$, perciò dall'uguaglianza precedente si ha che $AD_r u \in W^{k-1,p}(\mathbb{R}^N)$ e

$$\|AD_r u\|_{k-1,p} \le \|D_r Au\|_{k-1,p} + M\|u\|_{k-1,p}. \tag{6.7}$$

A questo punto per il passo induttivo $D_r u \in W^{k+1,p}(\mathbb{R}^N)$ e

$$\|D_r u\|_{k+1,p} \le C(\|D_r u\|_p + \|AD_r u\|_{k-1,p}) \tag{6.8}$$

Mettendo assieme (6.7) e (6.8) ed usando ancora una volta il passo induttivo otteniamo

$$\begin{aligned}\|D_r u\|_{k+1,p} &\le C(\|D_r u\|_p + \|D_r Au\|_{k-1,p} + M\|u\|_{k-1,p}) \\ &\le C'(\|u\|_{k-1,p} + \|D_r Au\|_{k-1,p}) \\ &\le C''(\|u\|_p + \|Au\|_{k-1,p} + \|D_r Au\|_{k-1,p}),\end{aligned}$$

dove C' e C'' sono nuove costanti positive dipendenti da N, p, ν, M, ω. Infine dall'arbitrarietà di r discende che $u \in W^{k+2,p}(\mathbb{R}^N)$ e che vale la stima

$$\|u\|_{k+2,p} \le C''(\|u\|_p + \|Au\|_{k,p}).$$

Proviamo l'analogo risultato nel semispazio $\mathbb{R}^N_+$.

PROPOSIZIONE 6.4. *Siano* $1 < p < \infty$ *ed* $u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N_+) \cap W^{1,p}_0(\mathbb{R}^N_+)$ *tale che* $Au \in W^{k,p}(\mathbb{R}^N_+)$. *Allora* $u \in W^{k+2,p}(\mathbb{R}^N_+)$ *ed esiste* $C = C(N, p, \nu, M, \omega) > 0$ *tale che*

$$\|u\|_{k+2,p} \le C(\|u\|_p + \|Au\|_{k,p}). \tag{6.9}$$

DIM. Per $k = 0$ la tesi è stata già provata nel Corollario 4.5. Procediamo per induzione su k. Supponiamo dapprima $Au \in W^{1,p}_0(\mathbb{R}^N_+)$. Sia $h = (h_1, \ldots, h_{N-1}, 0) \in \mathbb{R}^N_+)$, $h \neq 0$, vettore tangente all'iperpiano $\{x_N = 0\}$. Allora il quoziente differenziale $\tau_h u$ risulta ben definito ed appartiene a $W^{2,p}(\mathbb{R}^N_+) \cap W^{1,p}_0(\mathbb{R}^N_+)$. Possiamo perciò applicare a $\tau_h u$ la stima (4.8) e procedere come nella dimostrazione della Proposizione 6.3, ottenendo che

$$\|\tau_h u\|_{2,p} \le \mathit{cost}.$$

Per la Proposizione 6.1, questa maggiorazione ci permette di affermare che una qualsiasi derivata seconda $D_{rs} u$ ammette derivata parziale in $L^p(\mathbb{R}^N_+)$ nella direzione coordinata e_j per ogni $j < N$. Se $j = N$ distinguiamo i casi seguenti:

1) almeno uno dei due indici r ed s è diverso da N. Supponiamo $r \neq N$, allora, invertendo l'ordine di derivazione, risulta

$$D_N D_{rs} u = D_r D_{Ns} u$$

che appartiene a $L^p(\mathbb{R}^N_+)$ per quanto già provato.
2) Se $r = s = N$, allora

$$D_{NN} u = \frac{1}{a_{NN}} \left(Au - \sum_{(i,j)\neq(N,N)} a_{ij} D_{ij} u - \sum_{i=1}^{N} D_r b_i D_i u - D_r c\, u \right)$$

e quindi $D_{NN} u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N_+)$.

Abbiamo pertanto provato che $u \in W^{3,p}(\mathbb{R}^N_+)$. Da questo punto in poi si procede come nella dimostrazione della Proposizione 6.3. □

Passiamo alla regolarità in un aperto Ω di $\mathbb{R}^N$, limitato e di classe C^k. Come nella sezione 5 mediante carte locali ci riconduciamo a studiare il problema in palle di $\mathbb{R}^N$ o intersezioni di palle con $\mathbb{R}^N_+$. Per comodità ricordiamo come si trasforma l'operatore A se si cambia variabile, questa volta assumendo che il cambio di variabile sia un diffeomorfismo di classe C^k.

Siano Ω e Λ aperti limitati di $\mathbb{R}^N$ e sia $H : \overline{\Lambda} \to \overline{\Omega}$ un diffeomorfismo di classe C^k con inverso $J : \overline{\Omega} \to \overline{\Lambda}$. Data $u \in W^{k,p}(\Omega)$, definiamo

$$v(y) = u(H(y)), \qquad y \in \Lambda.$$

Risulta ben definita la seguente applicazione

$$\begin{aligned} &T : W^{k,p}(\Omega) \cap W^{1,p}_0(\Omega) \to W^{k,p}(\Lambda) \cap W^{1,p}_0(\Lambda), \\ &u \mapsto Tu = u \circ H = v. \end{aligned} \tag{6.10}$$

Si può facilmente verificare che T è lineare, limitata e invertibile con inversa data da

$$T^{-1} : W^{k,p}(\Lambda) \cap W^{1,p}_0(\Lambda) \to W^{k,p}(\Omega) \cap W^{1,p}_0(\Omega), \quad v \mapsto T^{-1} v = v \circ J = u.$$

Se $u(x) = v(Jx)$, si ottiene facendo un calcolo esplicito e ponendo $y = Jx$

$$Au(x) = \tilde{A} v(y) = \sum_{h,k} \alpha_{hk}(y) D_{y_h y_k} v(y) + \sum_h \beta_h D_{y_h} v(y) + \gamma(y) v(y) \tag{6.11}$$

dove

$$\begin{aligned} &\alpha_{hk}(y) = \textstyle\sum_{i,j} a_{ij}(H(y)) D_{x_j} J_h(H(y)) D_{x_i} J_k(H(y)), \\ &\beta_h(y) = \textstyle\sum_{i,j} a_{ij}(H(y)) D_{x_i x_j} J_h(H(y)) + \sum_i b_i(H(y)) D_{x_i} J_h(H(y)), \\ &\gamma(y) = c(H(y)). \end{aligned}$$

Quindi risulta definito $\tilde{A} = TAT^{-1}$ operatore uniformemente ellittico i cui coefficienti

$$\alpha_{hk} \in C_{ub}(\Lambda) \cap W^{k,\infty}(\Lambda),\ \beta_h,\ \gamma \in W^{k,\infty}(\Lambda).$$

Inoltre

$$\tilde{M} \leq c_1(J)M \qquad \tilde{\omega} = \tilde{\omega}(\omega, J, M) \qquad \tilde{\nu} \geq c_2(J)\,\nu$$

dove $c_1(J)$ e $c_2(J)$ dipendono solo dal cambio di variabile fissato (e quindi dall'aperto) e non dall'operatore A.

PROPOSIZIONE 6.5. *Siano* $1 < p < \infty$ *ed* $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ *tale che* $Au \in W^{k,p}(\Omega)$. *Allora* $u \in W^{k+2,p}(\Omega)$ *ed esiste* $C = C(N, p, \nu, M, \omega, \Omega) > 0$ *tale che*

$$\|u\|_{k+2} \leq C(\|u\|_p + \|Au\|_{k,p}).$$

DIM. Supponiamo dapprima $Au \in W^{1,p}(\Omega)$. Denotiamo con $B(1)$ la palla unitaria di $\mathbb{R}^N$. Per la regolarità di Ω, per ogni $x \in \partial\Omega$ esiste una carta locale (U_x, H_x) con

$$H_x : \overline{B(1)} \to \overline{U}_x \text{ diffeomorfismo di classe } C^k, \quad H_x(B^+(1)) = U_x \cap \Omega$$
$$H_x(B(1) \cap \{x_N = 0\}) = U_x \cap \partial\Omega.$$

Inoltre, essendo Ω aperto, per ogni $x \in \Omega$ esiste $B(x, R_x) \subset \Omega$. Risulta così

$$\overline{\Omega} \subset \left(\bigcup_{x\in\Omega} B(x, R_x) \right) \cup \left(\bigcup_{x\in\partial\Omega} U_x \right).$$

Per compattezza possiamo estrarre un ricoprimento finito. Esistono pertanto $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tali che

$$\overline{\Omega} \subset \left(\bigcup_{i=1}^{n_1} B(x_i, R_i) \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{n_2} U_j \right),$$

dove per semplicità denotiamo R_{x_i} con R_i e U_{x_j} con U_j. Posto $n = n_1 + n_2$ consideriamo una partizione dell'unità $\{\eta_i\}_{i=1,\dots,n}$ relativa al ricoprimento con $\eta_i \in C_c^\infty(B(x_i, R_i))$ se $i \leq n_1$, $\eta_i \in C_c^\infty(U_i)$ se $n_1 < i < n$.

Trattiamo separatamente le funzioni $\eta_i u$ nei casi $i \leq n_1$ e $n_1 < i < n$.
'caso $i \leq n_1$': Risulta *supp* $\eta_i \subset B(x_i, R_i)$ e $\eta_i u \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$. Per applicare i risultati di regolarità nell'intero spazio estendiamo l'operatore A dalla palla a tutto $\mathbb{R}^N$ in modo tale che l'estensione $\hat{A}$ sia ancora un operatore uniformemente ellittico e conservi le proprietà di regolarità dei coefficienti di A. A tal fine sia $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tale che

$$0 \leq \varphi \leq 1, \qquad \varphi = 1 \text{ in } B(1), \qquad \varphi = 0 \text{ in } \mathbb{R}^N \setminus 2B(1).$$

Consideriamo allora $\hat{\varphi}(x) = \varphi\left(\dfrac{x - x_i}{R_i}\right)$ e poniamo

$$\hat{A} = \hat{\varphi}A + (1 - \hat{\varphi})\Delta.$$

Osserviamo che $\hat{A}$ è uniformemente ellittico perché combinazione convessa di operatori uniformemente ellittici ed ha costante di ellitticità

$$\hat{\nu} \geq \min\{1, \nu\}.$$

I coefficienti di $\hat{A}$ sono

$$\begin{aligned} \hat{a}_{ij} &= \hat{\varphi} a_{ij} + (1 - \hat{\varphi})\delta_{ij} \in BUC(\mathbb{R}^N) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N) \\ \hat{b}_i &= \hat{\varphi} b_i \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N), \quad c = \hat{\varphi} c \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N) \end{aligned}$$

ed inoltre

$$\begin{aligned} \hat{M} &= \max\{\|\hat{a}_{ij}\|_{1,\infty}, \|\hat{b}_i\|_{1,\infty}, \|c\|_{1,\infty}\} \leq c(N)M \\ \hat{\omega} &\leq \omega + (M+1)\omega_{\hat{\varphi}} \end{aligned}$$

dove $c(N) > 0$ è una costante che dipenda da N e $\omega_{\hat{\varphi}}$ è il modulo di continuità di $\hat{\varphi}$.

E' ora lecito applicare la Proposizione 6.3, da cui otteniamo che $\eta_i u \in W^{3,p}(\mathbb{R}^N)$, quindi $\eta_i u \in W^{3,p}(\Omega)$, e

$$\begin{aligned} \|\eta_i u\|_{3,p;\Omega} &\leq \|\eta_i u\|_{3,p;\mathbb{R}^N} \leq C(\|\eta_i u\|_{p;\mathbb{R}^N} + \|\hat{A}(\eta_i u)\|_{1,p;\mathbb{R}^N}) \\ &= C(\|u\|_{p;\Omega} + \|A(\eta_i u)\|_{1,p;B(x_i,R_i)}) \\ &\leq C(\|u\|_{p;\Omega} + \|\eta_i A u\|_{1,p;B(x_i,R_i)} + K(\eta_i, M)\|u\|_{2,p;B(x_i,R_i)}) \\ &\leq C(\|u\|_{2,p;\Omega} + \|Au\|_{1,p;\Omega}). \end{aligned}$$

'*caso* $n_1 < i < n$': Poniamo $v_i(y) = (\eta_i u)(H_i y)$. Osserviamo che $v_i \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N_+) \cap W^{2,p}_0(\mathbb{R}^N_+)$ e *supp* $v_i \subset B^+(1)$. Consideriamo l'operatore $\tilde{A}$ definito in (6.11) ed estendiamolo, come prima, all'operatore $\hat{A} = \varphi\tilde{A} + (1-\varphi)\Delta$ definito in $\mathbb{R}^N_+$. Applichiamo la Proposizione 6.4 ed otteniamo che $v_i \in W^{3,p}(\mathbb{R}^N_+)$, quindi $\eta_i u \in W^{3,p}(\Omega)$, e

$$\begin{aligned} \|\eta_i u\|_{3,p;\Omega} &\leq c(J)\|v_i\|_{3,p;\mathbb{R}^N_+} \leq C(\|v_i\|_{p;\mathbb{R}^N_+} + \|\hat{A}v_i\|_{1,p;\mathbb{R}^N_+}) \\ &= C(\|v_i\|_{p;B^+(1)} + \|\tilde{A}v_i\|_{1,p;B^+(1)}) \\ &\leq C(\|\eta_i u\|_{p,;U_i} + \|A(\eta_i u)\|_{1,p;U_i}) \\ &\leq C(\|u\|_{p;\Omega} + \|\eta_i A u\|_{1,p;U_i} + K(\eta_i, M)\|u\|_{2,p;U_i}) \\ &\leq C(\|u\|_{2,p;\Omega} + \|Au\|_{1,p;\Omega}). \end{aligned}$$

Sommando sull'indice $i = 1, ..., n$, abbiamo che $u = \sum \eta_i u \in W^{3,p}(\Omega)$ e

$$\|u\|_{3,p;\Omega} \leq \sum_{i=1}^{N} \|\eta_i u\|_{2,p;\Omega} \leq C(N,p,\nu,M,\omega,\Omega,\varphi)\ (\|u\|_{2,p;\Omega} + \|Au\|_{1,p;\Omega})$$

da cui la tesi, siccome $\|u\|_{2,p;\Omega} \leq C\,(\|u\|_{p;\Omega} + \|Au\|_{p;\Omega})$.

Il passaggio da $k-1$ a k si fa come nella Proposizione 6.3. □

Bibliografia

[1] R.A. ADAMS: *Sobolev spaces,* Academic Press, 1975.

[2] H. BREZIS: *Analyse fonctionnelle,* Masson, 1983.

[3] D. GILBARG, N. S. TRUDINGER: *Elliptic partial differential equations of second order,* Springer-Verlag, 1983.

[4] E.M. ELIAS: *Singular integrals and differentiability properties of functions,* Princeton University Press, 1970.

[5] S. FORNARO, S. MANIGLIA, G. METAFUNE: *Equazioni ellittiche del secondo ordine, Parte prima: teoria* L^2 *e* C^α, Quaderno n.4 del Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Lecce.

Notazioni

Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$, $1 \le p < +\infty$, $k \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha \le 1$.

$C_c^\infty(\Omega)$	spazio delle funzioni derivabili con continuità infinite volte e a supporto compatto in Ω;
$(L^p(\Omega), \\|\cdot\\|_{L^p(\Omega)})$	spazio delle funzioni u misurabili secondo Lebesgue con $\\|u\\|_{L^p(\Omega)}^p := \int_\Omega \|u(x)\|^p dx < +\infty$ (se non c'è ambiguità, scriveremo $\\|u\\|_p$ al posto di $\\|u\\|_{L^p(\Omega)}$);
$(L^\infty(\Omega), \\|\cdot\\|_\infty)$	spazio delle funzioni u misurabili secondo Lebesgue con $\\|u\\|_\infty := \inf\{C > 0 : \|u(x)\| \le C$ quasi ovunque in $\Omega\} < \infty$;
$(W^{k,p}(\Omega), \\|\cdot\\|_{k,p})$	spazio delle funzioni u con derivate distribuzionali fino all'ordine k in $L^p(\Omega)$ con norma $\\|u\\|_{k,p} := \sum_{\|\beta\| \le k} \\|D^\beta u\\|_{L^p}$;
$W_{\mathrm{loc}}^{k,p}(\Omega)$	spazio delle funzioni appartenenti a $W^{k,p}(\Omega')$ per ogni aperto limitato Ω' con $\overline{\Omega}' \subset \Omega$;
$W_0^{k,p}(\Omega)$	chiusura di $C_c^\infty(\Omega)$ in $W^{k,p}(\Omega)$;
$C(\Omega)$	spazio delle funzioni continue in Ω;
$C_b(\Omega)$	spazio delle funzioni continue e limitate in Ω;
$C^k(\Omega)$	spazio delle funzioni derivabili k volte con continuità in Ω;
$C_0(\overline{\Omega})$	spazio delle funzioni continue in $\overline{\Omega}$ nulle su $\partial\Omega$;
$BUC(\Omega)$	spazio delle funzioni limitate e uniformemente continue in Ω;
$BUC^k(\Omega)$	spazio delle funzioni in $BUC(\Omega)$ derivabili con continuità k volte in Ω con tutte le derivate sino all'ordine k in $BUC(\Omega)$;
$(C^\alpha(\Omega), \\|\cdot\\|_\alpha)$	spazio delle funzioni u α-hölderiane in Ω, ossia in $C_b(\Omega)$ e con $[u]_\alpha := \sup_{x,y\in\Omega; x\neq y} \frac{\|u(x)-u(y)\|}{\|x-y\|^\alpha} < +\infty$, munito della norma $\\|u\\|_\alpha := \\|u\\|_\infty + [u]_\alpha$;
$B(x_0, R)$	palla di centro x_0 e raggio R. Scriveremo solo $B(R)$ quando non sarà importante indicare esplicitamente il centro;

$\mathbb{R}^N_+$	$\{x = (x', x_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R} \mid x_N > 0\}$;
$B^+(x_0, R)$	$B(x_0, R) \cap \mathbb{R}^N_+$;
ω_N	misura di Lebesgue della palla unitaria di $\mathbb{R}^N$;
$\|\Omega\|$ o $\mu(\Omega)$	misura di Lebesgue dell'aperto Ω;
$\Omega' \subset\subset \Omega$	aperti con $\overline{\Omega}' \subset \Omega$;
$Q(x_0, R)$	cubo di centro x_0 e lato R;
E^c	complementare di E.